VLADIMIR FOCK

THEORIE VON RAUM, ZEIT UND GRAVITATION



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

VLADIMIR FOCK

THEORIE VON RAUM, ZEIT UND GRAVITATION



THEORIE VON RAUM, ZEIT UND GRAVITATION

VLADIMIR FOCK

Professor an der Universität Leningrad
Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR

Autorisierte bearbeitete Ausgabe



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1960

В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения
Erschienen im Staatsverlag für techn.-theor. Literatur, Moskau 1955

Wissenschaftliche Redaktion: Dr. Hans-Joachim Meister, München

Übersetzt aus dem Russischen: Helmut Vogel, Teltow

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 1, Leipziger Straße 3–4
Lizenz-Nr. 202 · 100/687/60
Satz und Druck: Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg
Bestellnummer: 5363
Printed in Germany
ES 18 B 1

VORWORT

zur deutschen Ausgabe

In dem vorliegenden Buch sind verschiedene Bestrebungen des Verfassers zum Ausdruck gekommen. Zunächst soll das Buch alles enthalten, was zu einem Lehrbuch der Relativitätstheorie und der Gravitationstheorie EINSTEINs gehört. Ferner soll es eine Darstellung der eigenen Arbeiten des Verfassers über diesen Gegenstand geben. Nicht zuletzt soll aber das Buch die Unzulässigkeit der sich in der Literatur eingebürgerten Auffassung der Gravitationstheorie als einer Art „allgemeiner Relativität" zeigen; diese Auffassung soll durch eine konsequentere ersetzt werden, welche auf einer nichtlokalen Betrachtungsweise beruht und die Begriffe „Relativität" und „Kovarianz" streng unterscheidet. Wie auch der Titel zeigt, wird in unserem Buch nicht das Relative, sondern das Absolute betont.

Gegenüber der russischen Auflage dieses Buches[1]) sind nur einige wenige Änderungen vorgenommen: eine Vervollkommnung der mathematischen Beweise in § 8 und § 31 und eine Präzisierung einiger Betrachtungen in § 61 und § 93.

Da nunmehr auch für den deutschen Leser die Ideen des Verfassers über Raum, Zeit und Gravitation zugänglich werden, darf man wohl die Hoffnung aussprechen, daß das Erscheinen der deutschen Auflage des Buches zur Diskussion dieser Ideen beitragen wird.

Im Frühjahr 1960 V. FOCK

Physikalisches Institut
der Universität Leningrad

---

[1]) В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва 1955.



VORWORT

zur russischen Auflage

Der Zweck dieses Buches ist vor allem die Darstellung unserer Untersuchungen über die EINSTEINsche Gravitationstheorie. Hierzu gehören: die Herleitung der Bewegungsgleichungen eines Systems von Körpern unter Berücksichtigung ihrer inneren Struktur und ihrer Rotation, die Ableitung von Näherungslösungen der Gravitationsgleichungen sowie die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Lösungen, ferner Untersuchungen über die Frage der Existenz eines Koordinatensystems, das bis auf eine LORENTZ-Transformation festgelegt ist, usw.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen haben uns davon überzeugt, daß es wenigstens für eine sehr wichtige Klasse physikalischer Probleme möglich ist, durch Zusatzbedingungen, die mit den Gravitationsgleichungen verträglich sind, den Lösungen dieser Gleichungen Eindeutigkeit zu sichern. Diese Überzeugung diente als Grundlage für eine neue Auffassung der Gravitationstheorie. Es erwuchs das Bedürfnis, die gesamte Theorie von Raum, Zeit und Gravitation von diesem neu entwickelten Standpunkt aus darzustellen, was in diesem Buch geschehen soll.

Um die Theorie logisch einheitlich aufzubauen, haben wir auch die gewöhnliche Relativitätstheorie (die Theorie des GALILEIschen Raumes) in unser Buch aufgenommen. Diese Erweiterung des Stoffes hat auch den Vorzug, daß das ganze Buch leichter zugänglich wird, da dann weniger Vorkenntnisse beim Leser vorausgesetzt werden müssen.

Bei der Ausarbeitung und Darstellung der gewöhnlichen Relativitätstheorie entstand eine Reihe von Fragen, deren Lösung ebenfalls einige neue Ergebnisse lieferte, welche freilich zum Teil methodischen Charakters sind. Hierzu gehören: eine neue Form des Beweises für die Linearität der Transformation, die zwei Inertialsysteme verknüpft, eine Untersuchung der LAGRANGE-Funktion für ein System von Ladungen und eine Ableitung der Bewegungsintegrale, Untersuchungen über die astronomische Aberration auf Grund des Begriffs des LOBATSCHEWSKY-EINSTEINschen Geschwindigkeitsraumes usw.

Besondere Aufmerksamkeit haben wir den prinzipiellen Problemen gewidmet. Dabei wurde größtmögliche logische Strenge der Überlegungen angestrebt. Das war wegen der Neuartigkeit unserer Auffassungen und der daraus folgenden Notwendigkeit einer überzeugenden Begründung besonders wesentlich.

Auf dieser Gesamtanlage des Buches beruhen auch seine Unvollkommenheiten, vor allem die ziemlich dürftigen Hinweise auf die experimentelle Begründung der Theorie, die geringe Anzahl von Anwendungen, der Verzicht auf einen eingehenden historischen Überblick und ein ausführliches Literaturverzeichnis sowie wahrscheinlich noch weitere Mängel.

Da in diesem Buch die Theorie aus ihren allerersten Grundlagen entwickelt wird, enthält es einen Stoff, der auch den Studenten der Physik und allen Personen mit der entsprechenden Allgemeinbildung zugänglich sein sollte. Für die theoretisch spezialisierten Studenten der Physik und für theoretische Aspiranten ist das ganze Buch verständlich. Die Fachleute finden darin neue, hier zuerst veröffentlichte Ergebnisse über eine Reihe von Problemen.

Im Mai 1955 V. Fock

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG[1])

Vom geometrischen Standpunkt aus zerfällt die Theorie von Raum und Zeit naturgemäß in die des homogenen (GALILEIschen) Raumes und die des inhomogenen (RIEMANNschen und EINSTEINschen) Raumes.[2])

Der GALILEIsche Raum ist maximal homogen. Das kommt darin zum Ausdruck, daß in ihm a) alle Raum-Zeit-Punkte gleichberechtigt sind, b) alle Richtungen gleichberechtigt sind und c) alle Inertialsysteme, die sich gegeneinander geradlinig und gleichförmig bewegen, gleichberechtigt sind (GALILEIsches Relativitätsprinzip).

Die Homogenität von Raum und Zeit äußert sich in der Existenz einer Transformationsgruppe, welche den Ausdruck für den vierdimensionalen Abstand (Intervall) zwischen zwei Punkten ungeändert läßt. Der Ausdruck für das Intervall spielt in der Theorie der Raum-Zeit eine große Rolle, da seine Form unmittelbar mit der Form der Grundgesetze der Physik verknüpft ist, nämlich mit dem Gesetz für die Bewegung eines freien Massenpunktes und dem Ausbreitungsgesetz für die Front einer Lichtwelle im Vakuum.

Die oben aufgezählten Kennzeichen a), b) und c) der Homogenität des GALILEIschen Raumes hängen mit den folgenden Transformationen zusammen:

a) Der Gleichberechtigung aller Raum-Zeit-Punkte entspricht eine Transformation, die in einer Verschiebung des Koordinatenursprungs und des Zeitnullpunktes besteht und vier Parameter enthält (die drei Anfangswerte der Koordinaten und den Anfangswert der Zeit).

b) Der Gleichberechtigung aller Richtungen entspricht eine Transformation, die in einer Drehung der Koordinatenachsen besteht und drei Parameter enthält (drei Winkel).

c) Der Gleichberechtigung aller Inertialsysteme entspricht eine Transformation, die in einem Übergang von dem gegebenen Bezugssystem zu einem anderen besteht, welches sich gegen das erstere geradlinig und gleichförmig bewegt; diese Transformation enthält drei Parameter (die drei Komponenten der Relativgeschwindigkeit).

---

[1]) In dieser Einleitung werden wir oft Ausdrücke und Begriffe benutzen müssen, die erst später im Text genauer definiert werden. Diese Inkonsequenz war jedoch nicht zu umgehen, da wir schon in der Einleitung eine Vorstellung von unserem neuen Standpunkt gegenüber der Theorie geben wollten, welcher das ganze Buch beherrscht. Dieser Nachteil wird übrigens dadurch gemildert, daß, wie wir hoffen, der Leser bereits einiges über den Gegenstand wissen wird. Wenn das in der Einleitung Ausgeführte nicht genügend klar sein sollte, ist es empfehlenswert, sie nach der Lektüre des ganzen Werkes nochmals zu lesen.

[2]) Statt „Raum und Zeit" werden wir häufig einfach „Raum" sagen.

Die allgemeinste Transformation enthält zehn Parameter. Es ist die LORENTZ-Transformation.

In einem n-dimensionalen Raum kann die Gruppe der Transformationen, die den Ausdruck für das Quadrat des Abstandes zweier infinitesimal benachbarter Punkte ungeändert lassen, bekanntlich höchstens $^1/_2\, n\, (n + 1)$ Parameter enthalten. Gibt es eine Gruppe, die alle $^1/_2\, n\, (n + 1)$ Parameter enthält, so ist der Raum maximal homogen; es handelt sich dann entweder um einen Raum konstanter Krümmung oder, wenn diese Krümmung gleich Null ist, um einen euklidischen (oder pseudoeuklidischen) Raum.

In dem hier betrachteten Fall der Raum-Zeit haben wir vier Dimensionen, so daß maximal zehn Parameter auftreten können. Da diese letztere Zahl mit der Anzahl der Parameter der LORENTZ-Transformation übereinstimmt, ist der GALILEIsche Raum (auf den sich diese Transformation bezieht), wie schon oben gesagt, maximal homogen.

Die Theorie des GALILEIschen Raumes, welche auf der LORENTZ-Transformation basiert, bezeichnet man gewöhnlich als spezielle Relativitätstheorie. Genauer müßte man sagen, daß der Gegenstand dieser Theorie die Formulierung der physikalischen Gesetze in Einklang mit den Eigenschaften des GALILEIschen Raumes ist. Der Schöpfer der Relativitätstheorie ist ALBERT EINSTEIN (1879—1955). Als die Vorgänger EINSTEINS kann man POINCARÉ und LORENTZ ansehen. In diesem Buch sind der Theorie des GALILEIschen Raumes die Kapitel I—IV gewidmet.

Die Gravitation läßt sich nicht in den Rahmen des homogenen GALILEIschen Raumes einfügen. Der tiefere Grund dafür wurde von EINSTEIN erkannt: Er besteht darin, daß nicht nur die träge, sondern auch die schwere Masse eines Körpers von seiner Energie abhängt.

Die Theorie der Gravitation kann man erst schaffen, wenn man auf die Homogenität des Raumes als Ganzes verzichtet[1]) und nur im unendlich Kleinen eine Homogenität bestimmter Art zuläßt. Mathematisch entspricht das der Einführung der RIEMANNschen Geometrie anstelle der euklidischen (genauer pseudoeuklidischen) Geometrie. Die heutige Gravitationstheorie wurde ebenfalls von EINSTEIN geschaffen.

Daß in der Gravitationstheorie im unendlich Kleinen noch eine Homogenität vorhanden ist (ähnlich derjenigen, welche sich in der LORENTZ-Transformation ausdrückt), hängt damit zusammen, daß man in der Umgebung eines betrach-

---

[1]) Die Ausdrücke „der Raum als Ganzes", „Randbedingungen im Unendlichen" usw. werden hier nicht im buchstäblichen, sondern im mathematischen Sinne gebraucht, wie es in einer Feldtheorie üblich ist. Unter „dem Raum als Ganzes" verstehen wir ein Gebiet, welches so groß ist, daß man an seinen Grenzen das Feld des betrachteten Systems von Körpern als verschwindend klein betrachten kann; auf die Grenzen dieses Gebietes beziehen sich auch die „Randbedingungen im Unendlichen". Je nach der Art des Problems können die tatsächlichen Abmessungen dieses Gebietes sehr verschieden sein: Für ein Atom oder Molekül kann man schon Abstände von der Größenordnung eines Mikrons als unendlich groß ansehen, für das Sonnensystem sind sie von der Ordnung eines Lichtjahres, für das System der Galaxien von der Ordnung 10^8 oder 10^9 Lichtjahre. Niemals aber verstehen wir unter dem „Raum als Ganzes" das ganze Weltall; letzteres in die Betrachtung einzubeziehen, scheint uns schon aus erkenntnistheoretischen Gründen unmöglich zu sein.

teten Raumpunktes das Gravitationsfeld durch ein Beschleunigungsfeld ersetzen oder vielmehr vortäuschen kann (Äquivalenzprinzip). Die physikalische Grundlage dieses Prinzips ist das schon von GALILEI erkannte Gesetz, daß alle Körper mit der gleichen Geschwindigkeit (genauer, mit gleicher Beschleunigung) fallen, wenn sie keinen Widerstand des umgebenden Mediums erleiden. Verallgemeinernd kann man das GALILEIsche Gesetz als das Gesetz der Gleichheit von träger und schwerer Masse formulieren. Es muß jedoch betont werden, daß dieses grundlegende Gesetz einen universellen Charakter hat, während das Äquivalenzprinzip nur lokal gilt und bei einer nichtlokalen Anwendung ungenau wird und nur für schwache Felder und langsame Bewegungen angenäherte Gültigkeit besitzt.

Bei der Untersuchung von Raum und Zeit kann man sich jedoch nicht auf die lokale Betrachtungsweise (d. h. die Betrachtung unendlich kleiner Raumgebiete und Zeitintervalle) beschränken. Die Eigenschaften des Raumes als Ganzes müssen unbedingt auch explizite zum Ausdruck kommen. Andernfalls wäre es unmöglich, zu einer eindeutigen Problemstellung zu gelangen. Das ergibt sich besonders klar aus der Tatsache, daß die Gleichungen jedes Feldes (auch des Gravitationsfeldes) partielle Differentialgleichungen sind, deren Lösungen erst dann eindeutig bestimmt werden können, wenn Anfangs- und Randbedingungen oder andere Bedingungen gegeben sind, die jene ersetzen. Feldgleichungen und Randbedingungen hängen untrennbar miteinander zusammen, und die letzteren sind nicht weniger wichtig als die Feldgleichungen selbst. In Problemen, die den gesamten Raum betreffen, beziehen sich die Randbedingungen auf entfernte Raumgebiete, so daß man zu ihrer Formulierung die Eigenschaften des Raumes als Ganzes kennen muß.

Wir bemerken, daß die Unzulänglichkeit der lokalen Betrachtungsweise und die Wichtigkeit der Randbedingungen von EINSTEIN offenbar unterschätzt wurden. Im Zusammenhang damit mußten wir in unseren Arbeiten und auch im vorliegenden Buch wesentliche Änderungen an der Formulierung der Grundprobleme der Gravitationstheorie vornehmen.

Der einfachste und zugleich wichtigste Fall liegt dann vor, wenn man den Raum im Unendlichen als homogen (im Sinne der LORENTZ-Transformation) ansehen kann. In diesem Fall haben die durch die Massen hervorgerufenen Inhomogenitäten einen nur örtlichen Charakter; die Massen und ihre Gravitationsfelder sind sozusagen in einen unbegrenzten GALILEIschen Raum eingebettet. Dieser Fall ist deshalb besonders wichtig, weil die Existenz der Bewegungsintegrale mit der Homogenität des Raumes im Unendlichen zusammenhängt. Nur wenn der Raum im Unendlichen eine vollständige LORENTZ-Transformation mit zehn Parametern zuläßt, existieren alle zehn Bewegungsintegrale einschließlich des Energieintegrals. Die Kapitel V, VI und VII dieses Buches beschäftigen sich fast ausschließlich mit dem Fall eines im Unendlichen homogenen Raumes.

Es ist auch die Annahme möglich, daß die Raum-Zeit als Ganzes keine vollständige Homogenität besitzt, sondern nur in einem beschränkten Sinne homogen ist: Nach wie vor ist eine beliebige Verschiebung des Anfangspunktes der Raumkoordinaten und eine beliebige Drehung der Raumachsen zulässig; das ergibt sechs Parameter. Die übrigen vier Parameter der LORENTZ-Transformation, nämlich die drei Geschwindigkeitskomponenten und der Zeitnullpunkt,

werden jedoch durch die ersten sechs bestimmt. Eine derartige Raum-Zeit wurde zuerst von FRIEDMANN behandelt; da ihr räumlicher Anteil die LOBATSCHEWSKYsche Geometrie besitzt, kann man sie als FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKYschen Raum bezeichnen. Dieser Raum läßt im Gegensatz zum GALILEIschen Raum die Existenz eines wohldefinierten Gravitationsfeldes bei einer von Null verschiedenen mittleren Dichte der wägbaren Materie zu. Man kann also annehmen, daß in der Kosmologie, d. h. bei der Betrachtung sehr großer Gebiete, deren Abmessungen etwa 10^8 oder 10^9 Lichtjahre betragen und die annähernd gleichmäßig von Galaxien erfüllt sind, der FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKYsche Raum eine bessere Annäherung an die Wirklichkeit darstellt, als der GALILEIsche Raum. Die Theorie der örtlichen Inhomogenitäten in einem FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKYschen Raum ist aber noch gar nicht entwickelt. Wir wollen diesem Raum nur § 94 und § 95 dieses Buches widmen.

Von den Eigenschaften des Raumes als Ganzes wird auch die Lösung des Problems der Existenz ausgezeichneter Koordinatensysteme abhängen.

Im GALILEIschen Raum sind die gewöhnlichen kartesischen Koordinaten und die Zeit ausgezeichnet; diese vier Variablen bezeichnet man als GALILEIsche Koordinaten. Die ausgezeichnete Stellung dieser Koordinaten beruht darauf, daß die LORENTZ-Transformation, welche die Homogenität des Raumes ausdrückt, in diesen Koordinaten linear ist.

In einem Raum, der nur im Unendlichen homogen ist, kann man auch ein ausgezeichnetes Koordinatensystem einführen, das bis auf eine LORENTZ-Transformation festgelegt ist (harmonische Koordinaten). Diese Tatsache, die in unseren Arbeiten zuerst festgestellt wurde, ist von großer prinzipieller Bedeutung; nur mit ihrer Hilfe kann man zeigen, daß die ausgezeichnete Stellung des heliozentrischen Systems von KOPERNIKUS gegenüber dem geozentrischen System des PTOLEMÄUS auch in der EINSTEINschen Gravitationstheorie erhalten bleibt. Eine ausführliche Begründung dafür geben wir in § 92 und § 93 dieses Buches. Alle konkreten Probleme der Gravitationstheorie, die in diesem Buch untersucht werden, lösen wir in harmonischen Koordinaten. Dadurch wird die Eindeutigkeit der Lösungen gesichert.

Im FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKYschen Raum gibt es wahrscheinlich auch ausgezeichnete Koordinatensysteme. Diese Frage ist jedoch bisher nicht untersucht worden, da es noch keine Theorie der örtlichen Inhomogenitäten in einem solchen Raum gibt.

In der Frage der Existenz ausgezeichneter Koordinatensysteme nahm EINSTEIN, der Schöpfer der Gravitationstheorie, einen Standpunkt ein, der dem unseren entgegengesetzt ist: Er vertrat die Meinung, daß überhaupt keine ausgezeichneten Koordinatensysteme existieren. Das hängt mit der oben erwähnten Überschätzung der lokalen Betrachtungsweise zusammen, die der RIEMANNschen Geometrie zugrunde liegt, und mit der Unterschätzung der Wichtigkeit einer Betrachtung des Raumes als Ganzes. Zweifellos hat hier auch die philosophische Einstellung EINSTEINs eine Rolle gespielt, der während seines ganzen Lebens unter dem Einfluß der MACHschen Ideen stand.

Das Problem der verschiedenen Koordinatensysteme und der Änderung der Form der Gleichungen beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen nimmt in der Theorie des Raumes und der Zeit einen wichtigen Platz ein.

Eine besonders große Bedeutung mißt man der Kovarianz der Gleichungen bei. Unter Kovarianz ist folgendes zu verstehen: Man betrachtet eine Koordinatentransformation, die mit einer Transformation der abhängigen Variablen (Funktionen) nach einer bestimmten (etwa tensoriellen) Regel verbunden ist, und achtet auf die Form der Gleichungen, denen die ursprünglichen und die transformierten Funktionen genügen. Gehorchen die durch eine solche Transformation gewonnenen neuen Funktionen der neuen Variablen Gleichungen von derselben Form wie die alten Funktionen der alten Variablen, so bezeichnet man die Gleichungen als kovariant. Die Kovarianz der Gleichungen ermöglicht es, diese ohne vorherige Wahl des Koordinatensystems hinzuschreiben. Außerdem hat die Forderung nach Kovarianz der Gleichungen eine große heuristische Bedeutung, da sie die Vielfalt der Gleichungsformen einschränkt und so die Aufstellung der richtigen Form erleichtert. Wir müssen jedoch betonen, daß dies nur dann gilt, wenn auch die Anzahl der eingeführten Funktionen beschränkt wird. Läßt man jedoch die Einführung einer beliebigen Anzahl neuer Hilfsfunktionen zu, so kann man praktisch jedem Gleichungssystem eine kovariante Form geben.

Die Kovarianz eines Gleichungssystems ist also an sich noch kein Ausdruck für irgendein physikalisches Gesetz. So sind zum Beispiel in der Punktmechanik die LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art kovariant gegen beliebige Koordinatentransformationen, drücken aber deshalb im Vergleich zu den LAGRANGEschen Gleichungen erster Art, die in rechtwinkligen Koordinaten geschrieben werden und nicht kovariant sind, keine neue physikalische Gesetzmäßigkeit aus.

Die Kovarianz der LAGRANGEschen Gleichungen erreicht man dadurch, daß man als neue Hilfsfunktionen die Koeffizienten desjenigen (im allgemeinen nicht homogenen) quadratischen Ausdrucks einführt, der die LAGRANGE-Funktion in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten darstellt.

In der RIEMANNschen Geometrie sind die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ des homogenen quadratischen Ausdrucks für das differentielle Abstandsquadrat die neuen zur Verfügung stehenden Funktionen. Durch Einführung dieser Funktionen lassen sich Ausdrücke aufbauen, die gegen beliebige Koordinatentransformationen kovariant sind. Solange man nur solche $g_{\mu\nu}$-Werte betrachtet, die aus den Werten in einem festen (etwa GALILEIschen) System durch Koordinatentransformationen hervorgehen, liefert das nichts Neues. Wenn man aber allgemeinere, nicht ineinander transformierbare $g_{\mu\nu}$-Systeme zuläßt, so beschreiben diese $g_{\mu\nu}$ nicht nur Eigenschaften des Koordinatensystems, sondern auch innere Eigenschaften der Raum-Zeit. Die letzteren können mit dem Phänomen der Gravitation in Zusammenhang gebracht werden, wobei die oben erwähnten allgemein-kovarianten Ausdrücke eine physikalische Bedeutung erhalten. Wichtig ist dabei die Forderung, daß diese kovarianten Ausdrücke keine weiteren Funktionen außer den $g_{\mu\nu}$ enthalten sollen (so daß auch das Schwerefeld durch die $g_{\mu\nu}$ beschrieben wird). Diese Forderung auferlegt nämlich den in Betracht kommenden Ausdrücken eine so starke Beschränkung, daß man fast eindeutig zu den von EINSTEIN gefundenen Gleichungen des Gravitationsfeldes gelangt. Gerade diese Beschränkung, nicht aber die Forderung der allgemeinen Kovarianz bildet den entscheidenden Schritt in EINSTEINs Entdeckung.

Nachdem wir den Sinn des Begriffes Kovarianz in der RIEMANNschen Geometrie erläutert haben, wollen wir ihn dem früher betrachteten Begriff der Homogenität der Raum-Zeit gegenüberstellen.

Wie wir oben sahen, kommt die Homogenität des GALILEIschen Raumes in den Transformationen zum Ausdruck, die den vierdimensionalen Abstand zwischen zwei Punkten ungeändert lassen. Genauer kann man sagen, daß bei diesen Transformationen die Koeffizienten des Ausdrucks für das Abstandsquadrat, d. h. die Größen $g_{\mu\nu}$, ungeändert bleiben, in dem Sinne, daß die neuen $g_{\mu\nu}$ von den neuen Variablen auf dieselbe Weise abhängen, wie die alten $g_{\mu\nu}$ von den alten Variablen (insbesondere können die alten und die neuen $g_{\mu\nu}$ konstant und einander gleich sein). Im allgemeinen Fall der RIEMANNschen Geometrie gibt es jedoch keine Transformationen, die die Größen $g_{\mu\nu}$ ungeändert lassen, denn der RIEMANNsche Raum ist nicht homogen. In der RIEMANNschen Geometrie handelt es sich um Koordinatentransformationen, *die mit Transformationen der Größen $g_{\mu\nu}$ verbunden sind*, welche die Abhängigkeit dieser Größen von den entsprechenden Variablen ändern. Solche gemeinsame Transformationen und die Kovarianz gegenüber diesen haben aber mit der Homogenität oder Inhomogenität des Raumes überhaupt nichts zu tun.[1])

Wir können nun die Mißverständnisse aufklären, die durch den unrichtigen Gebrauch des Wortes „Relativität" herbeigeführt wurden, der sich in der Literatur eingebürgert hat.

In den ersten Arbeiten über die Relativitätstheorie wurde der Begriff Relativität im Sinne der Homogenität des Raumes verstanden. Als Relativitätstheorie bezeichnete man die Theorie des GALILEIschen Raumes, dessen Homogenität durch die LORENTZ-Transformation gekennzeichnet wird. Diese Bezeichnungsweise ist einigermaßen gerechtfertigt, da in dieser Theorie die Verallgemeinerung des GALILEIschen Relativitätsprinzips eine große Rolle spielt.[2]) Mit der Schaffung der EINSTEINschen Gravitationstheorie kam aber der Ausdruck „allgemeine Relativität" in Gebrauch, der alles verwirrte. Dieser Ausdruck wurde im Sinne von „allgemeiner Kovarianz" benutzt (d. h. im Sinne einer Kovarianz der Gleichungen gegenüber Koordinatentransformationen, die mit einer Transformation der $g_{\mu\nu}$ einhergehen, wobei sich die mathematische Form der $g_{\mu\nu}$ als Funktionen der entsprechenden Variablen ändern kann). Wir haben aber eben gesehen, daß eine solche Kovarianz nichts mit der Homogenität des Raumes zu tun hat, d. h. die „allgemeine Relativität" hat nichts mit der „Relativität schlechthin" gemein. Trotzdem erhielt die letztere die Bezeichnung „spezielle Relativität", als ob sie ein Spezialfall der „allgemeinen Relativität" wäre.

Um eine Vorstellung davon zu geben, zu welchen Mißverständnissen das führen kann, wollen wir einige Beispiele betrachten.

Wie im Kapitel IV gezeigt wird, läßt sich die Theorie des homogenen GALILEIschen Raumes nicht nur kovariant im Sinne der LORENTZ-Transformation, sondern auch allgemein-kovariant formulieren. In der Sprache der „allgemeinen" und „speziellen" Relativität läßt sich dieser einfache Gedanke kaum (oder gar nicht) ausdrücken, und wir wollen das gar nicht erst versuchen; denn wir müßten dann sagen, daß die „spezielle" Relativität die „allgemeine" umfaßt oder etwas ähnliches.

---

[1]) Diese Ideen wurden auch von E. CARTAN [1] vertreten.

[2]) Vielleicht wäre die von A. D. FOKKER [2] vorgeschlagene Bezeichnung *Chronogeometrie* vorzuziehen.



Bedenkt man, daß man es schon in der NEWTONschen Mechanik mit den allgemein-kovarianten LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art zu tun hat, so müßte man auch sagen, daß die NEWTONsche Mechanik die „allgemeine Relativität" enthält.

Der Ausdruck „allgemeine Relativität" oder „allgemeines Relativitätsprinzip" wird auch (vor allem von EINSTEIN selbst) im Sinne von Gravitationstheorie benutzt. Schon die grundlegende Arbeit EINSTEINS über die Gravitationstheorie (1916) hat den Titel „Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". Das verwirrt die Angelegenheit noch mehr. In der Gravitationstheorie wird der Raum als inhomogen angesehen, während die Relativität mit der Homogenität zusammenhängt; daraus ergibt sich, daß in der allgemeinen Relativitätstheorie überhaupt keine Relativität vorhanden ist. Selbst wenn man berücksichtigt, daß in der Gravitationstheorie der Raum im unendlich Kleinen homogen ist, so muß man doch zugeben, daß die Gravitationstheorie eine Einschränkung und keine Verallgemeinerung des Begriffes der Relativität darstellt, denn sie verzichtet auf den GALILEIschen Raum, der nicht nur im unendlich Kleinen, sondern auch als Ganzes homogen ist.

Das Gesagte zeigt deutlich, daß der Gebrauch der Ausdrücke „allgemeine Relativität", „allgemeine Relativitätstheorie" und „allgemeines Relativitätsprinzip" unzulässig ist. Diese Terminologie führt nicht nur zu Mißverständnissen, sondern bringt auch eine falsche Auffassung von der Theorie zum Ausdruck. So paradox es auch klingen mag, auch EINSTEIN selbst — der Schöpfer der Theorie —, zeigt ein solches mangelhaftes Verständnis. Denn sowohl in der Benennung seiner Theorie und seiner Arbeiten, als auch in seinen Überlegungen betonte er immer die Worte „allgemeine Relativität" und sah nicht ein, daß die von ihm geschaffene Theorie, wenn man sie als Verallgemeinerung der alten betrachtet, nicht den Relativitätsbegriff, sondern andere, nämlich geometrische Begriffe verallgemeinert.

In diesem Buch benutzen wir den Ausdruck „allgemeine Relativität" überhaupt nicht. Die Theorie des GALLILEIschen Raumes bezeichnen wir, indem wir dem allgemeinen Brauch folgen, als Relativitätstheorie (aber ohne den Zusatz „spezielle"). Die Theorie des EINSTEINschen Raumes nennen wir Gravitationstheorie (aber nicht „allgemeine Relativitätstheorie", da diese Bezeichnung, wie wir gesehen haben, keinen Sinn hat).

Die allgemein-philosophische Seite unserer Auffassung von der Theorie des Raumes, der Zeit und der Gravitation hat sich unter dem Einfluß des dialektischen Materialismus gebildet, insbesondere unter dem Einfluß von LENINS Buch „Materialismus und Empiriokritizismus". Dieser philosophische Standpunkt hat uns geholfen, die Mängel der Auffassung EINSTEINS von seiner Theorie einzusehen und hat auch gezeigt, auf welchem Wege man zu einer konsequenteren Auffassung kommen kann. Er half uns auch, unsere eigenen, neuen Ergebnisse richtig zu verstehen und zu deuten. Das möchten wir hier feststellen, obwohl sonst philosophische Fragen in expliziter Form in diesem Buche nicht berührt werden.

KAPITEL I

RELATIVITÄTSTHEORIE

§ 1 Die Koordinaten und die Zeit

Raum und Zeit sind primäre Begriffe. Im allgemeinen philosophischen Sinne sind Raum und Zeit die Existenzformen der Materie. Der einfachste Begriff, der sich auf Raum und Zeit bezieht, ist ein Raumpunkt, der zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachtet wird. Um einen Punkt im Raume zu „markieren“, muß man einen Körper von hinreichend kleinen Abmessungen dorthin bringen. Die Lage dieses Körpers kann nur in bezug auf andere Körper angegeben werden, denn es gibt kein „mit dem Raum verschmolzenes“, von materiellen Körpern unabhängiges Gradnetz. Hat man ein Bezugssystem oder eine „Basis“, d. h. ein System von Körpern gewählt, bezüglich dessen die Lage des gegebenen Massenpunktes betrachtet wird, so kann man diese Lage durch drei Koordinaten beschreiben. Diese beziehen sich auf einen bestimmten Zeitpunkt, der auf den „Uhren“ der Basis abgelesen wird. Im allgemeinen Fall sind die Koordinaten Hilfsgrößen, die die Lage der Körper in bezug auf die Basis kennzeichnen. Mit deren Hilfe kann man nach den Gesetzen der euklidischen Geometrie (oder ihrer Verallgemeinerung, der RIEMANNschen Geometrie) die gegenseitige Lage der Körper bestimmen, insbesondere ihre Abstände und die Winkel zwischen ihren Verbindungslinien. Als Koordinaten wählt man gewöhnlich geradlinige, rechtwinklige Koordinaten, weil sie am einfachsten mit den Abständen verknüpft sind. Man kann aber auch beliebige andere (krummlinige) Koordinaten benutzen, zum Beispiel zwei Winkel, die die Richtung zum betrachteten Massenpunkt kennzeichnen, und den Abstand dieses Massenpunktes.

Es muß hervorgehoben werden, daß sowohl die Koordinaten selbst, als auch die mit ihrer Hilfe berechneten Abstände, Winkel und sonstigen Größen, welche die gegenseitige Lage der Körper kennzeichnen, erst durch die Wahl einer bestimmten Basis einen bestimmten Sinn erhalten. Ebenso werden die Zeitpunkte, auf die sich Koordinaten und Abstände beziehen, sowie auch die Zeitintervalle erst festgelegt, wenn man eine bestimmte Basis und eine bestimmte Zeitmessung in dieser Basis einführt, also ein bestimmtes Bezugssystem zugrunde legt.

Die Variablen x, y, z, t (die Koordinaten und die Zeit), von denen im folgenden die Rede sein wird, beziehen sich also immer auf eine bestimmte Basis.

§ 2 Die Lage eines Körpers im Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem vorgegebenen Bezugssystem

Wir wollen zunächst von der Rolle der Zeit absehen und die üblichen Methoden zur Bestimmung der Lage von Gegenständen im Raum betrachten. Im wesentlichen beruhen diese Methoden neben der Hypothese der Anwendbarkeit der

euklidischen Geometrie auf den realen physikalischen Raum auf zwei Voraussetzungen: auf der Existenz starrer Körper und auf der Geradlinigkeit der Lichtausbreitung. Um die Lage eines bestimmten entfernten Gegenstandes zu ermitteln, mißt man nämlich mit einem starren Maßstab eine Basis aus (im Sinne der üblichen Triangulation) und bestimmt mit Hilfe von Lichtstrahlen von verschiedenen Punkten dieser Basis die Richtung zu dem Gegenstand. Setzt man die Lichtstrahlen als geradlinig voraus, so kann man dann nach den Gesetzen der euklidischen Geometrie die Entfernung des Gegenstandes und alle übrigen Daten, die seine Lage kennzeichnen, berechnen. Das Grundpostulat ist hierbei die Geradlinigkeit der Lichtausbreitung im Vakuum; in der Atmosphäre gilt diese Geradlinigkeit nur angenähert und muß kontrolliert werden (Berücksichtigung der Refraktion usw.). Die Gültigkeit der Gesetze der euklidischen Geometrie für den realen physikalischen Raum ist als eine Annahme auf Grund der Erfahrung und nicht als eine Gewißheit a priori anzusehen. Denn obwohl diese Gesetze mit außerordentlich großer Genauigkeit bestätigt worden sind, so beruht doch die EINSTEINsche Gravitationstheorie gerade darauf, daß kleine Abweichungen von ihnen vorhanden sind.

Die Eigenschaften des Lichtes und der starren Körper spielen also bei der Festlegung der Geometrie des realen physikalischen Raumes eine fundamentale Rolle.

Wir müssen jedoch darauf hinweisen, daß der Begriff des starren Körpers hier in gewisser Hinsicht nur ein Hilfsbegriff ist. Absolut starre Körper gibt es nicht. Die realen physikalischen Körper können nur angenähert — und auch das nur unter bestimmten Bedingungen (konstante Temperatur, Fehlen elastischer Schwingungen usw.) — als starre Körper mit unveränderlichen geometrischen Abmessungen angesehen werden. Die Konstanz des Längen-Urmaßes kann mit größter Genauigkeit durch Vergleich mit der Wellenlänge einer bestimmten Spektrallinie geprüft werden. Damit ist der Längenbegriff letzten Endes auf die Eigenschaften der Atome (oder Moleküle), die die betreffende Linie emittieren, und auf die Eigenschaften des Lichtes zurückgeführt.

Eine andere mögliche Methode zur Bestimmung der Lage von Gegenständen im Raum, die grundsätzlich verschieden von der Triangulation ist, besitzen wir in der Radio-Geodäsie oder Funkortung. Ihr Prinzip besteht darin, daß man von einem bestimmten Punkt Funksignale aussendet, die von dem beobachteten Gegenstand reflektiert werden und zum Beobachtungspunkt zurückkehren. Hierbei wird die Laufzeit des Signals (hin und zurück) und natürlich auch die Richtung festgestellt. Kennt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Funksignals (sie ist gleich der Lichtgeschwindigkeit), so erhält man die Entfernung des Gegenstandes, indem man diese Geschwindigkeit mit der halben Laufzeit des Signals multipliziert.

Grundsätzlich ist diese Methode insofern bedeutungsvoll, als dabei die Längenmessung auf die Messung von Zeitintervallen zurückgeführt wird und so die Eigenschaften absolut starrer Körper gar nicht benutzt werden. Eine wesentliche Annahme ist dabei die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit spielt hier die Rolle eines Umrechnungsfaktors von der Zeit auf die Länge. Den Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit muß man durch andere Experimente feststellen, bei denen allerdings Längenmaße benötigt werden.

Eine Zeitmessung kann man grundsätzlich auf jeden periodischen Prozeß gründen. Die größte Genauigkeit haben heute die Uhren, die Eigenschwingungen des Kristallgitters des Quarzes oder der Ammoniakmoleküle benutzen. In der Praxis benutzt man die astronomische Zeitmessung, die auf der Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgesetze auf die Erdrotation basiert, wobei alle aus der Theorie folgenden Korrekturen hinsichtlich gewisser Ungleichmäßigkeiten der Rotation (Nutation usw.) berücksichtigt werden.

Die genauen Methoden der Zeitmessung gestatten es, die Uhren der „Basis" zu regulieren.

Bei der Messung der Lage bewegter Gegenstände bezüglich einer bestimmten Basis erhebt sich die Frage, auf welchen Zeitpunkt (nach den Uhren der Basis) die gewonnenen Abstände (und allgemein die Raumkoordinaten) zu beziehen sind. Wir wollen hier folgendes definieren: Wird ein Lichtsignal (oder ein Funksignal von einem Peilpunkt) zur Zeit t_1 ausgesandt und kehrt es zur Zeit t_2 zurück, so beziehen sich die gewonnenen Koordinaten x, y, z des Gegenstandes $\left(\text{sowie der Abstand } r = c\,\frac{t_2 - t_1}{2}\right)$ auf den Zeitpunkt $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$. Diese Definition entspricht der naheliegenden Annahme, daß die Lichtgeschwindigkeit „hin" und „zurück" die gleiche ist.

Wir haben festgestellt, daß man — ausgehend von einer bestimmten Basis, die mit Maßstäben und Uhren (sowie mit den übrigen notwendigen Geräten) versehen ist, — die Lage von Körpern im Raum (in bezug auf diese Basis) messen und die gewonnenen Koordinatenwerte (beispielsweise die kartesischen Werte x, y, z) auf einen bestimmten Zeitpunkt t (nach den Uhren der Basis) beziehen kann. Eine solche Basis werden wir im folgenden als „Bezugssystem" bezeichnen. Das Wort „Basis" wollen wir dann verwenden, wenn hervorgehoben werden soll, daß die Koordinaten keinem „mit dem Raum verschmolzenen" Koordinatennetz angehören, und daß die Zeit keine „Weltzeit" ist, sondern daß das Bezugssystem stets an Maßstäbe und Uhren gebunden ist, die sich an einem bestimmten Ort befinden und in bestimmter Weise bewegen. (Auf diese Tatsache wurde bereits am Schluß des § 1 hingewiesen.)

§ 3 Das Ausbreitungsgesetz für eine elektromagnetische Wellenfront

Die Gesetze der Lichtausbreitung im Vakuum sind gut bekannt. Sie finden ihren Ausdruck in den MAXWELLschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0; \\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3,01}$$

Dabei sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Vektoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke. Uns interessiert jedoch nicht der allgemeine Fall der Lichtausbreitung, sondern nur die Fortpflanzung eines Signals, das mit der maximalen Geschwindigkeit fortschreitet, d. h. die Ausbreitung einer Wellenfront. Vor der Front der

Welle sind alle Feldkomponenten gleich Null, dahinter sind einige von ihnen von Null verschieden. In der Wellenfront erleiden also einige Feldkomponenten einen Sprung.

Betrachten wir andererseits eine Hyperfläche im Raum-Zeit-Kontinuum (d. h. eine Fläche, die sich im Raume bewegt, vgl. § 35). Bei Vorgabe des Feldes auf dieser Hyperfläche werden durch die MAXWELLschen Gleichungen im allgemeinen auch die Werte der Ableitungen der Feldgrößen auf derselben festgelegt. Damit wird auch der Wert des Feldes auf einer infinitesimal benachbarten Hyperfläche bestimmt, und Unstetigkeiten des Feldes werden unmöglich. Das ist nur dann nicht der Fall, wenn die gegebene Fläche (ihrer Form und Bewegung nach) bestimmten Bedingungen genügt, die es verhindern, daß die Werte der Ableitungen durch die der Feldstärken festgelegt werden. Eine solche Fläche nennt man eine charakteristische Fläche oder kurz eine Charakteristik. Unstetigkeiten der Felder sind also nur auf einer Charakteristik möglich. Da aber, wie wir sahen, an einer Wellenfront Sprünge auftreten, so muß jede Wellenfront eine Charakteristik sein.

Wir wollen nun die Gleichung der Charakteristik für das System der MAXWELLschen Gleichungen bestimmen.

Die Feldstärken seien für Raum- und Zeitpunkte gegeben, deren Koordinaten durch die Gleichung

$$t = \frac{1}{c} f(x, y, z) \tag{3,02}$$

verknüpft sind. Im speziellen Fall $f \equiv 0$ sind das die *Anfangswerte*. Wie schon erwähnt, läßt sich die Gleichung (3,02) als Gleichung einer Hyperfläche in einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum auffassen, oder auch (strenggenommen nur für $(\mathrm{grad}\, f)^2 > 1$, s. § 35) als Gleichung einer gewöhnlichen Fläche, die sich im Raum bewegt.

Auf der Hyperfläche (3,02) seien die Werte einer Funktion

$$u\left(x, y, z, \frac{f}{c}\right) = u_0(x, y, z) \tag{3,03}$$

vorgegeben. Damit sind auf dieser Hyperfläche auch folgende Kombinationen der Ableitungen nach den Koordinaten und der Zeit gegeben:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3,04}$$

Die Variablen x, y, z bezeichnen wir hier mit x_1, x_2, x_3. Ist außerdem die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ gegeben, so sind auch die Werte aller ersten Ableitungen der Funktion u nach den Koordinaten und der Zeit auf der Hyperfläche bekannt.

Als Funktion u wählen wir nun eine der Komponenten des elektromagnetischen Feldes, etwa E_x, und bezeichnen den Wert dieser Komponente auf der Hyperfläche mit $E_x^0 = E_x^0(x, y, z)$. Analoge Bezeichnungen (mit dem oberen Index 0) führen wir für die übrigen Komponenten ein. Ist das Feld auf der Hyperfläche

gegeben, so können wir alle Größen $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{H}^0$ als bekannte Funktionen der Koordinaten x, y, z ansehen. Analog zu (3,04) haben wir dann z. B.

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial E_x^0}{\partial z} \quad \text{usw.} \tag{3,05}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right) = \operatorname{Div} \mathfrak{E}^0, \tag{3,06}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\operatorname{grad} f \times \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right] = \operatorname{Rot} \mathfrak{E}^0 \tag{3,07}$$

und ebenso

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} + \frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right) = \operatorname{Div} \mathfrak{H}^0, \tag{3,08}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} + \frac{1}{c}\left[\operatorname{grad} f \times \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right] = \operatorname{Rot} \mathfrak{H}^0. \tag{3,09}$$

In den letzten Formeln haben wir die Operationen div und rot, angewandt auf $\mathfrak{E}^0$ und $\mathfrak{H}^0$, mit großen Buchstaben bezeichnet (Div, Rot).

Die gegebenen sechs Funktionen $\mathfrak{E}^0$ und $\mathfrak{H}^0$ sind nicht unabhängig voneinander, sondern müssen zwei Bedingungen genügen, die wir jetzt ableiten wollen.

Multiplizieren wir die Gleichungen (3,07) und (3,09) skalar mit grad f, so erhalten wir unter Benutzung der MAXWELLschen Gleichungen

$$(\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Rot} \mathfrak{E}^0) = -\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right), \tag{3,10}$$

$$(\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Rot} \mathfrak{H}^0) = \frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right). \tag{3,11}$$

Auf der linken Seite der Identitäten (3,08) und (3,06) verschwinden die ersten Glieder infolge der MAXWELLschen Gleichungen, und die zweiten Glieder sind mit den rechten Seiten der Gleichungen (3,10) und (3,11) identisch. Wir erhalten also

$$\operatorname{Div} \mathfrak{H}^0 + (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Rot} \mathfrak{E}^0) = 0, \tag{3,12}$$

$$\operatorname{Div} \mathfrak{E}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{Rot} \mathfrak{H}^0) = 0. \tag{3,13}$$

Diesen Beziehungen müssen also die gegebenen Funktionen $\mathfrak{E}^0$ und $\mathfrak{H}^0$ genügen. Für $f = \text{const}$ sind $\mathfrak{E}^0$ und $\mathfrak{H}^0$ gewöhnliche Anfangswerte, und die Bedingungen reduzieren sich dann auf die triviale Forderung, daß auch im Anfangszeitpunkt die Gleichungen $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ gelten müssen.

Unter Benutzung der MAXWELLschen Gleichungen können wir (3,07) und (3,09) in der Form

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \left[\operatorname{grad} f \times \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right] = c \operatorname{Rot} \mathfrak{H}^0, \tag{3,14}$$

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \left[\operatorname{grad} f \times \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right] = c \operatorname{Rot} \mathfrak{E}^0 \tag{3,15}$$

schreiben.

Multiplizieren wir diese Gleichungen vektoriell mit grad f und benutzen die oben abgeleiteten Beziehungen, so bekommen wir

$$(1 - (\operatorname{grad} f)^2)\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \dot{\mathfrak{E}}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \dot{\mathfrak{E}}^0) \operatorname{grad} f - [\operatorname{grad} f \times \dot{\mathfrak{H}}^0]; \tag{3,16}$$

$$(1 - (\operatorname{grad} f)^2)\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \dot{\mathfrak{H}}^0 - (\operatorname{grad} f \cdot \dot{\mathfrak{H}}^0) \operatorname{grad} f + [\operatorname{grad} f \times \dot{\mathfrak{E}}^0]. \tag{3,17}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\dot{\mathfrak{E}}^0 = c \operatorname{Rot} \mathfrak{H}^0; \qquad \dot{\mathfrak{H}}^0 = -c \operatorname{Rot} \mathfrak{E}^0. \tag{3,18}$$

Auf der rechten Seite von (3,16) und (3,17) stehen bekannte Funktionen. Diese Gleichungen können nach den zeitlichen Ableitungen aufgelöst werden, wenn deren Koeffizient, also die Größe $1 - (\operatorname{grad} f)^2$, von Null verschieden ist. In diesem Fall liefern aber Formeln, die analog zu (3,05) gebaut sind, auch für alle übrigen ersten Ableitungen der Feldstärken endliche Werte, und infolgedessen ist das Feld selbst auf der Fläche (3,02) stetig. Damit also dort ein Sprung auftreten kann, muß der Koeffizient der zeitlichen Ableitung verschwinden. Dies führt zu der Beziehung

$$(\operatorname{grad} f)^2 = 1. \tag{3,19}$$

Wenn sie erfüllt ist, so ist die gegebene Fläche eine Charakteristik. Schreiben wir die Gleichung der Fläche in der impliziten Form

$$\omega(x, y, z, t) = 0, \tag{3,20}$$

so lautet die Charakteristikengleichung (3,19)

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - (\operatorname{grad} \omega)^2 = 0. \tag{3,21}$$

Die Ausbreitung einer elektromagnetischen Wellenfront ist also der Gleichung (3,21) unterworfen.

Insbesondere genügen der Gleichung (3,19) oder (3,21) die Funktionen

$$t = \frac{1}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z), \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1); \tag{3,22}$$

$$t = t_0 + \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{3,23}$$

Die erste liefert eine ebene, die zweite eine Kugelwelle.

§ 4 Die Gleichungen für die Strahlen

Die Gleichung für die Ausbreitung der Wellenfront läßt sich schreiben

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 0. \tag{4,01}$$

(Der Bestimmtheit halber haben wir das positive Vorzeichen der Wurzel gewählt.) Sie hat die gleiche Form wie die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung der Mechanik, wenn man die Größe ω als Wirkungsfunktion S und die Ableitungen ω_x, ω_y, ω_z, als „Impulse" p_x, p_y, p_z ansieht. Der HAMILTON-Funktion entspricht dann der Ausdruck

$$H = c\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \tag{4,02}$$

und die Bahnen sind die Lichtstrahlen. Die Gleichungen für die Strahlen sind den HAMILTONschen Gleichungen analog. Sie lauten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \omega_x} = c\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}} \text{ usw.;} \tag{4,03}$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \text{ usw.} \tag{4,04}$$

Wie die Gleichungen (4,04) zeigen, sind die Größen ω_x, ω_y, ω_z längs eines Strahles konstant (von Strahl zu Strahl können sie sich natürlich ändern). Hieraus folgt, daß die Strahlen durch die Geraden

$$x - x_0 = c\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}(t - t_0) \quad \text{usw.} \tag{4,05}$$

gegeben werden.

Bei einer Vorzeichenänderung von ω (und damit auch von ω_x, ω_y, ω_z) kehrt sich die Strahlrichtung um. Das Vorzeichen von ω muß in Übereinstimmung mit der gegebenen Richtung (Orientierung) des Strahls gewählt werden.

Man kann sich jede Wellenfläche aus Punkten zusammengesetzt denken, die sich mit Lichtgeschwindigkeit längs der Strahlen (4,05) bewegen. Hierdurch erhält man die Möglichkeit, die Wellenfläche für den Zeitpunkt t zu konstruieren, wenn ihre Form für einen Zeitpunkt t_0 bekannt ist. Die Gleichung der Wellenfläche zur Zeit t_0 laute

$$\omega^0(x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{4,06}$$

wobei x_0, y_0, z_0 die laufenden Koordinaten auf der Fläche sind. Kennen wir die Gleichung der Fläche, so können wir auch die Größen

$$\alpha(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\omega_x^0}{\sqrt{\omega_x^{0^2} + \omega_y^{0^2} + \omega_z^{0^2}}}\right)_0 \quad \text{usw.} \tag{4,07}$$

berechnen, wobei sich das Vorzeichen der rechten Seite aus der gegebenen Richtung der Wellenausbreitung ergibt. Die Gleichung eines Strahles, der durch den Punkt x_0, y_0, z_0 der Ausgangswellenfläche geht, lautet

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= c\alpha\,(t - t_0), \\ y - y_0 &= c\beta\,(t - t_0), \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1). \\ z - z_0 &= c\gamma\,(t - t_0) \end{aligned}\right\} \tag{4,08}$$

Die Größen x, y, z geben die Lage desjenigen Punktes an, in welchem der Punkt x_0, y_0, z_0 zur Zeit t angelangt ist. Durchlaufen die Größen x_0, y_0, z_0 alle Wertetripel, die der Gleichung $\omega^0 = 0$ genügen, so ergeben sich aus (4,08) alle Punkte, die zur Zeit t auf der Wellenfläche liegen.

Lösen wir die Gleichungen (4,08) nach x_0, y_0, z_0 auf und setzen die Funktionen

$$x_0 = x_0(x, y, z, t - t_0) \quad \text{usw.} \tag{4,09}$$

in die Gleichung $\omega^0 = 0$ für die Wellenfläche ein, so erhalten wir die Beziehung

$$\omega(x, y, z, t - t_0) = 0, \tag{4,10}$$

d. h. die Gleichung für die Wellenfläche zur Zeit t. Für $t = t_0$ ist offenbar $x_0 = x$, $y_0 = y$, $z_0 = z$, und die Gleichung (4,10) geht in (4,06), d. h. in die vorgegebene Gleichung der Ausgangswellenfläche über.

Aus den Strahlengleichungen (4,05) ergibt sich folgende Beziehung zwischen den Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes jedes Strahls

$$c^2(t - t_0)^2 - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] = 0\,. \tag{4,11}$$

Diese Gleichung stellt eine Kugel dar mit dem Mittelpunkt x_0, y_0, z_0 und dem Radius $R = c(t - t_0)$, der linear mit der Zeit anwächst. Das drückt ebenso wie die Ausgangsgleichung (3,21) die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit aus.

Für infinitesimal benachbarte Punkte lautet die Beziehung (4,11)

$$c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0. \tag{4,12}$$

In dieser Form ergibt sie sich unmittelbar aus den HAMILTONschen Gleichungen (4,03).

Eine ausführlichere Darstellung der mathematischen Theorie der Charakteristiken findet man z. B. bei SMIRNOW [10].

§ 5 Inertialsysteme

In § 2 haben wir erklärt, was ein Bezugssystem ist. Wir betonten, daß es an eine bestimmte, mit Maßstäben und Uhren versehene Basis gebunden ist, die man sich ganz grob als Funkortungsstation vorstellen kann. Jedenfalls besteht die „Basis“ aus gewissen materiellen Körpern, die irgendwie im Raum angeordnet und orientiert sind und sich irgendwie bewegen.

Jede Erscheinung, speziell die Lichtausbreitung und die Bewegung von materiellen Körpern, wird in einem bestimmten Bezugssystem, d. h. in bezug

auf eine bestimmte Basis beschrieben. Man benutzt zum Beispiel zur Beschreibung der Planetenbewegung das heliozentrische Bezugssystem, dessen Koordinatenanfangspunkt (die Lage der gedachten Basis) im Schwerpunkt des Sonnensystems liegt und dessen Koordinatenachsen auf drei Fixsterne zeigen (Orientierung der Basis).

In verschiedenen Bezugssystemen ist die mathematische Form der Naturgesetze im allgemeinen verschieden. Zur Beschreibung der Bewegung von Körpern bezüglich der Erde kann man z. B. sowohl ein Bezugssystem benutzen, dessen Achsen auf drei Fixsterne gerichtet sind, als auch ein Bezugssystem, dessen Achsen fest mit der Erde verbunden sind. Im letzten Fall muß man in die Bewegungsgleichungen auch die CORIOLIS-Kräfte einführen.

Es gibt Bezugssysteme, in denen die Bewegungsgesetze eine besonders einfache Form haben und die (in gewissem Sinne) der Natur am besten entsprechen. Wir meinen die Inertialsysteme, in denen sich ein Körper bei Abwesenheit äußerer, auf ihn einwirkender Kräfte geradlinig und gleichförmig bewegt. (Hier erhebt sich freilich die Frage, wie man sich davon überzeugen kann, daß keine Kräfte auf den Körper wirken. Wir werden annehmen, daß das dann der Fall ist, wenn alle Körper, von denen Kräfte ausgehen könnten, genügend weit von dem betrachteten Körper entfernt sind.) Mit sehr großer Genauigkeit ist das heliozentrische Bezugssystem ein Inertialsystem. In einem Inertialsystem werden wir fast immer kartesische Koordinaten benutzen, da sich dann die Gesetze der euklidischen Geometrie und der Mechanik (insbesondere die Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit der Bewegung eines Körpers, auf den keine Kräfte wirken) am einfachsten ausdrücken lassen. Der Begriff des Inertialsystems an sich läßt aber natürlich auch den Übergang zu beliebigen anderen (krummlinigen) Koordinaten zu. Wenn die Formeln für diesen Übergang die Zeit nicht explizit enthalten, so kann man annehmen, daß sich die ursprünglichen und die transformierten Koordinaten auf das gleiche Inertialsystem beziehen.

In der vorrelativistischen Physik wurde der Begriff des Inertialsystems nur mit den Gesetzen der Mechanik verknüpft. Das erste NEWTONsche Gesetz ist in der Tat nichts anderes als eine Definition dieses Begriffes. Wir haben aber gesehen, daß bei der Definition der Begriffe, die sich auf Raum und Zeit beziehen, die Gesetze der Lichtausbreitung eine grundlegende Rolle spielen. Es ist daher richtiger, den Begriff des Inertialsystems nicht nur mit den Gesetzen der Mechanik, sondern auch mit denen der Lichtausbreitung zu verknüpfen.

Die übliche Form der MAXWELLschen Gleichungen bezieht sich jedenfalls auf ein Inertialsystem (das wurde auch vor der Relativitätstheorie angenommen). Es ist selbstverständlich, daß mindestens ein Bezugssystem existiert, welches ein Inertialsystem im Sinne der Mechanik darstellt und in dem gleichzeitig die MAXWELLschen Gleichungen gelten. Auf dieses Inertialsystem bezieht sich auch das in der Form

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \tag{5,01}$$

geschriebene Ausbreitungsgesetz für eine elektromagnetische Wellenfront.

Ein Bezugssystem, in dem die Ausbreitung einer elektromagnetischen Wellenfront durch ein Gesetz von der Form (5,01) beschrieben wird, kann man als

Inertialsystem im elektromagnetischen Sinne bezeichnen. Als Inertialsystem schlechthin werden wir ein Bezugssystem bezeichnen, das sowohl im mechanischen als auch im elektromagnetischen Sinne ein Inertialsystem ist.

Nach dieser Definition ist also ein Inertialsystem durch die folgenden beiden Eigenschaften gekennzeichnet:

1. In einem Inertialsystem bewegt sich ein kräftefreier Körper geradlinig und gleichförmig (Inertialsystem im üblichen, mechanischen Sinne).

2. In einem Inertialsystem hat die Gleichung für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Wellenfront die Form (5,01) (Inertialsystem hinsichtlich des Feldes).

Wir haben hier vom Ausbreitungsgesetz einer *elektromagnetischen* Wellenfront gesprochen und damit das elektromagnetische Feld vor anderen Feldern ausgezeichnet. Diese Auszeichnung ist nur eine scheinbare. In Wirklichkeit muß die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit für beliebige Felder ein und denselben Wert haben; infolgedessen hat die Gleichung (5,01) universellen Charakter. Auf diese Frage werden wir im nächsten Paragraphen näher eingehen.

§ 6 Die grundlegenden Sätze der Relativitätstheorie

Das Grundpostulat der Relativitätstheorie (auch als Relativitätsprinzip bezeichnet) behauptet die Unabhängigkeit der Erscheinungen von einer unbeschleunigten Translationsbewegung des abgeschlossenen Systems, in welchem sie ablaufen [8].

Versuchen wir, den Inhalt dieses Postulates näher zu erklären. Gegeben sei ein abgeschlossenes System materieller Körper, innerhalb dessen sich mechanische, elektromagnetische und beliebige andere Vorgänge abspielen. Den Zustand dieses Systems (einschließlich der Felder elektromagnetischer und sonstiger Natur, die es umfaßt) wollen wir in verschiedenen Bezugssystemen beschreiben. Wir beziehen ihn also auf verschiedene „Basen“ im Sinne von § 2. Wir betrachten zwei solche Basen.[1]) Die erste Basis entspreche einem Inertialsystem, die zweite bewege sich relativ zur ersten geradlinig und gleichförmig. Wir legen den Anfangszustand des Systems in bezug auf die erste Basis fest (mit dem Wort „Anfangszustand“ meinen wir hier „den Zustand zum Anfangszeitpunkt nach den Uhren der gegebenen Basis“). Wir denken uns nun ein zweites Exemplar unseres materiellen Systems, dessen Anfangzustand bezüglich der zweiten Basis genau identisch mit dem Anfangszustand des ersten Exemplars bezüglich der ersten Basis sein soll. Der Anfangszeitpunkt wird dabei natürlich im Sinne der entsprechenden Basis definiert. Man kann dann nach dem weiteren Ablauf der Vorgänge im ersten Exemplar des Systems in bezug auf die erste Basis, verglichen mit dem Ablauf der Vorgänge im zweiten Exemplar, bezogen auf die zweite Basis fragen.

Das Relativitätsprinzip behauptet dann, daß in beiden Fällen die Vorgänge in völlig identischer Weise ablaufen (sofern sie überhaupt determiniert sind).

---

[1]) Damit das „System der Körper“ nicht mit dem „Bezugssystem“ verwechselt wird, wollen wir hier statt „Bezugssystem“ lieber „Basis“ sagen.

Wird ein Prozeß im ersten Exemplar des Systems durch gewisse Funktionen der Koordinaten und der Zeit der ersten Basis beschrieben, so wird der entsprechende Prozeß im zweiten System durch *die gleichen Funktionen* der Koordinaten und der Zeit der zweiten Basis gekennzeichnet.

Weniger exakt, aber anschaulicher kann man sagen, daß *eine geradlinige gleichförmige Bewegung eines materiellen Systems als Ganzes ohne Einfluß auf den Ablauf der Prozesse innerhalb des Systems ist.*

Viele Naturgesetze, die den Ablauf der verschiedenen physikalischen Vorgänge regeln, werden mit Hilfe von Differentialgleichungen formuliert, deren Form nicht vom Anfangszustand des Systems abhängt; die Anfangsbedingungen werden nachträglich hinzugefügt. So ist es zum Beispiel bei den Bewegungsgleichungen der Mechanik, den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes und den damit zusammenhängenden Gleichungen für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Wellenfront. Aus dem Relativitätsprinzip folgt dann, daß die mathematische Form dieser Gesetze im ursprünglichen Inertialsystem dieselbe sein muß wie in jedem anderen Bezugssystem, das sich gegen das erstere geradlinig und gleichförmig bewegt. Erinnern wir uns an die obige Definition eines Inertialsystems (Inertialsystem sowohl im mechanischen Sinne als auch im Bezug auf Felder), so können wir daraus folgenden wichtigen Schluß ziehen: *Ist ein Inertialsystem gegeben, so ist jedes andere Bezugssystem, das sich geradlinig und gleichförmig gegen dieses bewegt, ebenfalls ein Inertialsystem.* Dieser Satz bildet die Grundlage für die Ableitung der Formeln, welche die Koordinaten und die Zeit zweier unbeschleunigt gegeneinander bewegter Bezugssysteme verknüpfen.

Das Relativitätsprinzip wird durch die Gesamtheit unserer Kenntnisse von der Natur bestätigt. Im Gebiet der Mechanik ist es schon lange als GALILEIsches Relativitätsprinzip bekannt. EINSTEINs Verdienst besteht darin, daß er dieses Prinzip auf alle Erscheinungen (in erster Linie auf die elektromagnetischen) verallgemeinert und daraus Folgerungen über die Natur und den Zusammenhang von Raum und Zeit gezogen hat.

Die Relativitätstheorie läßt sich auf zwei Postulaten aufbauen, nämlich dem Relativitätsprinzip und dem Prinzip, daß die Geschwindigkeit des Lichtes von der seiner Quelle unabhängig ist. Das zweite dieser Prinzipien haben wir schon ganz zu Anfang berücksichtigt, da wir unserem Aufbau der Theorie das Gesetz der Ausbreitung einer elektromagnetischen Wellenfront zugrunde gelegt haben. Die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Lichtquelle folgt unmittelbar aus diesem Gesetz.

Es ist hier angebracht, eine erweiterte Deutung des Ausbreitungsgesetzes für eine Wellenfront zu geben und den folgenden allgemeinen Satz zu formulieren: *Es gibt eine Grenzgeschwindigkeit für die Ausbreitung einer beliebigen Wirkung. Diese Geschwindigkeit ist zahlenmäßig gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.*

Die Bedeutung dieses Prinzips liegt darin, daß bei der Festlegung der Begriffe, die sich auf Raum und Zeit beziehen, die Übertragung von Signalen mit der maximal möglichen Geschwindigkeit eine grundlegende Rolle spielt. Auf die Existenz einer solchen Grenzgeschwindigkeit für Signale stützt sich schon der Begriff des Bezugssystems, das zur Beschreibung der Erscheinungen in Raum und Zeit dient. In § 2 betrachteten wir Methoden zur Bestimmung der Lage von

Körpern im Raum, die auf der Anwendung von Licht- und allgemein elektromagnetischen Signalen beruhen. Prinzipiell ist jedoch auch eine Signalübertragung möglich, die sich nicht elektromagnetischer Wellen, sondern Wellen anderer Natur bedient. Man könnte sich beispielsweise eine Signalübertragung vorstellen, die auf der Benutzung extrem schneller Teilchen und der ihnen im Sinne der Quantenmechanik entsprechenden Materiewellen beruht. Denkbar (wenn auch praktisch kaum zu verwirklichen) wäre auch die Verwendung von Gravitationswellen, deren Existenz aus der EINSTEINschen Theorie folgt (vgl. § 90). Ferner ist nicht ausgeschlossen, daß noch irgendwelche neue Felder entdeckt werden, die sich zur Signalübertragung eignen. Man muß also fragen: Ist der Begriff des Bezugssystems, der sich lediglich auf die Benutzung von Lichtsignalen stützt, allgemein genug? Wenn es Signale mit höherer Geschwindigkeit oder sogar unendlich schnelle Signale gäbe, so könnte der Begriff des Bezugssystems, der auf den Gesetzen der Lichtausbreitung beruht, die Eigenschaften von Raum und Zeit nicht mit der erforderlichen Allgemeinheit wiedergeben, sondern wäre bestenfalls nur einer der vielen möglichen.

Durch das oben formulierte Prinzip der Existenz einer allgemeinen Grenze für die Übertragungsgeschwindigkeiten beliebiger Wirkungen und Signale wird der Lichtgeschwindigkeit eine universelle Bedeutung zuerkannt, die sich nicht auf spezielle Eigenschaften des Agens stützt, welches die Signale überträgt, sondern eine objektive Eigenschaft von Raum und Zeit wiedergibt.

Dieses Prinzip steht in logischem Zusammenhang mit dem Relativitätsprinzip. Gäbe es nämlich keine einheitliche Grenzgeschwindigkeit und würden sich also die verschiedenen Agenzien (beispielsweise Licht und Schwerkraft) im Vakuum mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten, so wäre das Relativitätsprinzip mindestens für eines dieser Agenzien verletzt. Mathematisch läßt sich das Prinzip der Existenz einer universellen Grenzgeschwindigkeit folgendermaßen präzisieren: *Die Gleichung für die Ausbreitung einer Wellenfront beliebiger Art, die mit der Grenzgeschwindigkeit fortschreitet und sich zur Signalübermittlung eignet, ist identisch mit der Gleichung für die Ausbreitung einer Lichtwellenfront im Vakuum.*

Somit bekommt die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - (\operatorname{grad} \omega)^2 = 0 \tag{6,01}$$

einen universellen Charakter. Sie ist allgemeiner als die MAXWELLschen Gleichungen, aus denen wir sie abgeleitet haben. Auf Grund des eben formulierten Prinzips der Existenz einer universellen Grenzgeschwindigkeit können wir sagen: Die Differentialgleichungen für ein beliebiges Feld, das sich zur Signalübermittlung eignet, müssen so beschaffen sein, daß die entsprechenden Charakteristikengleichungen mit der für die Lichtwelle geltenden übereinstimmen.[1])

Wie wir in den Kapiteln V—VII sehen werden, ändert die Anwesenheit eines Gravitationsfeldes die Form der Charakteristikengleichung, so daß diese etwas

[1]) Eine der unseren verwandte Formulierung der Grundlagen der Relativitätstheorie als Theorie der „absoluten“ Eigenschaften von Raum und Zeit findet man in den Arbeiten von ALEXANDROW [3], [4], sowie in den Arbeiten von FOKKER [2] über „Chronogeometrie“.

von (6,01) abweicht. Aber auch dann liefert ein und dieselbe Charakteristikengleichung das Ausbreitungsgesetz einer Wellenfront für Wellen beliebiger Natur, die mit der Grenzgeschwindigkeit fortschreiten, u. a. für Licht- und Gravitationswellen.

Die Gleichung (6,01) legten wir (zusammen mit der Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit der kräftefreien Bewegung eines Körpers) der Definition des Inertialsystems zugrunde. Das oben formulierte Prinzip, das die Universalität dieser Gleichung behauptet, zeigt, daß diese Definition des Inertialsystems tatsächlich zweckmäßig ist.

§ 7 Die GALILEI-Transformation und die Notwendigkeit ihrer Verallgemeinerung

Eine bestimmte Erscheinung werde in zwei Bezugssystemen beschrieben. Das eine sei ein Inertialsystem, während das andere sich relativ dazu geradlinig und gleichförmig bewegen soll, nach dem Relativitätsprinzip also ebenfalls ein Inertialsystem ist. Man kann nun die Frage stellen, wie die Beschreibung der Erscheinung in dem einen System in diejenige bezüglich des anderen Systems zu übersetzen ist. Als grobe Veranschaulichung stelle man sich etwa zwei Funkortungsstationen vor, von denen sich die eine auf dem Erdboden, die andere in einem Flugzeug befindet. Das Problem besteht dann in einer Umrechnung der Angaben der einen Apparatur in die der anderen.

Für eine solche Umrechnung ist vor allem die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen den Koordinaten und der Zeit x, y, z, t in dem einen Bezugssystem und den Koordinaten und der Zeit x', y', z', t' in dem anderen System notwendig. Die alte Physik nahm als selbstverständlich die Existenz einer einheitlichen Weltzeit t an, die in allen Bezugssystemen die gleiche ist. Vom Standpunkt der alten Physik hat man also $t' = t$ zu setzen oder höchstens noch eine Änderung des Zeitnullpunktes zuzulassen.

Betrachtet man zwei Ereignisse, die zu den Zeitpunkten t und τ stattfinden, so hat das Zeitintervall zwischen ihnen (vom Standpunkt der alten Physik) in allen Bezugssystemen den gleichen Wert. Es ist also

$$t - \tau = t' - \tau' . \tag{7,01}$$

Ferner sah es die alte Physik als selbstverständlich an, daß sich für die Länge eines starren Stabes, gemessen in zwei Bezugssystemen, der gleiche Wert ergeben muß. (Statt der Länge eines starren Stabes kann man auch den Abstand zwischen zwei „gleichzeitigen" Lagen zweier Massenpunkte betrachten, die nicht notwendig durch einen starren Stab verbunden sein müssen.) Bezeichnet man die Koordinaten des Anfangs und des Endes des Stabes (oder die Koordinaten der beiden Massenpunkte) in dem einen Bezugssystem mit (x, y, z) und (ξ, η, ζ) und in dem anderen Bezugssystem mit (x', y', z') und (ξ', η', ζ'), so muß nach der alten Physik gelten

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = (x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 + (z' - \zeta')^2 . \tag{7,02}$$

Aus (7,01) und (7,02) ergibt sich eindeutig die allgemeine Form der Transformation, welche die Koordinaten und die Zeit x, y, z, t mit den Koordinaten und

der Zeit x', y', z', t' verknüpft. Diese Transformation besteht in einer Verschiebung des Nullpunktes der Koordinaten und der Zeit, einer Drehung der räumlichen Koordinatenachsen und einer Transformation von der Form

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - V_x t, \\ y' &= y - V_y t, \\ z' &= z - V_z t, \\ t' &= t. \end{aligned}\right\} \qquad (7{,}03)$$

Hierbei sind V_x, V_y, V_z Konstanten, deren physikalische Bedeutung leicht zu ersehen ist: Es sind die Komponenten der Geschwindigkeit des „gestrichenen" Koordinatensystems gegenüber dem „ungestrichenen" (genauer, die Komponenten dieser Geschwindigkeit im ungestrichenen System). Die Transformation (7,03) wird als GALILEI-Transformation bezeichnet.

Ist also ein Inertialsystem (x, y, z, t) gegeben, so sind nach der alten Physik die Koordinaten und die Zeit eines beliebigen anderen Bezugssystems, das sich gleichförmig und geradlinig gegenüber dem Inertialsystem bewegt, mit den x, y, z, t (bis auf eine Verschiebung des Nullpunktes und eine Drehung der Achsen) durch eine GALILEI-Transformation verknüpft.

Die GALILEI-Transformation genügt dem Relativitätsprinzip hinsichtlich der Gesetze der Mechanik (wir sprechen hier von der NEWTONschen Mechanik), aber nicht hinsichtlich der Gesetze der Lichtausbreitung. Tatsächlich ändert die Gleichung für die Ausbreitung einer Lichtwellenfront bei einer GALILEI-Transformation ihre Form. Wäre die GALILEI-Transformation richtig (und das Relativitätsprinzip in seiner allgemeinen Form falsch), so gäbe es nur ein einziges Inertialsystem im Sinne unserer Definition. Die geänderte Form der Gleichung für die Wellenfront würde es dann ermöglichen, die Geschwindigkeit (selbst bei einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung) jedes anderen Bezugssystems gegenüber dem ausgezeichneten Inertialsystem (dem „ruhenden Äther") zu bestimmen. Das negative Ergebnis zahlreicher, äußerst genauer Experimente, die den Nachweis dieser Relativbewegung zum Ziel hatten, beseitigte alle Zweifel daran, daß das Ausbreitungsgesetz für eine Wellenfront in allen nichtbeschleunigten Bezugssystemen die gleiche Form hat und daß folglich das Relativitätsprinzip jedenfalls auch für elektromagnetische Erscheinungen gilt.

Hieraus ergibt sich, daß die GALILEI-Transformation nicht allgemein richtig sein kann und durch eine andere ersetzt werden muß. Die in den vorangegangenen Paragraphen formulierten allgemeinen Sätze enthalten alles Notwendige zur Ableitung derjenigen Transformation der Koordinaten und der Zeit, welche an die Stelle der GALILEI-Transformation treten muß.

Wir können unsere Aufgabe folgendermaßen formulieren: Gegeben sei ein Bezugssystem, das im Sinne unserer Definition, d. h. im mechanischen und elektromagnetischen Sinne (vgl. § 5) ein Inertialsystem ist. Die Koordinaten und die Zeit dieses Systems nennen wir x, y, z, t. Ferner sei ein weiteres Bezugssystem gegeben (dessen Koordinaten und Zeit x', y', z', t' heißen mögen), das ebenfalls ein Inertialsystem ist. Zu ermitteln ist der Zusammenhang zwischen den Größen (x, y, z, t) und (x', y', z', t').

Das Problem besteht also in der Ermittlung des Zusammenhanges zwischen den Koordinaten und den Zeiten in zwei Inertialsystemen. Dieses Problem ist aber rein mathematischer Natur; zu seiner Lösung braucht man keine weiteren physikalischen Annahmen.

Wir zerlegen die Lösung dieses mathematischen Problems in zwei Schritte: Zunächst beweisen wir die Linearität der gesuchten Transformation und dann bestimmen wir ihre Koeffizienten.

Aus der Linearität der Transformation zwischen (x', y', z', t') und (x, y, z, t) folgt, daß die Bewegung des neuen Bezugssystems gegenüber dem alten eine geradlinige und gleichförmige ist. Umgekehrt folgt aus dem Relativitätsprinzip, daß ein Bezugssystem, welches sich gegenüber einem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig bewegt, selber ein Inertialsystem ist. Der zu beweisende Satz ist also mit dem Relativitätsprinzip eng verwandt.

§ 8 Beweis der Linearität einer Transformation, welche zwei Inertialsysteme verknüpft

Aus der ersten Bedingung, die die Inertialsysteme im mechanischen Sinne kennzeichnet, geht hervor, daß beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen die Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit einer Bewegung erhalten bleiben muß. Das bedeutet, daß bei Gültigkeit der Gleichungen

$$x = x_0 + v_x (t - t_0); \quad y = y_0 + v_y (t - t_0); \quad z = z_0 + v_z(t - t_0) \tag{8,01}$$

auch die Gleichungen

$$x' = x'_0 + v'_x(t' - t'_0); \quad y' = y'_0 + v'_y(t' - t'_0); \quad z' = z'_0 + v'_z (t' - t'_0) \tag{8,02}$$

erfüllt sein müssen. Die zweite Bedingung für ein Inertialsystem verlangt, daß aus der Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \tag{8,03}$$

die im ungestrichenen System gilt, die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t'}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z'}\right)^2\right] = 0 \tag{8,04}$$

für das gestrichene System folgt. Diese zweite Bedingung können wir aber auch in einer der ersten Bedingung analogen Form schreiben. Aus einer Gleichung von der Form (8,03) ergeben sich nämlich die Gleichungen (4,08) für die Strahlen, d. h. die geradlinige Ausbreitung des Lichtes mit konstanter Geschwindigkeit. Dies muß sowohl für das ungestrichene als auch für das gestrichene Bezugssystem zutreffen. Gilt also für den Schnittpunkt eines Lichtstrahls mit einer Wellenfläche

$$x = x_0 + v_x(t - t_0); \quad y = y_0 + v_y(t - t_0); \quad z = z_0 + v_z(t - t_0), \tag{8,05}$$

mit

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2,$$

so muß auch gelten

$$x' = x_0' + v_x'(t' - t_0'); \quad y' = y_0' + v_y'(t' - t_0'); \quad z' = z_0' + v_z'(t' - t_0'), \tag{8,06}$$

mit

$$v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = c^2.$$

Die zweite Bedingung reduziert sich also auf die Zusatzforderung, daß in den Gleichungen für eine geradlinige und gleichförmige Bewegung aus $v^2 = c^2$ auch $v'^2 = c^2$ folgen soll.

Unsere Aufgabe besteht in der Bestimmung der allgemeinsten Form der Funktionen

$$\left.\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z, t), \\ y' &= f_2(x, y, z, t), \\ z' &= f_3(x, y, z, t), \\ t' &= f_4(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \tag{8,07}$$

derart, daß aus den oben angegebenen Gleichungen für die ungestrichenen Größen Gleichungen derselben Form für die gestrichenen Größen folgen.[1])

Bevor wir an die Lösung dieses Problems gehen, wollen wir symmetrische Bezeichnungen einführen. Wir setzen

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3 \tag{8,08}$$

und führen statt der Zeit die ihr proportionale Größe

$$x_0 = ct \tag{8,09}$$

ein. Physikalisch bedeutet sie den Lichtweg, d. h. den Weg, den das Licht in der betreffenden Zeit durchläuft. (Bei dieser Bezeichnungsweise hat also x_0 nichts mehr mit dem Anfangswert der Koordinate x zu tun.) Die gesuchte Transformation schreiben wir in der Form

$$x_i' = f_i(x_0, x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{8,10}$$

Die Anfangswerte der Größen x_0, x_1, x_2, x_3 bezeichnen wir mit ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 und analog für die gestrichenen Größen. Wir führen noch eine beliebige positive Konstante γ_0 und den Parameter $s = \frac{c}{\gamma_0}(t - t_0)$ ein und setzen

$$\gamma_i = \gamma_0 \frac{v_i}{c} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{8,11}$$

Dann lassen sich die Gleichungen für eine geradlinig-gleichförmige Bewegung schreiben

$$x_i = \xi_i + \gamma_i s \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{8,12}$$

---

[1]) Dieses Problem wurde auch von Umow [5], [6] und Weyl [9] untersucht.

und unsere erste Bedingung besteht darin, daß aus den Gleichungen (8.12) die Gleichungen

$$x'_i = \xi'_i + \gamma'_i s' \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{8,13}$$

folgen müssen; dabei sind ξ'_i und γ'_i neue Konstanten und s' ein neuer Parameter (diese lassen sich durch die alten Größen ausdrücken, sobald die Form der Funktionen f_i gefunden ist). Die zweite Bedingung besteht darin, daß aus der Beziehung

$$\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0 \tag{8,14}$$

die Beziehung

$$\gamma_0'^2 - (\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + \gamma_3'^2) = 0 \tag{8,15}$$

folgen muß. Selbstverständlich müssen die Transformationsgleichungen (8,10) nach den alten Variablen x_0, x_1, x_2, x_3 auflösbar sein. Hierzu ist notwendig, daß die JACOBIsche Determinante der Transformation von Null verschieden ist:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| \neq 0. \tag{8,16}$$

Wir wollen nun die Gleichungen für die Funktionen f_i ableiten. Verstehen wir unter x_i die Ausdrücke (8,12), welche lineare Funktionen der Parameter s sind, so gilt

$$\frac{d f_i}{d s} = \sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \tag{8,17}$$

Die Ableitungen

$$\frac{d x'_i}{d x'_0} = \frac{\gamma'_i}{\gamma'_0} \tag{8,18}$$

müssen nach unserer Bedingung konstant sein. Es muß also gelten

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}} = \frac{\gamma'_i}{\gamma'_0} = \text{const.} \tag{8,19}$$

Setzen wir die logarithmische Ableitung dieses Ausdrucks nach s gleich Null, so ergibt sich

$$\frac{\sum\limits_{k,l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}} = \frac{\sum\limits_{k,l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_k \partial x_l}}{\sum\limits_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}}. \tag{8,20}$$

In dieser Gleichung sind die Argumente in den partiellen Ableitungen der Funktionen f_0 und f_i die Größen (8,12), die selbst von γ_i abhängen. Da aber die Größen

ξ_i in (8,12) willkürlich sind, können wir γ_i und x_i als unabhängige Variable auffassen. (Zum gleichen Schluß kommen wir, wenn wir in (8,20) $s = 0$ setzen und dann x_i statt ξ_i schreiben.) Die Gleichungen (8,20) müssen also identisch in γ_i und x_i erfüllt sein.

Die Ausdrücke (8,20) sind gebrochene rationale Funktionen von γ_i. Es gibt aber keine von Null verschiedene Werte der γ_k, bei denen alle Nenner in diesen Ausdrücken (d. h. alle vier Ausdrücke (8,17) für $i = 0, 1, 2, 3$) gleichzeitig verschwinden, denn die Determinante (8,16) ist stets von Null verschieden. Jeder der Brüche muß also immer endlich bleiben, selbst wenn sein Nenner verschwindet. Das kann jedoch nur dann der Fall sein, wenn der Zähler des Bruches durch den Nenner teilbar ist, so daß in Wirklichkeit die Ausdrücke (8,20) keine Brüche sind, sondern ganze rationale Funktionen der γ_k sein müssen. Diese schreiben wir in der Form

$$2 \sum_{l=0}^{3} \gamma_l \psi_l. \tag{8,21}$$

Damit wird

$$\sum_{k,l=0}^{3} \gamma_k \gamma_l \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = 2 \sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \sum_{l=0}^{3} \gamma_l \psi_l. \tag{8,22}$$

Da dies eine Identität in den γ_i ist, muß gelten

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \psi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \psi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \tag{8,23}$$

Wir kommen also zu folgendem Schluß: Damit eine geradlinige und gleichförmige Bewegung wieder in eine solche übergeht, müssen die Transformationsfunktionen f_i dem System partieller Differentialgleichungen (8,23) genügen, wobei die ψ_k irgendwelche Funktionen von x_0, x_1, x_2, x_3 sind.

Wir wollen nun die Bedingung ermitteln, der die Funktionen f_i genügen müssen, damit aus (8,14) die Beziehung (8,15) folgt. Wegen (8,19) ist die Beziehung (8,15) äquivalent mit

$$\left(\sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_0}{\partial x_k}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=0}^{3} \gamma_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)^2 = 0. \tag{8,24}$$

Diese Gleichung muß aus

$$\gamma_0^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0 \tag{8,14}$$

folgen. Da die linken Seiten von (8,24) und (8,14) quadratische Funktionen der γ_i sind, müssen sie einander proportional sein. Um die hieraus folgenden Formeln bequemer schreiben zu können, führen wir folgende vier Größen ein

$$e_0 = 1; \quad e_1 = e_2 = e_3 = -1 \tag{8,25}$$

und schreiben (8,24) und (8,14) in der Form

$$\sum_{i,k,l=0}^{3} e_i \gamma_k \gamma_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = 0, \tag{8,26}$$

$$\sum_{k=0}^{3} e_k \gamma_k^2 = 0. \tag{8,27}$$

Setzen wir die linke Seite von (8,26) proportional zur linken Seite von (8,27), so ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \lambda e_k \delta_{kl}. \tag{8,28}$$

Dabei ist λ eine Funktion von x_0, x_1, x_2, x_3 und das Symbol δ_{kl} hat die übliche Bedeutung

$$\delta_{kl} = 0 \text{ für } k \neq l; \; \delta_{kl} = 1 \text{ für } k = l. \tag{8,29}$$

Wir wollen aus der Bedingung (8,28) eine andere Bedingung ableiten und dieselbe mit (8,23) kombinieren. Differenzieren wir (8,28) nach x_m und setzen

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_m} = 2\lambda \varphi_m, \tag{8,30}$$

so erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_m} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) = 2\lambda \varphi_m e_k \delta_{kl}. \tag{8,31}$$

Benutzen wir die Ausdrücke (8,23) für die zweiten Ableitungen, sowie die Gleichungen (8,28), so bekommen wir aus (8,31)

$$e_k \psi_m \delta_{kl} + e_m \psi_k \delta_{lm} + 2 e_m \psi_l \delta_{mk} = 2 e_m \varphi_l \delta_{mk}. \tag{8,32}$$

Diese Relation muß für alle Werte von k, l, m gelten.

Setzen wir hier $k = m$, $l \neq m$, so ergibt sich

$$\psi_l = \varphi_l \quad (l = 0, 1, 2, 3). \tag{8,33}$$

Setzen wir dann in (8,32) $k = l$, so folgt $\varphi_m = 0$. Es ist also

$$\psi_l = \varphi_l = 0 \quad (l = 0, 1, 2, 3). \tag{8,34}$$

Dann ist die Größe λ nach (8,30) eine Konstante und die Gleichungen (8,23) für die f_i nehmen folgende Form an

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0. \tag{8,35}$$

Aus den beiden Bedingungen, die zusammen ein Inertialsystem kennzeichnen, folgt also notwendig, daß die Transformationsformeln zwischen den Koordinaten und Zeiten zweier Inertialsysteme linear sein müssen.

Die Frage, was man aus jeder dieser Bedingungen einzeln (d. h. aus der Gleichung (8,28) bzw. aus der Gleichung (8,23) allein) entnehmen kann, betrachten wir im Anhang A.

§ 9 Bestimmung der Koeffizienten der linearen Transformation und des Maßstab-Faktors

Die Gleichungen (8,28) für die Funktionen f_i enthalten den unbekannten konstanten Faktor λ. Um seinen Einfluß auf die Form der Transformation explizit zu berücksichtigen, schreiben wir unsere linearen Funktionen f_i folgendermaßen

$$x_i' = f_i = \sqrt{\lambda}\left(a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k\right). \tag{9,01}$$

Die Gleichungen (8,28) werden identisch in λ erfüllt, wenn die Koeffizienten a_{ik} den Beziehungen

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl} \tag{9,02}$$

genügen. Hieraus folgt, daß auch gelten muß

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ki} a_{li} = e_k \delta_{kl}. \tag{9,03}$$

Die Gleichungen (9,01) lassen sich nach den x_i auflösen. Wir erhalten:

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki}\left(\frac{x_k'}{\sqrt{\lambda}} - a_k\right). \tag{9,04}$$

Ferner ergibt sich

$$dx_0'^2 - (dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2) = \lambda[dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)] \tag{9,05}$$

und für eine beliebige Funktion ω

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0'}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3'}\right)^2\right] = \\ = \frac{1}{\lambda}\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right]\right\}. \tag{9,06}$$

Offenbar kennzeichnet der Faktor λ (genauer $\sqrt{\lambda}$) das Verhältnis des Maßstabes im gestrichenen zu dem im ungestrichenen Koordinatensystem. Es handelt sich um einen Faktor, der für alle Raumkoordinaten und für die Zeit derselbe ist, so daß eine Änderung weder die Winkel zwischen den Raumrichtungen noch die Geschwindigkeit beeinflußt. Wir wollen zeigen, daß dieser Faktor gleich Eins gesetzt werden muß.

Wir betrachten einen Punkt, der im gestrichenen Bezugssystem ruht. Die Geschwindigkeit dieses Punktes im ungestrichenen System liefert dann die

Geschwindigkeit des gestrichenen Systems gegenüber dem ungestrichenen. Die Komponenten dieser Geschwindigkeit (im ungestrichenen System) bezeichnen wir mit V_1, V_2, V_3. Es ist also

$$V_i = \frac{dx_i}{dt} = c\,\frac{dx_i}{dx_0} \qquad \text{für } dx_1' = dx_2' = dx_3' = 0\,. \tag{9,07}$$

Aus (9,04) ergibt sich aber

$$dx_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,a_{0i}\,dx_0'; \quad dx_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,a_{00}\,dx_0' \tag{9,08}$$

und damit

$$V_i = c\,\frac{a_{0i}}{a_{00}} \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{9,09}$$

Hieraus folgt zunächst, daß die Transformation (9,01), die den Zusammenhang zwischen den Koordinaten und den Zeiten in den beiden Inertialsystemen liefert, einem Übergang von dem gegebenen Bezugssystem zu einem anderen entspricht, das sich gegenüber dem ersteren geradlinig und gleichförmig bewegt, wie es auch sein muß.

Weiter folgt aus der Formel (9,09), daß die Relativgeschwindigkeit der Systeme mit dem Maßstab-Faktor λ nichts zu tun hat; dieser Faktor kann also nicht von der Relativgeschwindigkeit abhängen.[1]) Nimmt man nun für den Fall einer verschwindenden Relativgeschwindigkeit an, daß in beiden Bezugssystemen die Länge und das Zeitintervall in der gleichen Weise gemessen und in denselben Einheiten ausgedrückt werden, so erhält man sofort $\lambda = 1$. Unter dieser ganz natürlichen Annahme ist λ auch in jedem anderen Inertialsystem unabhängig von dessen Geschwindigkeit gleich Eins.

Wir können also unsere Formeln präzisieren, indem wir $\lambda = 1$ setzen. Statt (9,05) und (9,06) erhalten wir dann

$$dx_0'^2 - (dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2) = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{9,10}$$

und

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0'}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3'}\right)^2\right] = \\ = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right]. \tag{9,11}$$

Die direkten und die inversen Transformationsformeln lauten dann

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k\,, \tag{9,12}$$

---

[1]) Gewöhnlich sagt man umgekehrt, daß der Maßstab-Faktor „natürlich“ von der Relativgeschwindigkeit und nur von ihr abhängen könne. Später beweist man dann aber, daß er tatsächlich nicht davon abhängt, weil er gleich Eins ist.

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} (x'_k - a_k). \tag{9,13}$$

Diese Formeln werden als LORENTZ-Transformation bezeichnet. Sie bilden die formale Grundlage der ganzen Relativitätstheorie.

Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen war die Forderung, daß in jedem Inertialsystem die Gleichung für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Wellenfront die Form (5,01) haben soll. Daraus ergab sich, daß das Verschwinden der linken Seite von (9,11) das der rechten Seite zur Folge haben muß. Weiter wurden aber gewisse Zusatzbedingungen eingeführt (nämlich, daß eine geradlinige und gleichförmige Bewegung in eine der gleichen Art übergehen und daß der Maßstab in beiden Bezugssystemen der gleiche sein soll). Dadurch erhielten wir mehr: Die rechte Seite der Gleichung (9,11) verschwindet nicht nur gleichzeitig mit der linken Seite, sie ist ihr sogar immer gleich.

§ 10 Die LORENTZ-Transformation

Die LORENTZ-Transformation beschreibt den Übergang von den Koordinaten und der Zeit in einem Inertialsystem zu denen in einem anderen (welches sich gegen das erste geradlinig und gleichförmig bewegt). Sie läßt sich dadurch charakterisieren, daß die Größe

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{10,01}$$

oder

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{10,02}$$

bei dieser Transformation invariant bleibt. Die allgemeinste LORENTZ-Transformation hat die Form

$$x'_i = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k. \tag{10,03}$$

Dabei genügen die Koeffizienten a_{ik} den Beziehungen

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl}, \tag{10,04}$$

$$\sum_{i=0} e_i a_{ki} a_{li} = e_k \delta_{kl}. \tag{10,05}$$

Wir wollen die physikalische Bedeutung der Konstanten in den Transformationsformeln untersuchen. Zunächst ist klar, daß die konstanten Terme a_i einer Änderung des Anfangspunktes der Koordinaten und der Zeit entsprechen. Nehmen wir an, daß im Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinatenanfangspunkte des alten und des neuen Systems übereinstimmen, so wird

$$a_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{10,06}$$

Das werden wir im folgenden annehmen und dementsprechend die LORENTZ-Transformation in der Form

$$x'_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k \tag{10,07}$$

schreiben. Die physikalische Bedeutung der Quotienten

$$\frac{a_{0i}}{a_{00}} = \frac{1}{c} V_i \tag{10,08}$$

haben wir schon geklärt. Sie geben die durch die Lichtgeschwindigkeit dividierte Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme an. Genauer sind V_i die Komponenten (im ungestrichenen Bezugssystem) des Vektors der Geschwindigkeit des gestrichenen Systems gegenüber dem ungestrichenen. Da die Formeln für die inverse Transformation lauten

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} x'_k, \tag{10,09}$$

so sind die durch

$$\frac{a_{i0}}{a_{00}} = \frac{1}{c} V'_i \tag{10,10}$$

bestimmten Größen V_i' die im gestrichenen Bezugssystem gemessenen Komponenten der Geschwindigkeit des ungestrichenen Systems relativ zum gestrichenen.

Setzen wir in den Formeln (10,04) und (10,05) $k = l = 0$, so erhalten wir

$$a_{00}^2 - (a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2) = 1, \tag{10,11}$$

$$a_{00}^2 - (a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2) = 1. \tag{10,12}$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung von (10,08) und (10,10)

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2, \tag{10,13}$$

$$V^2 = V'^2, \tag{10,14}$$

wobei V^2 das Quadrat des Betrages der Geschwindigkeit ist. Das bedeutet, daß die Absolutbeträge (kürzer: die Längen) der Vektoren der Relativgeschwindigkeit in beiden Systemen die gleichen sind. Dieses Ergebnis ist durchaus nicht trivial, obwohl es mit unseren anschaulichen Vorstellungen völlig übereinstimmt.

Aus den Gleichungen (10,08) und (10,12) ergibt sich

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10,15}$$

Die Wurzel ist dabei mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen, denn es ist

$$a_{00} = \frac{\partial t'}{\partial t} > 0. \tag{10,16}$$

Ein negatives Vorzeichen von a_{00} würde einer Änderung in der Richtung unserer Zeitrechnung entsprechen.

Aus (10,08) und (10,15) erhalten wir

$$a_{0i} = \frac{V_i}{\sqrt{c^2 - V^2}} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10,17}$$

und entsprechend aus (10,10) und (10,15)

$$a_{i0} = \frac{V'_i}{\sqrt{c^2 - V^2}} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{10,18}$$

Setzt man in den Orthogonalitätsbedingungen einen Index gleich Null und benutzt (10,17) und (10,18), so erhält man

$$a_{00} V'_i = a_{i1} V_1 + a_{i2} V_2 + a_{i3} V_3 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{10,19}$$

$$a_{00} V_i = a_{1i} V'_1 + a_{2i} V'_2 + a_{3i} V'_3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{10,20}$$

Sind beide Indizes von Null verschieden, so liefern die Orthogonalitätsrelationen

$$a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + a_{3i} a_{3k} = \delta_{ik} + \frac{V_i V_k}{c^2 - V^2}. \tag{10,21}$$

Anstelle der a_{ik} (für $i, k = 1, 2, 3$) führen wir neue Größen α_{ik} ein, indem wir setzen

$$\alpha_{ik} = - a_{ik} + \frac{a_{i0} a_{0k}}{a_{00} + 1} \tag{10,22}$$

oder

$$\alpha_{ik} = - a_{ik} + (a_{00} - 1) \frac{V'_i V_k}{V^2}. \tag{10,23}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt dann infolge von (10,20) und (10,21)

$$\alpha_{1i} \alpha_{1k} + \alpha_{2i} \alpha_{2k} + \alpha_{3i} \alpha_{3k} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{10,24}$$

Die Größen α_{ik} stellen also die Koeffizienten einer dreidimensionalen, orthogonalen Transformation dar und können als Kosinus der Winkel zwischen den alten und den neuen Koordinatenachsen aufgefaßt werden. Dabei bezieht sich der erste Index von α_{ik} auf die neuen, der zweite auf die alten Achsen. Unter Benutzung von (10,19) und (10,20) liefern die Formeln (10,22)

$$\alpha_{i1} V_1 + \alpha_{i2} V_2 + \alpha_{i3} V_3 = - V'_i, \tag{10,25}$$

$$\alpha_{1i} V'_1 + \alpha_{2i} V'_2 + \alpha_{3i} V'_3 = - V_i. \tag{10,26}$$

Diese Beziehungen lassen sich dahingehend deuten, daß die Vektoren $\mathfrak{V}'$ (Geschwindigkeit des ungestrichenen Systems gegenüber dem gestrichenen) und $\mathfrak{V}$ (Geschwindigkeit des gestrichenen Systems gegenüber dem ungestrichenen) die gleiche Länge haben, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Mit Hilfe der gewonnenen Formeln können wir sämtliche Koeffizienten der LORENTZ-Transformation durch die Kosinus α_{ik} $(i,\ k = 1, 2, 3)$ und die drei Komponenten V_1, V_2, V_3 des Vektors der Relativgeschwindigkeit ausdrücken. Da die neun Kosinus α_{ik} den sechs Beziehungen (10,24) genügen, sich also durch drei unabhängige Größen ausdrücken lassen, enthält die LORENTZ-Transformation im ganzen sechs Parameter (die konstanten Glieder a_i, die wir gleich Null gesetzt haben, sind dabei nicht mitgerechnet).

Für die Koeffizienten a_{00} und a_{0i} haben wir schon die Ausdrücke (10,15) und (10,17) erhalten. Für die a_{i0} können wir den Ausdruck (10,18) benutzen, wobei wir unter V_i' den Wert aus der Gleichung (10,25) verstehen wollen. Dann gilt, ausführlich geschrieben,

$$a_{i0} = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{il} V_l \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{10,27}$$

Für die Koeffizienten a_{ik} erhalten wir schließlich aus (10,23)

$$a_{ik} = -\alpha_{ik} + (a_{00} - 1)\frac{V_i' V_k}{V^2}, \tag{10,28}$$

oder ausführlicher

$$a_{ik} = -\alpha_{ik} - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_k}{V^2} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{il} V_l. \tag{10,29}$$

Wir setzen die für die Koeffizienten der LORENTZ-Transformation gefundenen Werte in die Formel (10,07) ein und schreiben der Anschaulichkeit halber ct statt x_0. Dann ergibt sich

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c^2}(V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3)\right). \tag{10,30}$$

Die Formeln für die Raumkoordinaten lassen sich am einfachsten in der Form

$$x_i' = \sum_{m=1}^{3} \alpha_{im} x_m^* \tag{10,31}$$

schreiben, mit

$$x_m^* = x_m - V_m t + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_m}{V^2} \sum_{k=1}^{3} V_k (x_k - V_k t). \tag{10,32}$$

Man kann also die allgemeinste LORENTZ-Transformation in zwei Schritten ausführen. Der erste Schritt besteht in dem Übergang von den Variablen (x_1, x_2, x_3, t) zu den Variablen $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$, wobei die x_1^*, x_2^*, x_3^* durch (10,32) bestimmt werden, während t^* mit t' übereinstimmt, also folgenden Wert hat

$$t^* = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c^2}(V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3)\right). \tag{10,33}$$

Der zweite Schritt besteht in dem Übergang von $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ zu (x_1', x_2', x_3', t'), wobei entsprechend (10,30) und (10,31) gilt

$$x_i' = \alpha_{i1} x_1^* + \alpha_{i2} x_2^* + \alpha_{i3} x_3^*; \qquad t' = t^*. \tag{10,34}$$

Der zweite Schritt ist offenbar eine einfache Drehung des räumlichen Koordinatensystems, während der erste Schritt den Übergang zu einem mit der Geschwindigkeit (V_1, V_2, V_3) bewegten System ohne Achsendrehung darstellt. Wir hätten natürlich auch zuerst die Achsendrehung ausführen und dann zu dem bewegten Bezugssystem übergehen können.

Die inverse Transformation läßt sich ebenfalls in zwei Schritten ausführen. Zunächst der Übergang von (x_1', x_2', x_3', t') zu $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ gemäß

$$x_i^* = \alpha_{1i} x_1' + \alpha_{2i} x_2' + \alpha_{3i} x_3'; \qquad t^* = t', \tag{10,35}$$

d. h. eine einfache Achsendrehung, und dann der Übergang von $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ zu (x_1, x_2, x_3, t) nach den Formeln

$$x_m = x_m^* + V_m t^* + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{V_m}{V^2}\sum_{k=1}^{3} V_k(x_k^* + V_k t^*), \tag{10,36}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t^* + \frac{1}{c^2}(V_1 x_1^* + V_2 x_2^* + V_3 x_3^*)\right). \tag{10,37}$$

Diese bilden die Umkehrung der Formeln (10,32), (10,33) und ergeben sich aus den letzteren einfach durch eine Änderung des Vorzeichens der Geschwindigkeit V_i.

Die JACOBIsche Determinante der Formeln für den Übergang von (x_1, x_2, x_3, t) zu $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t^*)$ und umgekehrt ist gleich Eins. Für die Transformation (10,34) und die inverse (10,35) ist das nur dann der Fall, wenn diese eine Achsendrehung im eigentlichen Sinne darstellen (also ohne einen Übergang von einem Rechts- zu einem Linkssystem oder umgekehrt). Bleibt also bei einer LORENTZ-Transformation die Zeitrichtung und der rechts- oder linkshändige Charakter des Systems der Raumkoordinaten erhalten, so ist die JACOBIsche Determinante gleich Eins. In diesem Fall bezeichnet man die LORENTZ-Transformation als eigentlich. Wir werden im folgenden nur eigentliche LORENTZ-Transformationen benutzen.

Eine Achsendrehung stellt strenggenommen keinen Übergang zu einem anderen Inertialsystem dar und ist deshalb für uns ohne Interesse. Die wesentlichen Züge der LORENTZ-Transformation sind in den Formeln (10,32), (10,33) und in den inversen (10,36), (10,37) enthalten. Diese Formeln vereinfachen sich, wenn man die Koordinatenachsen so wählt, daß die Richtung einer von ihnen, etwa der ersten, mit der Richtung der Relativgeschwindigkeit zusammenfällt. Setzen wir also

$$V_1 = V; \qquad V_2 = V_3 = 0, \tag{10,38}$$

so erhalten wir aus (10,32) und (10,33)

$$x_1^* = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \qquad x_2^* = x_2; \quad x_3^* = x_3, \tag{10,39}$$

$$t^* = \frac{t - \frac{V x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10,40}$$

Die inversen Formeln ergeben sich daraus, in dem man V durch $-V$ ersetzt. Der Anschaulichkeit halber wollen wir x, y, z statt x_1, x_2, x_3 schreiben. Ersetzen wir weiter den Stern durch einen Strich, so erhalten wir

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \qquad y' = y; \quad z' = z, \tag{10,41}$$

$$t' = \frac{t - \frac{V x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{10,42}$$

und für die inversen Formeln

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \qquad y = y'; \quad z = z', \tag{10,43}$$

$$t = \frac{t' + \frac{V x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10,44}$$

Diese Formeln stellen eine spezielle LORENTZ-Transformation dar, die aber schon alle charakteristischen Züge der allgemeinen Transformation enthält.

§ 11 Die Entfernungsbestimmung und die Synchronisierung von Uhren in einem Inertialsystem

Bevor wir Folgerungen aus der LORENTZ-Transformation diskutieren, wenden wir uns nochmals dem in § 1 und § 2 behandelten Problem der Messung von Abständen und Zeitintervallen in einem Inertialsystem zu. Wir wollen dabei etwas ausführlicher auf den Begriff der Gleichzeitigkeit für verschiedene Raumpunkte und auf die Frage der Synchronisierung voneinander entfernter Uhren eingehen.

Der Abstand zwischen Körpern, die in einem bestimmten Inertialsystem ruhen, kann nach verschiedenen Methoden gemessen werden: durch unmittelbares Anlegen von Maßstäben, durch Triangulation und durch Funkortung. Bei der ersten Methode werden nur die Eigenschaften eines festen Körpers, bei der zweiten außerdem die Geradlinigkeit der Lichtausbreitung benutzt. Bei der dritten Methode spielt die Lichtgeschwindigkeit, die als bekannt angesehen wird, eine wesentliche Rolle. Selbstverständlich wird bei allen drei Verfahren die Gültigkeit der euklidischen Geometrie vorausgesetzt. Würde sie nicht gelten, so müßten sich beispielsweise die Ergebnisse zweier auf verschiedenen Wegen ausgeführter Triangulationen widersprechen. Schon in § 2 betonten wir, daß die Gültigkeit der euklidischen Geometrie als experimentelle Erfahrung und nicht als Gewißheit a priori zu betrachten ist.

Alle drei Verfahren zur Entfernungsmessung beruhen auf den Eigenschaften der festen Körper und des Lichtes. Da das Licht die einfachere Erscheinung darstellt, muß man es als das Primäre betrachten und zum Beispiel die Konstanz des Längennormals auf optischem Wege kontrollieren (durch Bestimmung der Anzahl der Wellenlängen, die auf die Länge des Etalons entfallen).

Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit muß man imstande sein, Zeitintervalle und Entfernungen mit Methoden zu messen, die von der Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit unabhängig sind. Nimmt man dabei an, daß die Lichtgeschwindigkeit auf dem Hinweg denselben Wert hat wie auf dem Rückweg, so braucht man die Zeitmessung nur an einer Stelle auszuführen. Dazu ist im Prinzip jeder periodische Prozeß geeignet, etwa die Schwingungen des Ammoniakmoleküls oder eines Quarzkristalls. Ein Gerät zur Zeitmessung nennen wir Uhr oder Chronometer, unabhängig davon, ob es sich um ein mechanisches Gerät (wie die üblichen Uhren) handelt, oder ob irgendein anderes Prinzip benutzt wird.

Die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit läuft im Prinzip auf die Messung des Zeitintervalls τ hinaus, innerhalb dessen das Licht eine vorher (durch Triangulation oder mit Maßstäben) ausgemessene Strecke r hin und zurück durchläuft; die Lichtgeschwindigkeit beträgt dann $c = 2r/\tau$. Im wesentlichen handelt es sich also um die Bestimmung des Umrechnungsfaktors zwischen den Entfernungen, die in Längeneinheiten ausgedrückt und durch Triangulation oder unmittelbares Anlegen von Maßstäben gemessen werden, und den Entfernungen, die man in Zeiteinheiten ausdrückt und durch Funkortung bestimmt. Dieser Umrechnungsfaktor kann ein für allemal ermittelt werden.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie man die Angaben von Uhren, die in einem Inertialsystem ruhen und einen bekannten Abstand voneinander haben, vergleicht. Es wird angenommen, daß die Uhren den gleichen Bau und den

gleichen Gang haben. Das Problem besteht dann darin, sie „synchron" einzustellen. Die eine Uhr (Uhr A) liege im Punkt A, die andere (Uhr B) im Punkt B, der von A den Abstand r hat. Von A wird zum Zeitpunkt t_1 ein Lichtsignal ausgesandt, das an einem in B aufgestellten Spiegel reflektiert wird und zur Zeit t_2 wieder in A eintrifft. Welche Zeit muß nun die „synchronisierte" Uhr B zeigen, wenn das Signal sie erreicht? Wir wollen sagen, daß die Uhr B *synchron* mit der Uhr A ist, wenn sie beim Eintreffen des Signals die Zeit $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$ zeigt. Das ist die EINSTEINsche Definition des Synchronismus von Uhren an verschiedenen Orten. Diese Definition ist sehr naheliegend und ist mit der Grundannahme der Relativitätstheorie über die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in Einklang. Wurde nämlich das Signal von A zur Zeit t_1 abgeschickt, so trifft es in B zur Zeit

$$t = t_1 + \frac{r}{c}$$

ein, denn es durchläuft den Abstand r mit der Geschwindigkeit c. Da es andererseits zum Zeitpunkt t_2 nach A zurückkehrt und dabei wieder den Weg r von B nach A durchlaufen hat, muß es in B zum früheren Zeitpunkt

$$t = t_2 - \frac{r}{c}$$

reflektiert worden sein. Aus den letzten beiden Formeln ergibt sich, daß wir dem Zeitpunkt der Reflexion des Signals in B den Wert $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ auf der Uhr A zuordnen müssen. Wenn also die Uhr B mit der Uhr A synchron gehen soll, muß sie bei der Reflexion des Signals die Zeit $t' = t$ angeben.

Aus der Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit auf dem Hin- und Rückweg ergibt sich, daß der Synchronismus zweier Uhren im oben definierten Sinne eine wechselseitige Eigenschaft ist: Ist die Uhr B synchron mit der Uhr A, so ist umgekehrt A synchron mit B. Da die euklidische Geometrie gilt und die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen denselben Wert hat (beides ist in der Gleichung für die Ausbreitung einer Lichtwellenfront enthalten), müssen dann die Uhren B, C, D, ..., von denen jede mit der Uhr A synchron sein soll, auch untereinander synchron sein.

Auf Grund dieser Tatsache kann man sich als Modell eines Inertialsystems ein starres Raumgitter konstruieren, in dessen Knotenpunkten synchron gehende Uhren angebracht sind. In diesem Modell läßt sich die Bewegung eines Körpers gegenüber dem Inertialsystem folgendermaßen beschreiben: Der Körper möge nacheinander bei den ruhenden Uhren mit den Koordinaten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) usw. vorbeikommen. Beim Durchgang des Körpers sollen die Uhren (x_i, y_i, z_i) die Zeiten t_i anzeigen. Dann sind die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ des Körpers in dem gegebenen Bezugssystem Funktionen der Zeit t dieses Systems, die für $t = t_i$ die Werte (x_i, y_i, z_i) annehmen.

Obwohl dieses Modell sehr schwerfällig ist, kann es manchmal von Nutzen sein und wird bei der Darstellung der Relativitätstheorie häufig verwendet. Wir ziehen aber das Modell der Funkortungsstation vor, mit deren Hilfe man *von einem Punkt* aus kontinuierlich sowohl die Lage des bewegten Körpers, als

auch den Zeitpunkt (in bezug auf die Uhren der Station), auf den sich diese Lage bezieht, bestimmen kann. Wegen der Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der Quelle liefern beide Modelle die gleichen Werte für die Koordinaten und die Zeit. Der Unterschied liegt nur darin, daß in dem Funkortungsmodell die Abstandsbestimmung und die Uhrensynchronisierung nicht vorher, sondern sozusagen während der Beobachtung erfolgen.

Das Funkortungsmodell ist elastischer und bleibt auch dann noch anschaulich, wenn das Modell des starren Raumgitters offenbar unbrauchbar wird, zum Beispiel bei der Bestimmung astronomischer Entfernungen. Außerdem läßt sich das Funkortungsmodell eines Bezugssystems leichter verallgemeinern.

Das oben geschilderte EINSTEINsche Verfahren zur Synchronisierung von Uhren mit Hilfe von Lichtsignalen unter Berücksichtigung der Laufzeit ist so naheliegend, daß es auf den ersten Blick aussehen könnte, als sei darin nichts für die Relativitätstheorie Charakteristisches enthalten. Das ist aber doch der Fall: Das angegebene Verfahren enthält eine *Definition* des Begriffs „Gleichzeitigkeit in verschiedenen Raumpunkten" im Sinne eines gegebenen Inertialsystems. Diese Definition basiert auf den Gesetzen der Relativitätstheorie und ist nicht willkürlich, sondern vom Standpunkt dieser Theorie die einzig vernünftige.

In der vorrelativistischen Physik wurde die Existenz einer einheitlichen Weltzeit als selbstverständlich angesehen. Dementsprechend wurde stillschweigend angenommen, der Begriff der Gleichzeitigkeit in verschiedenen Raumpunkten bedürfe keiner besonderen Definition. Man nahm an, daß jedes Verfahren zur Synchronisierung von Uhren (zum Beispiel durch Transport von Chronometern oder mit Hilfe von Lichtsignalen) dasselbe Ergebnis liefern müsse. Das ist aber nicht der Fall.

Wie wir weiter unten sehen werden, ergibt sich aus der Relativitätstheorie folgendes: Eine Uhr A sei mit einer Uhr B mit Hilfe von Lichtsignalen synchronisiert worden. Transportiert man nun eine Uhr C, die mit der Uhr im Punkt A verglichen worden ist, zum Punkt B, so wird ihre Zeit im Punkt B — selbst bei ideal genauem Gang — nicht mit der Zeit der Uhr in B übereinstimmen, sondern wird von der Geschwindigkeit des Transportes abhängen (eine Übereinstimmung besteht nur bei unendlich kleiner Geschwindigkeit).

Mit diesem Problem werden wir uns im nächsten Paragraphen beschäftigen. Wir möchten hier nochmals betonen, daß schon ein so einfacher physikalischer Begriff wie die Gleichzeitigkeit in einem Inertialsystem einer exakten Definition bedarf, mit der alle zulässigen Verfahren zur Messung der entsprechenden physikalischen Größe übereinstimmen müssen.

§ 12 Die zeitliche Aufeinanderfolge von Ereignissen in verschiedenen Bezugssystemen

Die LORENTZ-Transformation umfaßt die formalen Grundlagen der gesamten Lehre von Raum und Zeit, soweit sie in der Relativitätstheorie enthalten ist.

Wir wollen nun mit Hilfe der LORENTZ-Transformation die zeitliche Aufeinanderfolge von Ereignissen in verschiedenen Bezugssystemen untersuchen. Unter einem Ereignis schlechthin verstehen wir hier ein räumlich und zeitlich lokalisiertes Ereignis, welches also durch die Lage eines Punktes im Raum und

einen entsprechenden Zeitpunkt gekennzeichnet wird. Um eine konkrete Vorstellung zu haben, denke man etwa an das momentane Aufblitzen von Lichtsignalen. Der erste Lichtblitz erfolge zur Zeit t_1 in einem Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1, der zweite zur Zeit t_2 im Punkt x_2, y_2, z_2. Führen wir die übliche dreidimensionale Vektorschreibweise ein, so können wir den Raum-Zeit-Punkt des ersten Lichtblitzes durch das Symbol $(\mathfrak{r}_1, t_1)$, den des zweiten durch das Symbol $(\mathfrak{r}_2, t_2)$ kennzeichnen.

Zunächst fragen wir, welcher der beiden Lichtblitze früher stattgefunden hat.

Die Antwort ist klar, wenn das Licht des einen Blitzes den Ort des anderen vor dessen Aussendung erreicht hat. Gilt also

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{c} |\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1|, \tag{12,01}$$

so hat der erste Lichtblitz zweifellos früher als der zweite stattgefunden. Ist dagegen

$$t_2 - t_1 < -\frac{1}{c} |\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1|, \tag{12,02}$$

so erfolgte der erste Blitz offensichtlich später als der zweite.

Ereignisse, für die eine der Ungleichungen (12,01) oder (12,02) gilt, bezeichnen wir als *aufeinanderfolgend*. Wir wollen sagen, daß das zweite Ereignis im Fall (12,01) *absolut später*, im Fall (12,02) *absolut früher* eingetreten ist als das erste. In beiden Fällen gilt

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)^2 > 0. \tag{12,03}$$

Die positive, reelle Größe

$$T = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)^2} \tag{12,04}$$

nennen wir das *zeitartige Intervall* zwischen den beiden aufeinanderfolgenden Ereignissen. Der Wert dieses Intervalls ist unabhängig vom Bezugssystem, da der Ausdruck unter der Wurzel in (12,04) invariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation ist.

Wegen der Bedingung $\frac{\partial t'}{\partial t} > 0$, die die Erhaltung der Zeitrichtung ausdrückt [vgl. (10,16)], ist die Gültigkeit der Beziehungen (12,01) und (12,02) ebenfalls unabhängig vom Bezugssystem. Das darf auch nicht anders sein, denn das Eintreffen oder Nichteintreffen einer Lichtwelle im Ursprungsort eines zweiten Lichtblitzes ist eine physikalische Tatsache, die nicht vom Bezugssystem abhängen kann. Die für aufeinanderfolgende Ereignisse gültigen Begriffe „absolut früher“ und „absolut später“ sind also invariante Begriffe.

Wir betrachten nun den entgegengesetzten Fall, nämlich den, daß der eine Lichtblitz den Ursprungsort des anderen vor dessen Aussendung nicht erreicht hat. Dann müssen also die Ungleichungen

$$-\frac{1}{c} |\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1| < t_2 - t_1 < \frac{1}{c} |\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1| \tag{12,05}$$

gelten, die das Gegenteil von (12,01) und (12,02) besagen.

Ereignisse, für welche die Ungleichungen (12,05) gelten, nennen wir *quasi-gleichzeitig*. Diese Bezeichnung soll darauf hindeuten, daß unter den Bedingungen (12,05) die Begriffe „früher“ und „später“ relativ werden: In einigen Bezugssystemen kann $t_2 - t_1$ positiv, in anderen negativ ausfallen. In diesem Fall gibt es also auf die Frage, welcher der beiden Lichtblitze früher abgegangen ist, keine eindeutige Antwort.

Quasi-gleichzeitige Ereignisse werden durch die aus (12,05) folgende invariante Ungleichung

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)^2 < 0 \tag{12,06}$$

gekennzeichnet. Die Ungleichungen (12,05) sind mit (12,06) gleichwertig und demnach auch invariant. Die positive, reelle Größe

$$R = \sqrt{(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)^2 - c^2\,(t_2 - t_1)^2} \tag{12,07}$$

bezeichnen wir als das *raumartige Intervall* zwischen den beiden quasi-gleichzeitigen Ereignissen.

Wir wollen nun zeigen, daß man für zwei quasi-gleichgeitige Ereignisse stets ein Bezugssystem so wählen kann, daß beide Ereignisse relativ zu ihm gleichzeitig stattfinden. Andererseits kann man für zwei aufeinanderfolgende Ereignisse stets ein Bezugssystem derart angeben, daß beide Ereignisse relativ zu ihm die gleichen Raumkoordinaten haben.

Wir betrachten zwei quasi-gleichzeitige Ereignisse, bei denen also die Differenz $t_2 - t_1$ den Ungleichungen (12,05) genügt. Führen wir ein neues (gestrichenes) Bezugssystem ein, das sich gegen das alte mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{B}$ bewegt, so hat nach Formel (10,30) für die Zeittransformation die Differenz $t_2' - t_1'$ in dem neuen System den Wert

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left\{t_2 - t_1 - \frac{1}{c^2}((\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) \cdot \mathfrak{B})\right\}. \tag{12,08}$$

Man kann nun die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{B}$ so wählen, daß in dem neuen System beide Ereignisse gleichzeitig sind. Dazu braucht man nur

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)\,\frac{c^2(t_2 - t_1)}{|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1|^2} \tag{12,09}$$

zu setzen. Wegen der Ungleichung (12,06) gilt dann

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{c^4\,(t_2 - t_1)^2}{|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1|^2} < c^2. \tag{12,10}$$

Die Relativgeschwindigkeit ist also ihrem Betrage nach kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, was bei einer LORENTZ-Transformation stets der Fall sein muß.

Zur Berechnung der Differenz der Raumkoordinaten zweier quasi-gleichzeitiger Ereignisse in dem Bezugssystem, in welchem sie gleichzeitig sind, schreiben wir die LORENTZ-Transformation (10,32) in vektorieller Form

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{V}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\mathfrak{V}}{V^2}((\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}) - V^2 t). \qquad (12,11)$$

Setzen wir hierin für t die Differenz $t_2 - t_1$ und für $\mathfrak{r}$ die Differenz $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ ein und ersetzen $\mathfrak{V}$ durch den Ausdruck (12,09), so erhalten wir für die Größe $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_2' - \mathfrak{r}_1'$ den Wert

$$\mathfrak{r}_2' - \mathfrak{r}_1' = (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)\sqrt{1 - \frac{c^2(t_2-t_1)^2}{|\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1|^2}} = (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \qquad (12,12)$$

Der räumliche Abstand zwischen den beiden Ereignissen im gestrichenen Bezugssystem beträgt also

$$|\mathfrak{r}_2' - \mathfrak{r}_1'| = R, \qquad (12,13)$$

wobei R das raumartige Intervall (12,07) ist. Die Formel (12,13) ergibt sich auch unmittelbar aus der Invarianz der Größe R und der Bedingung, daß $t_2' - t_1' = 0$ sein soll. Physikalisch ist demnach das raumartige Intervall zwischen zwei quasi-gleichzeitigen Ereignissen der Abstand zwischen ihnen in dem Bezugssystem, in welchem sie gleichzeitig sind.

Wir betrachten nun zwei aufeinanderfolgende Ereignisse, bei denen also eine der Ungleichungen (12,01) oder (12,02) erfüllt ist. Wir wollen zeigen, daß man ein neues (gestrichenes) Bezugssystem angeben kann, in dem die Raumkoordinaten der beiden Ereignisse übereinstimmen. Dazu ersetzen wir in der Formel (12,11) die Größen t durch $t_2 - t_1$ und $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$. Wählen wir nun für die Relativgeschwindigkeit den Wert

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1}{t_2 - t_1}, \qquad (12,14)$$

so wird der Vektor $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_2' - \mathfrak{r}_1'$ gleich Null, d. h. es gilt

$$\mathfrak{r}_2' = \mathfrak{r}_1'. \qquad (12,15)$$

Wegen der Ungleichung (12,03) bleibt die Geschwindigkeit hierbei ihrem Betrage nach kleiner als die Lichtgeschwindigkeit

$$V^2 < c^2. \qquad (12,16)$$

In dem neuen Bezugssystem finden wir für den zeitlichen Abstand der beiden Ereignisse nach (12,08)

$$t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1|^2}{c^2(t_2-t_1)^2}} = (t_2 - t_1)\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \qquad (12,17)$$

Für $t_2 - t_1 > 0$ ergibt sich daraus

$$t'_2 - t'_1 = T, \tag{12,18}$$

wobei T das zeitartige Intervall (12,04) ist.

Dadurch wird die physikalische Bedeutung des zeitartigen Intervalls T klargestellt. T ist also die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen verstreichende Zeitspanne in dem Bezugssystem, in welchem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden. Dieses Bezugssystem hat eine sehr anschauliche Bedeutung. Es ist etwa eine Uhr, die geradlinig und gleichförmig derart bewegt wird, daß sie beim Eintreten des ersten Ereignisses an dessen Ort zugegen ist, den Ort des zweiten Ereignisses aber gerade dann erreicht, wenn dieses stattfindet.

Der Begriff „aufeinanderfolgende Ereignisse" ist transitiv: Wenn man weiß, daß das zweite Ereignis absolut später als das erste und ein drittes Ereignis absolut später als das zweite eingetreten ist, so folgt daraus, daß das dritte Ereignis absolut später als das erste stattgefunden hat. Diese physikalisch triviale Eigenschaft der aufeinanderfolgenden Ereignisse läßt sich auch leicht formal beweisen. Aus den beiden Ungleichungen

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{c} |\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1|; \qquad t_3 - t_2 > \frac{1}{c} |\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2| \tag{12,19}$$

folgt durch einfache Addition

$$t_3 - t_1 > \frac{1}{c} |\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1|, \tag{12,20}$$

denn die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte. Der Begriff „quasi-gleichzeitige Ereignisse" ist dagegen nicht transitiv: Wenn man weiß, daß zwei Ereignisse quasi-gleichzeitig sind und daß ein drittes Ereignis quasi-gleichzeitig mit dem zweiten ist, so kann dieses dritte Ereignis mit dem ersten quasi-gleichzeitig oder aber „aufeinanderfolgend" sein (d. h. absolut früher oder später als dieses eintreten).

Fassen wir zusammen: In der Relativitätstheorie werden die Ereignisse hinsichtlich ihrer zeitlichen Reihenfolge in *aufeinanderfolgende* und *quasi-gleichzeitige* Ereignisse eingeteilt, und zwar ist diese Einteilung unabhängig vom Bezugssystem. Einem Paar aufeinanderfolgender Ereignisse läßt sich ein invariantes *zeitartiges Intervall* zuordnen. Dieses ist gleich der in einem bestimmten Bezugssystem, gemessenen Zeitspanne zwischen den beiden Ereignissen (nämlich in dem Bezugssystem, in welchem sie am gleichen Ort eintreten). Einem Paar quasi-gleichzeitiger Ereignisse läßt sich ein invariantes *raumartiges Intervall* zuordnen. Dieses ist gleich der in einem bestimmten Bezugssystem gemessenen Entfernung zwischen den beiden Ereignissen (nämlich in dem Bezugssystem, in welchem sie gleichzeitig stattfinden).

Die Einteilung der Ereignisse in aufeinanderfolgende und quasi-gleichzeitige, die der Relativitätstheorie eigentümlich ist, steht im Einklang mit dem Kausalbegriff und präzisiert diesen. Von zwei quasi-gleichzeitigen Ereignissen kann

niemals das eine die unmittelbare Ursache oder Folge des anderen sein. (Natürlich können sie eine gemeinsame Ursache in Form eines dritten Ereignisses haben, das absolut früher als jedes von ihnen stattgefunden hat.) Nur aufeinanderfolgende Ereignisse können (müssen selbstverständlich nicht) in einem direkten Kausalzusammenhang stehen: Das absolut frühere kann die Ursache des anderen sein.

Die hier eingeführten Begriffe bilden die natürlichen Verallgemeinerungen derjenigen, welche die alte, vorrelativistische Physik benutzte. Die alten Begriffe waren unvereinbar mit der Tatsache, daß es eine endliche Grenze für die Ausbreitungsgeschwindigkeit jeder beliebigen Wirkung gibt (die Lichtgeschwindigkeit). Sie waren nicht hinreichend scharf definiert und führten deshalb zu Paradoxien. Die neuen Begriffe berücksichtigen von vornherein die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit und beseitigen diese Paradoxa.

Die alte Physik benutzte den apriorischen (nicht auf dem Experiment basierenden) Begriff der absoluten Gleichzeitigkeit. Wir wollen nun eines der Paradoxa untersuchen, zu denen dieser Begriff führt. Gegeben seien zwei Bezugssysteme, die sich geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegen. In einem bestimmten Zeitpunkt mögen ihre Koordinatennullpunkte zusammenfallen. In diesem Augenblick soll in dem gemeinsamen Koordinatenursprung ein Lichtblitz erfolgen. Wir betrachten nun die Bewegung der Wellenfront in den beiden Bezugssystemen. Vom Standpunkt des ersten Systems bildet die Wellenfront in jedem Augenblick eine Kugel um den Koordinatenursprung. Dasselbe kann man aber auch vom Standpunkt des zweiten Systems behaupten. Auch hier bildet die Wellenfront in jedem Augenblick eine Kugel, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt; nur ist dies der Ursprung des zweiten und nicht des ersten Systems. Die Koordinatennullpunkte der beiden Systeme stimmten aber nur in einem Augenblick überein und entfernen sich dann immer weiter voneinander. Eine Kugel kann aber nicht zwei verschiedene Mittelpunkte haben. — Diese Überlegungen benutzen einerseits das Relativitätsprinzip, d. h. die Tatsache, daß in zwei geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen alle Erscheinungen in der gleichen Weise ablaufen, andererseits die aus dem Feldbegriff folgende Unabhängigkeit der Geschwindigkeit des Lichtes von der seiner Quelle. Beide Prinzipien stehen außer Zweifel. Wo ist die Lösung dieses Paradoxons zu suchen?

Die Lösung liegt darin, daß die Worte „in jedem Augenblick" innerhalb des ersten Systems einen anderen Sinn haben als in bezug auf das zweite. Das Paradoxon tritt nur auf, wenn man diese Worte im Sinne von „in jedem Augenblick der absoluten, beiden Systemen gemeinsamen Zeit" versteht. Die Existenz einer solchen „absoluten Zeit" wurde zwar in der alten Physik als selbstverständlich angenommen, in der Relativitätstheorie wird sie dagegen verneint. Wie wir wissen, ist nach der Relativitätstheorie die Zeit in einem Bezugssystem nicht identisch mit der Zeit in einem anderen Bezugssystem. Die Wellenfront wird in jedem System definiert als die im Sinne des betreffenden Systems gleichzeitige Lage aller Punkte, bis zu denen die Lichterregung gerade gelangt ist. Da aber Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig sind, es in einem anderen nicht mehr zu sein brauchen, besteht die Wellenfront im ersten Bezugssystem aus ganz anderen Punkten als im zweiten. Stellen wir uns der Anschaulichkeit halber vor, daß die Lichtausbreitung in einem dünnen Medium (Gas) erfolgt,

so verläuft die Wellenfront im ersten System durch andere Teilchen des Gases als im zweiten. Wir haben es also in Wirklichkeit mit verschiedenen Wellenfronten zu tun und brauchen uns nicht zu wundern, daß sie verschiedene Mittelpunkte haben.

Diese Auflösung des Paradoxons zeigt anschaulich die logische Notwendigkeit, auf die Begriffe „absolute Zeit" und „absolute Gleichzeitigkeit" zu verzichten.

Vor einem halben Jahrhundert, als die Relativitätstheorie eben entstanden war, erschien dieser Verzicht manchem als etwas gar nicht Annehmbares und für EINSTEIN, den Schöpfer der Relativitätstheorie, bedurfte es einer großen wissenschaftlichen Kühnheit, dessen Notwendigkeit einzusehen. Heute fällt uns dieser Verzicht bedeutend leichter. Der alltägliche Begriff der Gleichzeitigkeit wird durch den Begriff der Quasi-Gleichzeitigkeit überdeckt, und in wissenschaftlichen Problemen, bei denen es sich um große Entfernungen oder Geschwindigkeiten handelt, erscheint uns die Notwendigkeit einer Präzisierung des Zeitbegriffs als etwas Selbstverständliches.

§ 13 Der Vergleich von Zeitintervallen in bewegten Bezugssystemen Der DOPPLER-Effekt

Gegeben sei ein Bezugssystem (Basis), das wir als ruhend ansehen wollen. Von dieser Basis aus verfolgen wir den Ablauf eines Prozesses in einem sich bewegenden System. Unter einem solchen Prozeß können wir uns zum Beispiel den gleichmäßigen Gang einer Uhr vorstellen, die mit dem sich bewegenden System verbunden ist. Den Gang dieser Uhr können wir etwa dadurch verfolgen, daß wir sie pro Sekunde ein Lichtsignal aussenden lassen oder einfach ihre Zeigerstellung aus der Ferne ablesen. Außerdem müssen wir in unserer Basis eine Vorrichtung haben (etwa ein Funkortungsgerät), mit deren Hilfe der Abstand der sich bewegenden Uhr von der Basis laufend gemessen werden kann. Vermerken wir dann mit Hilfe einer Uhr unserer Basis das Eintreffen der „sekundlichen" Lichtsignale und berücksichtigen jedesmal die Laufzeit des Signals von der sich bewegenden Uhr zur Basis, so können wir die Zeitpunkte t_n feststellen, zu denen die „sekundlichen" Signale ausgesandt werden. Diese Korrektur kann man sehr einfach angeben.

Es sei $r(t)$ die von der Basis aus gemessene Entfernung der sich bewegenden Uhr, wobei t die Zeit der Basis ist. Dann ergibt sich die Größe t_n aus der unmittelbar beobachteten Größe t_n^* nach der Formel

$$t_n + \frac{r(t_n)}{c} = t_n^*. \tag{13,01}$$

Haben nun die Zeitpunkte t_n ebenfalls Sekundenabstand? Mit anderen Worten: Werden die berechneten Zeitintervalle zwischen den Zeitpunkten t_n mit den Sekunden einer Uhr auf der Basis, welche dieselbe Bauart wie die beobachtete Uhr haben soll, übereinstimmen?

Die Antwort auf diese Frage wird durch die Formeln der LORENTZ-Transformation gegeben. Wir nehmen an, die Uhr entferne sich von der Basis längs

einer Geraden durch deren Koordinatenursprung. (Dort befinde sich auch das Meßgerät, das die Signale registriert.) Wählen wir diese Gerade als x-Achse und nehmen an, daß die Uhr zur Zeit $t = 0$ den Koordinatenursprung passiert hat, so können wir die Lage dieser Uhr durch folgende Gleichungen beschreiben

$$x = vt; \quad y = 0; \quad z = 0. \tag{13,02}$$

Dann hat x auch die Bedeutung des Abstandes r von der Basis. Aus der Formel (13,01) ergibt sich, daß das auf der Basis zur Zeit t_n^* empfangene Sekundenzeichen nach der Uhr der Basis zur Zeit

$$t_n = \frac{t_n^*}{1 + \frac{v}{c}} \tag{13,03}$$

ausgesandt wurde. Mit Hilfe der LORENTZ-Transformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{13,04}$$

führen wir jetzt ein Bezugssystem ein, das mit der sich bewegenden Uhr verbunden ist. Die Umkehrformeln lauten bekanntlich

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13,05}$$

Im gestrichenen Bezugssystem befindet sich die Uhr im Punkt $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ und sendet ihre Signale zu den Zeitpunkten

$$t'_n = n\tau. \tag{13,06}$$

Die Konstante τ (die nur von der Beschaffenheit der Uhr und nicht von ihrer Bewegung abhängt) betrage etwa eine Sekunde. Wir erhalten also

$$t_n = \frac{n\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13,07}$$

Andererseits gibt eine ebenso beschaffene Uhr, die sich auf der Basis befindet, die Zeitpunkte $n\tau$ an. Eine von der Basis aus beobachtete, sich bewegende Uhr wird also gegenüber einer Uhr auf der Basis *nachgehen*. Die nach den Beobachtun-

gen auf der Basis festgestellten Zeitpunkte der Aussendung der Signale haben nicht den Abstand τ (eine Sekunde), sondern den größeren Abstand

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13,08}$$

Es ist zu beachten, daß sich dieses Resultat erst ergibt, nachdem man mit Hilfe von (13,01) die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale berücksichtigt hat. Unmittelbar beobachtet man aber das Eintreffen der Lichtsignale auf der Basis zu den Zeitpunkten

$$t_n^* = \left(1 + \frac{v}{c}\right) t_n = n\tau \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}; \tag{13.09}$$

deren Abstand beträgt

$$\Delta t^* = \tau \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}. \tag{13,10}$$

Zur Vereinfachung der Rechnungen haben wir bisher den Fall betrachtet, daß sich die Uhr geradlinig vom Beobachter (d. h. vom Instrument, welches die von der Uhr ausgehenden Lichtsignale registriert) entfernt. Nun untersuchen wir den allgemeineren Fall, daß die Bahn der Uhr nicht durch den Ort des Meßinstruments geht. Letzteres befinde sich wie bisher im Koordinatenursprung, aber die Bewegung der Uhr soll nun statt durch (13,02) durch die Gleichungen

$$x = vt; \quad y = y_0; \quad z = z_0 \tag{13,11}$$

in dem mit der Basis verbundenen Bezugssystem und durch die Gleichungen

$$x' = 0; \quad y' = 0; \quad z' = 0 \tag{13,12}$$

in dem mit der Uhr verbundenen Bezugssystem beschrieben werden. Den Übergang zwischen den beiden Bezugssystemen vermittelt wieder die LORENTZ-Transformation (13,04) bzw. (13,05). Der Zusammenhang zwischen t' und t und damit auch die Formel (13,08), die das Nachgehen der bewegten Uhr beschreibt, bleiben also ungeändert. Es ändert sich nur der Zusammenhang zwischen t^* und t, d. h. die Formel für die Umrechnung vom Zeitpunkt des Eintreffens auf den Zeitpunkt der Emission des Signals. Wir erhalten jetzt statt (13,09)

$$t_n^* = t_n + \frac{1}{c} \sqrt{v^2 t_n^2 + y_0^2 + z_0^2}. \tag{13,13}$$

Sehen wir das Zeitintervall τ als klein an, so können wir schreiben

$$\Delta t^* = \frac{dt^*}{dt} \Delta t = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \Delta t, \tag{13,14}$$

wobei

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{v^2 t}{\sqrt{v^2 t^2 + y_0^2 + z_0^2}} \tag{13,15}$$

die Radialkomponente der Geschwindigkeit der Uhr im Augenblick der Emission eines Signals ist. Aus (13,08) und (13,14) ergibt sich

$$\Delta t^* = \tau \frac{c + v_r}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{13,16}$$

Diese Formel tritt im allgemeinen Fall an die Stelle von (13,10).

Die Abweichung der Größe Δt^* von τ drückt den DOPPLER-Effekt aus. Dieser besteht bekanntlich in folgendem: Läuft in einem bewegten System ein periodischer Prozeß mit der Periode τ ab, so ist die in einem Punkt des ruhenden Systems registrierte Periode Δt^* größer als τ, wenn das System sich von diesem Punkt entfernt, und kleiner als τ, wenn es sich ihm nähert. Die Formel (13,16) beschreibt den relativistischen DOPPLER-Effekt für die Lichtausbreitung im Vakuum. Die klassische, vorrelativistische Formel erhält man daraus, indem man den Unterschied zwischen t' und t vernachlässigt, also in (13,14) Δt durch τ ersetzt (der relative Fehler ist dabei von der Größenordnung v^2/c^2).

Die historisch erste Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, die im Jahre 1675 von OLAF RÖMER durchgeführt wurde, beruhte im wesentlichen auf dem DOPPLER-Effekt. Als bewegte Uhr diente dabei das System der Jupitermonde, und der beobachtete Prozeß bestand in der periodischen Verfinsterung dieser Monde. Die Erde nähert sich dem Jupiter etwa auf der Hälfte ihrer Bahn, und es ist dann $v_r < 0$; auf der anderen Hälfte der Bahn entfernt sie sich wieder von ihm, und dort ist $v_r > 0$. Wenn man statt (13,16) die vereinfachte Formel (13,14) benutzt, so kann man als Zeitintervall Δt die über ein Jahr gemittelte beobachtete Zeitdauer zwischen zwei Verfinsterungen nehmen. In dem Teil der Erdbahn, wo $v_r < 0$ ist, wird dann $\Delta t^* < \Delta t$, d. h. man beobachtet die Verfinsterungen früher als der Mittelwert angibt; dagegen beobachtet man in dem Teil, wo $v_r > 0$, also $\Delta t^* > \Delta t$ gilt, ein verspätetes Eintreten der Verfinsterung. Da die Geschwindigkeit v_r aus der Theorie der Bewegung von Erde und Jupiter bekannt ist, kann man mit Hilfe der Beziehung (13,14) die Lichtgeschwindigkeit c berechnen. RÖMER erhielt auf diese Weise $c = 3{,}1 \cdot 10^{10}$ cm/sec, was sehr gut mit dem heutigen Wert von $3{,}0 \cdot 10^{10}$ cm/sec übereinstimmt, der mit viel genaueren Methoden gemessen wurde.

Wir betonen nochmals, daß die Theorie des DOPPLER-Effektes zwei Korrektionen berücksichtigen muß: Erstens die Umrechnung vom Zeitpunkt t^* des Eintreffens auf den Zeitpunkt t der Aussendung eines Lichtsignals und zweitens den Zusammenhang zwischen der Zeit t in dem Bezugssystem, in welchem die Signale registriert werden, und der Zeit t' desjenigen Bezugssystems, das mit dem diese Signale emittierenden Körper verbunden ist. Die Umrechnung von t^* auf t ergibt einen Faktor, in den die Radialkomponente der Geschwindigkeit eingeht und der auch schon in der vorrelativistischen Physik berücksichtigt wurde. Die Umrechnung von t auf t' liefert einen Faktor, der vom Betrag der Geschwindigkeit abhängt; er folgt aus der LORENTZ-Transformation und ist charakteristisch für die Relativitätstheorie.

§ 14 Der unmittelbare Vergleich der Angaben von gegeneinander bewegten Uhren

Im vorigen Paragraphen haben wir ein Verfahren zum Vergleich von Zeitintervallen in verschiedenen Bezugssystemen kennengelernt. Dieses Verfahren beruht auf der Benutzung von Lichtsignalen, deren Laufzeit berücksichtigt wird. Grundsätzlich ist aber noch ein anderes Verfahren möglich, bei welchem die Angaben von Uhren, die sich unmittelbar aneinander vorbeibewegen, verglichen werden.

Wir denken uns eine Anzahl von Uhren, die auf einer Geraden angeordnet sind und in einer Basis ruhen. Diese Uhren seien dort vorher miteinander synchronisiert worden. Nun bewege sich eine Uhr A an ihnen vorbei. Um den Gang der Uhr A zu ermitteln, vergleichen wir ihre Zeigerstellung mit derjenigen der Basisuhren, an der sie sich gerade vorbeibewegt. Dabei genügt es offenbar, wenn unsere Basis zwei Uhren besitzt. Wir können uns also vorstellen, daß die Basis nur aus diesen beiden Uhren besteht, die durch einen festen Stab miteinander verbunden sind.

Im Bezugssystem der Basis lauten die Koordinaten der ruhenden Uhren und der bewegten Uhr A:

$$\begin{aligned} x &= a \quad &&\text{(erste Uhr der Basis)}, \\ x &= b \quad &&\text{(zweite Uhr der Basis)}, \\ x &= vt \quad &&\text{(Uhr A)}. \end{aligned} \tag{14,01}$$

Mit Hilfe der LORENTZ-Transformation (13,04) bzw. (13,05) können wir zu einem Bezugssystem übergehen, in welchem die Uhr A ruht. In diesem System lauten die Koordinaten der Basisuhren und der Uhr A:

$$\begin{aligned} x' &= -vt' + a' \quad &&\text{(erste Uhr der Basis)}, \\ x' &= -vt' + b' \quad &&\text{(zweite Uhr der Basis)}, \\ x' &= 0 \quad &&\text{(Uhr A)}, \end{aligned} \tag{14,02}$$

wobei die Konstanten a' und b' mit a und b folgendermaßen zusammenhängen:

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad b' = b\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{14,03}$$

Ohne uns für eines der beiden Bezugssysteme zu entscheiden, wollen wir — als objektiven Tatbestand — folgende Daten registrieren: erstens die Zeigerstellungen der Uhr A und der ersten Basisuhr und zweitens die Zeigerstellungen der Uhr A und der zweiten Basisuhr jeweils in dem Augenblick, in welchem die Uhr A der entsprechenden Basisuhr gerade gegenübersteht. Bezeichnen wir die jeweiligen Angaben der Uhr A mit t_1' bzw. t_2' und die entsprechenden Angaben der ersten bzw. zweiten Basisuhr mit t_1 bzw. t_2, so erhalten wir infolge (14,01) und (14,02)

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{a}{v}; \qquad & t_1' &= \frac{a'}{v}, \\ t_2 &= \frac{b}{v}; \qquad & t_2' &= \frac{b'}{v}. \end{aligned}\right\} \tag{14,04}$$

Dabei ist wegen (14,03)

$$t'_1 = t_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,; \qquad t'_2 = t_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{14.05}$$

Auf Grund dieser Angaben können wir einerseits den von der Basis aus beobachteten Gang der Uhr A und andererseits den von dem mit der Uhr A verbundenen Bezugssystem aus beobachteten Gang der Basisuhren beurteilen. Unter dem Ablauf eines Prozesses, der von einem bestimmten Bezugssystem aus beobachtet wird, verstehen wir die Beschreibung dieses Prozesses mit Hilfe derjenigen Zeit, welche der Synchronisierung des betreffenden Bezugssystems entspricht.

Die Größen t_1 und t_2 sind Angaben verschiedener Uhren der Basis. Da aber diese Uhren im Bezugssystem der Basis synchronisiert wurden, können wir, falls wir den Ausdruck „in dem Augenblick" im Sinne *dieser* Synchronisierung verwenden, behaupten, daß in dem Augenblick, in welchem die zweite Uhr die Zeit t_2 anzeigte, die erste Uhr die gleiche Zeit angezeigt hat. Die Differenz $t_2 - t_1$ ist also einfach diejenige Zeit, welche im Bezugssystem der Basis verstrichen ist, während die Zeigerstellung der Uhr A sich um $t'_2 - t'_1$ geändert hat. Der Gang der Uhr A wird also, von der Basis aus beobachtet, durch die Gleichung

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{14,06}$$

beschrieben. Da $|\,t'_2 - t'_1\,| < |\,t_2 - t_1\,|$ ist, wird die Uhr A, von der Basis aus beobachtet, *nachgehen*. Setzen wir $t'_2 - t'_1 = \tau$, $t_2 - t_1 = \Delta t$, so erhalten wir genau wieder die Formel (13,08).

Nun verfolgen wir den Gang einer Uhr der Basis von dem mit der Uhr A verbundenen Bezugssystem aus. Dazu müssen wir die Angaben *ein und derselben* Uhr registrieren, d. h. im vorliegenden Fall entweder die Angaben der ersten oder der zweiten Basisuhr. Wir wollen uns für die zweite Uhr entscheiden. Für sie verfügen wir nur über *eine direkte* Angabe (in dem Augenblick, in welchem sie sich an der Uhr A, die die Zeit t'_2 anzeigt, vorbeibewegt, zeigt sie selbst die Zeit t_2 an). Die zweite Angabe der zweiten Uhr muß aus den vorhandenen Daten *berechnet* werden. Wir fragen also: Wo befand sich die zweite Uhr, als die erste Uhr sich an der Uhr A vorbeibewegte, und welche Zeit zeigte sie in diesem Augenblick an? Wesentlich ist hierbei, daß die Worte „wo" und „als" nunmehr im Sinne des gestrichenen Bezugssystems verwendet werden müssen, in dem die Uhr A ruht. Diese Frage ist leicht zu beantworten. Als sich die erste Uhr an der Uhr A vorbeibewegte, zeigte letztere die Zeit $t'_1 = a'/v$ an. In diesem Augenblick befand sich die zweite Uhr nach (14,02) im Punkt $x' = b' - a'$. Die Zeigerstellung t der zweiten Uhr ergibt sich durch Einsetzen der Werte $t' = t'_1$ und $x' = b' - a'$ in die Lorentz-Transformation (13,05). Das liefert

$$t = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}(b' - a')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t_1 + \frac{v}{c^2}(b - a) \tag{14,07}$$

oder

$$t = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{v^2}{c^2}. \tag{14,08}$$

(Die Zeigerstellung der zweiten Uhr stimmt nicht mehr mit der Zeigerstellung t_1 der ersten Uhr überein, da die Gleichzeitigkeit hier im Sinne desjenigen Bezugssystems zu verstehen ist, in welchem A ruht, und nicht mehr im Sinne der Basis.) Die nach Formel (14,08) berechnete Angabe der zweiten Uhr ermöglicht es in Verbindung mit der unmittelbar beobachteten Zeigerstellung t_2 dieser Uhr, ihren Gang von dem mit A verbundenen Bezugssystem aus zu verfolgen. Wir erhalten

$$t_2 - t = (t_2 - t_1)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{14,09}$$

und schließlich

$$t_2 - t = (t_2' - t_1')\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{14,10}$$

Im Bezugssystem der Uhr A geht also die sich relativ dazu bewegende Uhr der Basis ebenfalls *nach*; wir haben also eine völlige Gleichberechtigung der beiden Bezugssysteme.

Man sagt manchmal, daß in einem bewegten System die Zeit langsamer ablaufe als in einem ruhenden. Diese Formulierung ist aber unzutreffend, denn man kann auf Grund des Relativitätsprinzips die Rollen des bewegten und des ruhenden Systems stets vertauschen und käme so zu einem Widerspruch.

Der Charakter des hier auftretenden Mißverständnisses läßt sich am einfachsten durch ein mathematisches Beispiel aufklären (welches übrigens in unmittelbarer Beziehung zu unserem Problem steht). Wie wir in § 10 sahen, gilt für eine LORENTZ-Transformation

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1. \tag{14,11}$$

Für die inverse Transformation gilt aber ebenfalls

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1. \tag{14,12}$$

Wenn man nicht daran denkt, daß in (14,11) die Ableitung nach t bei konstanten Werten von x, y, z, dagegen in (14,12) die Ableitung nach t' bei konstanten Werten von x', y', z' zu bilden ist, so könnte es seltsam scheinen, daß $\frac{\partial t}{\partial t'}$ nicht dem Reziproken von $\frac{\partial t'}{\partial t}$, sondern dieser Größe selbst gleich ist. Es ist aber klar, daß kein „Paradoxon“ vorliegt.

Wenden wir uns nun wieder der physikalischen Seite des Problems zu, so können wir sagen, daß es sich nicht um den „Ablauf der Zeit“ in verschiedenen Bezugssystemen handelt, sondern daß der Ablauf eines *lokalisierten Prozesses* von verschiedenen Bezugssystemen aus beschrieben wird. Der Prozeß sei an einem Punkt lokalisiert, der in dem ungestrichenen Bezugssystem ruht (x, y, z sind konstant). Dann können wir aus $\frac{\partial t'}{\partial t} > 1$ schließen, daß die Dauer oder die Periode des Prozesses im „eigenen“ System kleiner ist als in jedem anderen (gestrichenen) System, das sich relativ zum „eigenen“ System bewegt. Ist der Prozeß dagegen in einem Punkt mit den konstanten Koordinaten x', y', z' lokalisiert, so ist das „eigene“ System das gestrichene, und es gilt $\frac{\partial t}{\partial t'} > 1$; die Schlußfolgerung bleibt aber unverändert.

Ist $d\tau$ die Dauer eines Prozesses in seinem „eigenen“ System, so hat diese in einem anderen Bezugssystem, das sich relativ zum „eigenen“ System mit der Geschwindigkeit V bewegt, den Wert $dt > d\tau$, wobei gilt

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, dt. \tag{14,13}$$

Hier ist V die in der LORENTZ-Transformation zwischen den beiden betrachteten Bezugssystemen auftretende Geschwindigkeit. Der Betrag von V ist gleich dem der Geschwindigkeit v, mit der sich der Punkt bewegt, in welchem der Prozeß lokalisiert ist, und deren Komponenten lauten

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{14,14}$$

Wir können also statt (14,13) auch schreiben

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{14,15}$$

Wie man leicht einsieht, ist dieser Ausdruck invariant gegenüber jeder LORENTZ-Transformation. Man kann die Größe $d\tau$ als Differential einer „Eigenzeit“ τ auffassen, die durch folgende Gleichung definiert ist:

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{14,16}$$

(Hierbei wird angenommen, daß für $t = 0$ auch $\tau = 0$ ist.) Ist die Geschwindigkeit v konstant, so gibt τ die im „eigenen“ System gemessene Dauer des Prozesses an, der in dem sich bewegenden Punkt stattfindet oder mit ihm verknüpft ist (deshalb die Bezeichnung „Eigenzeit“). Ist die Geschwindigkeit v variabel, so kann man τ jedenfalls als eine mathematische Hilfsgröße auffassen,

deren Verwendung wegen ihrer Invarianz gegenüber einer LORENTZ-Transformation zweckmäßig ist. Auch bei einer variablen Geschwindigkeit v wollen wir die Größe τ als „Eigenzeit" bezeichnen, obwohl das in diesem Fall nicht wörtlich verstanden zu werden braucht.

Daß im Fall einer durch das Schwerefeld verursachten Beschleunigung die Größe τ nicht als diejenige Zeit angesehen werden kann, welche von einer mit der betreffenden Geschwindigkeit bewegten Uhr angezeigt wird, folgt aus der EINSTEINsehen Gravitationstheorie. Diese Theorie liefert für die von einer solchen Uhr angegebene Zeit einen anderen Ausdruck (vgl. § 61 und § 62). Mit Hilfe der Relativitätstheorie kann man ganz allgemein (d. h. ohne Aussagen über das Wesen der ablaufenden Prozesse) nur Schlüsse für eine *nicht beschleunigte* Bewegung ziehen. Allein dieser Fall läßt sich auf die Betrachtung von verschiedenen, gegeneinander bewegten Inertialsystemen zurückführen (was den eigentlichen Gegenstand der Relativitätstheorie bildet). Allgemein kann keine Theorie, ohne auf Einzelheiten der Konstruktion der Uhr einzugehen, voraussagen, wie sich diese Uhr verhält, wenn sie Stöße oder eine beliebige Beschleunigung erfährt. Auch die Gravitationstheorie kann das nicht leisten; der erwähnte Ausdruck für die von einer beschleunigt bewegten Uhr angegebenen Zeit gilt für den Fall, daß diese Beschleunigung von einem Gravitationsfeld herrührt. Freilich könnte man eine gegenüber Stößen besonders unempfindliche Uhr betrachten (etwa ein Atomsystem mit hohen inneren Frequenzen und Beschleunigungen der Bestandteile). Man könnte dann annehmen, daß die Angaben einer solchen ideal-unempfindlichen Uhr proportional der Eigenzeit seien (zumindest bei nicht zu großer Beschleunigung der Uhr). Diese Annahme widerspricht zwar nicht der Relativitätstheorie, ist aber auch keine direkte Folge derselben.

§ 15 Abstands- und Längenvergleich in bewegten Bezugssystemen

Wenn ein Gegenstand in einem bestimmten Bezugssystem ruht, so braucht die Bestimmung seiner geometrischen Abmessungen und Form nicht unbedingt in einem Augenblick zu erfolgen. Ein ruhender Gegenstand kann auch allmählich ausgemessen werden, etwa durch schrittweise Bestimmung der Lage seiner Punkte. Um dagegen etwas über die Abmessungen und Gestalt eines bewegten Objekts aussagen zu können, müssen wir sämtliche ermittelten Lagen der einzelnen Punkte auf denselben Zeitpunkt beziehen; sonst erhalten wir ein verzerrtes Bild.

Daraus ergibt sich, daß der Begriff der Abmessungen und der Form eines bewegten Objekts eng mit dem Begriff der Gleichzeitigkeit zusammenhängt. Wie wir sahen, gibt es keine absolute Gleichzeitigkeit; der Begriff „Gleichzeitigkeit" hängt vielmehr vom Bezugssystem ab. Es ist daher zu erwarten, daß auch die Abmessungen und die Gestalt eines Gegenstandes keine absolute Bedeutung haben, sondern sich jeweils auf ein bestimmtes System beziehen.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir die Länge eines Stabes in verschiedenen Bezugssystemen. Zwei Bezugssysteme mögen sich relativ zueinander in Richtung ihrer gemeinsamen x-Achse bewegen. Die Koordinaten und die Zeiten dieser

beiden Systeme werden durch eine LORENTZ-Transformation verknüpft, die wir hier nochmals hinschreiben wollen. Sie lautet

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & t' &= \frac{t' - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y; & z' &= z. \end{aligned}\right\} \tag{15,01}$$

Die Richtung des Stabes soll mit der Richtung der Relativbewegung der beiden Bezugssysteme (der x-Achse) übereinstimmen; ferner ruhe der Stab im ungestrichenen System. Dort lauten dann die Koordinaten der beiden Stabenden zu jedem Zeitpunkt

$$\left.\begin{aligned} x &= a, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{(erstes Ende des Stabes)} \\ x &= b, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{(zweites Ende des Stabes).} \end{aligned}\right\} \tag{15,02}$$

Ist $b > a$, so beträgt die Länge des Stabes

$$l = b - a. \tag{15,03}$$

In dem relativ zum Stab bewegten, gestrichenen System lauten die Koordinaten der Stabenden

$$\left.\begin{aligned} x' &= -vt' + a', \quad y' = 0,, \quad z' = 0 \quad \text{(erstes Ende)} \\ x' &= -vt' + b' \quad y' = 0, \quad z' = 0 \quad \text{(zweites Ende).} \end{aligned}\right\} \tag{15,04}$$

Dabei ist

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad b' = b\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15,05}$$

Die Länge des Stabes ist der Abstand zwischen den Lagen seiner Enden zum gleichen Zeitpunkt. Im gestrichenen Bezugssystem bedeutet Gleichzeitigkeit gleiche Werte von t', und der Abstand ist nach der üblichen Formel die Differenz der gestrichenen Koordinaten. Im gestrichenen System beträgt also die Länge des Stabes

$$l' = b' - a'. \tag{15,06}$$

Daraus folgt

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15,07}$$

Der Stab ist also in einem Bezugssystem, in dem er (in Längsrichtung) die Geschwindigkeit v hat, verkürzt: Seine Länge l' ist kleiner als die Länge l, die sich für den ruhenden Stab ergibt.

Zieht man die Querabmessungen des Stabes (in Richtung der zur Geschwindigkeit senkrechten y- und z-Achse) in Betracht, so überzeugt man sich leicht, daß diese sich nicht ändern. Das Volumen des Stabes verringert sich also im gleichen Maße wie seine Längsabmessungen. Dieser Schluß gilt auch für Körper

beliebiger Gestalt. Ist V das Volumen des Körpers in dem Bezugssystem, in welchem er ruht, so ergibt sich sein Volumen V' in einem System, gegenüber welchem sich der Körper mit der Geschwindigkeit v bewegt, zu

$$V' = V\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{15,08}$$

Wir betrachten nun zwei gleiche, parallele Stäbe, deren Relativgeschwindigkeit zu ihrer Längsachse parallel ist. Von dem Bezugssystem aus, welches mit dem ersten Stab verbunden ist, erscheint dann der zweite verkürzt und umgekehrt. Die Dinge liegen hier genauso wie in unserem Beispiel mit den Uhren. Ebenso wie dort handelt es sich nicht um ein Paradoxon. Der Unterschied in den ermittelten Werten für die Länge rührt von der verschiedenen Definition der Gleichzeitigkeit her. Die Koordinaten der Stabenden, die in einem Bezugssystem gleichzeitig sind, sind es in dem anderen System nicht mehr (nur noch quasi-gleichzeitig). Es sei x_a die Lage des Endes A im Zeitpunkt t_a, x_b die Lage des Endes B im Zeitpunkt t_b. Die entsprechenden Werte im anderen Bezugssystem bezeichnen wir mit den gleichen Buchstaben, aber mit einem Strich. Wegen der Invarianz des raumartigen Intervalls gilt

$$(x_a - x_b)^2 - c^2(t_a - t_b)^2 = (x'_a - x'_b)^2 - c^2(t'_a - t'_b)^2\,. \tag{15,09}$$

Setzen wir hier $t_a = t_b$, so wird $t'_a \neq t'_b$ und damit

$$|x_a - x_b| < |x'_a - x'_b|\,. \tag{15,10}$$

Links steht die Länge des Stabes im ungestrichenen System; die Größe rechts wäre die Länge des Stabes im gestrichenen System, wenn er dort ruhte [dann braucht man nämlich $x'_a(t')$ und $x'_b(t')$ nicht mehr unbedingt auf denselben Zeitpunkt t' zu beziehen, sondern könnte auch $x'_a = x'_a(t'_a)$ und $x'_b = x'_b(t'_b)$ mit $t'_a \neq t'_b$ wählen].

Setzen wir dagegen $t'_a = t'_b$, so wird $t_a \neq t_b$ und damit

$$|x_a - x_b| > |x'_a - x'_b|\,. \tag{15,11}$$

Die linke Seite ist jetzt die Länge des Stabes in dem Bezugssystem, in welchem er ruht, während die rechte Seite seine Länge in einem beliebigen, gestrichenen System ist.

Bei diesen Überlegungen war die Symmetrie der Formeln hinsichtlich des gestrichenen und des ungestrichenen Bezugssystems von Anfang an klar; auch die Überlegungen selbst könnten deshalb trivial erscheinen. Wir haben sie nur durchgeführt, um nochmals die Aufmerksamkeit auf den engen Zusammenhang zwischen den Begriffen Gleichzeitigkeit und Länge zu lenken.

§ 16 Die Relativgeschwindigkeit

In der vorrelativistischen Mechanik wurde die Relativgeschwindigkeit zweier Körper als Differenz ihrer Geschwindigkeiten definiert. Die in einem bestimmten Bezugssystem gemessene Geschwindigkeit eines Körpers sei $\mathfrak{u}$, die eines anderen

$\mathfrak{v}$. Es wurde angenommen, daß dann die Geschwindigkeit des zweiten Körpers gegenüber dem ersten $\mathfrak{w} = \mathfrak{v} - \mathfrak{u}$ betrage. Diese Definition ist wohl gegenüber einer GALILEI-Transformation, nicht aber gegenüber einer LORENTZ-Transformation invariant. Wir können sie deshalb nicht in die Relativitätstheorie übernehmen, sondern müssen sie durch eine andere ersetzen. Das nachfolgende Beispiel zeigt deutlich, daß der Ausdruck $\mathfrak{w} = \mathfrak{v} - \mathfrak{u}$ in der Relativitätstheorie keine physikalische Bedeutung haben kann. Die Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ mögen entgegengesetzte Richtungen haben und ihrem Betrage nach dicht unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen (oder sogar gleich dieser sein). Dann wäre die „Geschwindigkeit" $\mathfrak{w}$ nahezu (oder genau) gleich der doppelten Lichtgeschwindigkeit, was offenbar unsinnig ist.

Wir geben deshalb eine neue Definition der Relativgeschwindigkeit, die mit den Forderungen der Relativitätstheorie in Einklang steht und eine unmittelbare physikalische Bedeutung besitzt. In einem bestimmten Bezugssystem sei die Geschwindigkeit des einen Körpers $\mathfrak{u}$, die des zweiten $\mathfrak{v}$. Wir können nun ein neues (gestrichenes) Bezugssystem einführen, in dem einer der Körper (zum Beispiel der erste) ruht. Dann deuten wir die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ des zweiten Körpers in diesem Bezugssystem als Relativgeschwindigkeit dieses Körpers gegenüber dem ersten. Wir werden sehen, daß der Betrag $|\mathfrak{v}'|$ der Relativgeschwindigkeit in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ symmetrisch ist. Die Relativgeschwindigkeit zweier Körper ist also unabhängig davon, welchen von beiden (in dem neuen Bezugssystem) wir als ruhend betrachten.

Zur Erläuterung des physikalischen Sinnes dieser Definition der Relativgeschwindigkeit betrachten wir folgendes Beispiel. Wir beobachten von der Erde aus zwei Flugzeuge, deren Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ seien. Das erste Flugzeug soll mit einer Funkortungsanlage versehen sein, mit deren Hilfe die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeuges gegenüber dem ersten gemessen werden kann. Die so ermittelte Geschwindigkeit entspricht unserer Definition der Relativgeschwindigkeit.

Wir müssen nun diese Relativgeschwindigkeit durch die Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ (die Geschwindigkeiten der vom Erdboden aus beobachteten Flugzeuge) ausdrücken. Dazu schreiben wir die in § 10 abgeleiteten allgemeinen Formeln für die LORENTZ-Transformation auf. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}' &= \mathfrak{r} - \mathfrak{V}t + (a_{00} - 1)\,\frac{\mathfrak{V}}{V^2}\,((\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}) - V^2 t), \\ t' &= a_{00}\left(t - \frac{(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{V})}{c^2}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (16{,}01)$$

und die inverse Transformation

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r} &= \mathfrak{r}' + \mathfrak{V}t' + (a_{00} - 1)\,\frac{\mathfrak{V}}{V^2}\,((\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}') + V^2 t'), \\ t &= a_{00}\left(t' + \frac{(\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{V})}{c^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (16{,}02)$$

Dabei haben wir die Bezeichnung (10,15) benutzt und gesetzt

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{16,03}$$

Damit das erste Flugzeug (mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ gegenüber dem Erdboden) im gestrichenen System ruht, müssen wir setzen

$$V_x = u_x; \quad V_y = u_y; \quad V_z = u_z. \tag{16,04}$$

Die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeuges beträgt, vom Erdboden aus gemessen,

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \tag{16,05}$$

dagegen vom ersten Flugzeug aus gemessen,

$$\mathfrak{v}' = \frac{d\mathfrak{r}'}{dt'}. \tag{16,06}$$

Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ergibt sich durch Differentiation der Formeln (16,01) und (16,02) zu

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} - \mathfrak{u} + (a_{00} - 1)\frac{\mathfrak{u}}{u^2}((\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}) - u^2)}{a_{00}\left(1 - \frac{(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v})}{c^2}\right)}, \tag{16,07}$$

und

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}' + \mathfrak{u} + (a_{00} - 1)\frac{\mathfrak{u}}{u^2}((\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}') + u^2)}{a_{00}\left(1 + \frac{(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}')}{c^2}\right)}. \tag{16,08}$$

Dabei ist nach (16,03) und (16,04)

$$a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{16,09}$$

Die Gleichung (16,08) ist die Auflösung der Gleichung (16,07) nach $\mathfrak{v}$. Da die LORENTZ-Transformation in den Koordinaten und der Zeit linear ist, sind die Geschwindigkeitskomponenten v'_x, v'_y, v'_z im gestrichenen System gebrochene lineare Funktionen der Komponenten v_x, v_y, v_z im ungestrichenen System.

Für das Quadrat des Vektors $\mathfrak{v}'$, d. h. der Relativgeschwindigkeit der beiden Flugzeuge, ergibt sich

$$v'^2 = \frac{(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}]^2}{\left(1 - \frac{(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v})}{c^2}\right)^2}. \tag{16,10}$$

Wie bereits erwähnt, ist dieser Ausdruck symmetrisch in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. Wir beweisen nun, daß aus den Ungleichungen $u^2 < c^2$ und $v^2 < c^2$ die Ungleichung $v'^2 < c^2$ folgt, unabhängig von der Richtung der Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. Es gilt

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v})}{c^2}\right)^2}. \tag{16,11}$$

Wegen $u^2 < c^2$ und $v^2 < c^2$ ist die rechte Seite stets positiv; folglich ist auch die linke Seite positiv und es gilt $v'^2 < c^2$. Im Grenzfall, daß eine der Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ oder $\mathfrak{v}$ gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, wird die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ ebenfalls gleich der Lichtgeschwindigkeit. Das entspricht der Grundvoraussetzung, auf der die ganze Relativitätstheorie aufgebaut ist.

Wir bemerken noch, daß das Quadrat der Relativgeschwindigkeit gegenüber einer LORENTZ-Transformation invariant ist. Darunter verstehen wir folgendes: Ersetzt man in der Formel (16,10) die Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ der beiden Flugzeuge relativ zum Erdboden durch deren Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}''$ und $\mathfrak{v}''$ gegenüber irgendeinem dritten Bezugssystem (etwa einem dritten Flugzeug), so sind zwar $\mathfrak{u}''$ und $\mathfrak{v}''$ verschieden von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, aber trotzdem behält der Ausdruck (16,10) für v'^2 den früheren Wert bei, wie es wegen der Bedeutung von v'^2 als Quadrat der Relativgeschwindigkeit auch sein muß.

Die Formel (16,07) vereinfacht sich, wenn im betrachteten Bezugssystem die Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ parallel oder senkrecht zueinander sind. Wir erhalten dann im ersten Fall

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} - \mathfrak{u}}{1 - \frac{(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v})}{c^2}} \qquad (\text{für } [\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}] = 0) \tag{16,12}$$

und im zweiten Fall

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \mathfrak{u} \qquad (\text{für } (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}) = 0). \tag{16,13}$$

Die Formel (16,12) (in der die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ gewöhnlich mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen wird), bezeichnet man als EINSTEINsches Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

Allgemein gilt folgende Behauptung: Betrachtet man den „Geschwindigkeitsraum" als einen LOBATSCHEWSKYschen Raum, so stimmt das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten mit der Regel für die Vektoraddition der LOBATSCHEWSKYschen Geometrie überein. Diese Behauptung soll im folgenden Paragraphen bewiesen werden.

§ 17 Der LOBATSCHEWSKY-EINSTEINsche Geschwindigkeitsraum

Wir betrachten die Relativgeschwindigkeit zweier Körper, deren Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ sich nur um eine infinitesimale Größe unterscheiden. Den durch die Lichtgeschwindigkeit c dividierten Betrag dieser Relativgeschwindigkeit bezeichnen wir mit ds. Setzen wir in dem Ausdruck (16,10) $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$, so ergibt sich nach Division durch c^2

$$ds^2 = \frac{c^2(d\mathfrak{v})^2 - [\mathfrak{v} \times d\mathfrak{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2} \tag{17,01}$$

oder

$$ds^2 = \frac{(c^2 - v^2)(d\mathfrak{v})^2 + (\mathfrak{v}\ d\mathfrak{v})^2}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17,02}$$

Der Ausdruck (17,01) ist, entsprechend seiner physikalischen Bedeutung (er ist dem Quadrat der unendlich kleinen Relativgeschwindigkeit proportional), invariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation. Man kann dies auch unmittelbar nachprüfen, indem man die Größen v_x, v_y, v_z durch linear-gebrochene Funktionen von v_x', v_y', v_z' gemäß (16,08) ersetzt; dann hängt ds^2 von den Größen v_x', v_y', v_z', dv_x', dv_y', dv_z' in der gleichen Weise ab wie vorher von den Größen v_x, v_y, v_z, dv_x, dv_y, dv_z.

Den Ausdruck (17,01) oder (17,02) betrachten wir nun als Quadrat des Längenelementes in einem Geschwindigkeitsraum. Das ist der gleiche Raum, in welchem man in der gewöhnlichen Mechanik den Hodographen einer Bewegung konstruiert. Im vorliegenden relativistischen Fall hat dieser Raum alle Eigenschaften eines LOBATSCHEWSKYschen Raumes, wobei die durch c dividierten Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z die sogenannten BELTRAMIschen Koordinaten sind (vgl. W. F. KAGAN [11], Formel CVIII, auf S. 453). Die Eigenschaften des LOBATSCHEWSKYschen Raumes lassen sich an Hand des Ausdrucks (17,01) ableiten.

Eine Kurve im LOBATSCHEWSKYschen Raum kann man durch Vorgabe der Größen v_x, v_y, v_z als Funktionen eines Parameters p definieren. Entsprechen die Endpunkte dieser Kurve den Parameterwerten p_1 und p_2, so wird ihre Bogenlänge durch die Formel

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{2F}\, dp \tag{17,03}$$

gegeben. Dabei ist

$$F = \frac{1}{2} \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2 - v^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathfrak{v} \cdot \dot{\mathfrak{v}})^2}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17,04}$$

Der Punkt bedeutet die Ableitung nach dem Parameter p. Wir wollen die Gleichung der LOBATSCHEWSKY-Geraden, d. h. der kürzesten Verbindung zwischen den Punkten p_1 und p_2 bestimmen. Zu diesem Zweck müssen wir die Variation des Integrals (17,03) gleich Null setzen, also für die LAGRANGE-Funktion

$$L = \sqrt{2F} \tag{17,05}$$

die EULER-LAGRANGEschen Gleichungen aufstellen. Diese haben die Form

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_x} - \frac{\partial L}{\partial v_x} = 0 \quad \text{usw.} \tag{17,06}$$

oder

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\sqrt{2F}}\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x}\right) - \frac{1}{\sqrt{2F}}\frac{\partial F}{\partial v_x} = 0 \quad \text{usw.} \tag{17,07}$$

Den beliebigen Parameter p wählen wir nun so, daß

$$\frac{dF}{dp} = 0, \quad F = \text{const} \tag{17,08}$$

gilt. Bei dieser Wahl des Parameters p sind die Gleichungen (17,07) äquivalent mit

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} - \frac{\partial F}{\partial v_x} = 0 \quad \text{usw.} \tag{17,09}$$

Da die Funktion F den Parameter p nicht explizit enthält, finden wir, daß

$$\dot{v}_x \frac{\partial v}{\partial \dot{v}_x} + \dot{v}_y \frac{\partial F}{\partial \dot{v}_y} + \dot{v}_z \frac{\partial F}{\partial \dot{v}_z} - F = \text{const} \tag{17,10}$$

ein Integral der EULER-LAGRANGEschen Gleichungen ist. F ist aber eine homogene, quadratische Form der $\dot{v}_x$, $\dot{v}_y$, $\dot{v}_z$, und folglich ist die Größe (17,10) gleich F; dementsprechend ist die Bedingung (17,08) eine Folge der Gleichungen (17,09).

Wir schreiben nun die Gleichungen (17,09) ausführlicher hin und bestimmen ihre Lösungen. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = \frac{\dot{v}_x}{c^2 - v^2} + v_x \frac{(\mathfrak{v} \cdot \dot{\mathfrak{v}})}{(c^2 - v^2)^2}, \tag{17,11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = v_x\left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{2(\mathfrak{v} \cdot \dot{\mathfrak{v}})^2}{(c^2 - v^2)^2}\right) + \dot{v}_x \frac{(\mathfrak{v} \cdot \dot{\mathfrak{v}})}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17,12}$$

Führen wir einen Vektor $\mathfrak{w}$ mit den Komponenten

$$w_x = \frac{\dot{v}_x}{c^2 - v^2}; \quad w_y = \frac{\dot{v}_y}{c^2 - v^2}; \quad w_z = \frac{\dot{v}_z}{c^2 - v^2} \tag{17,13}$$

ein, so lauten die Formeln (17,11) und (17,12)

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = w_x + v_x \frac{(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w})}{c^2 - v^2}; \tag{17,14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = v_x \left(w^2 + 2 \frac{(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w})^2}{c^2 - v^2}\right) + w_x (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w}). \tag{17,15}$$

Differenzieren wir (17,14) nach dem Parameter p und drücken $\dot{\mathfrak{v}}$ durch $\mathfrak{w}$ aus, so erhalten wir

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial F}{\partial \dot{v}_x} = \dot{w}_x + v_x \frac{(\mathfrak{v} \cdot \dot{\mathfrak{w}})}{c^2 - v^2} + v_x \left(w^2 + 2 \frac{(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w})^2}{c^2 - v^2}\right) + w_x (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w}). \tag{17,16}$$

Nun setzen wir (17,15) und (17,16) in die EULER-LAGRANGEschen Gleichungen (17,09) ein; diese nehmen dann die Form

$$\dot{w}_x + v_x \frac{(\mathfrak{v} \cdot \dot{\mathfrak{w}})}{c^2 - v^2} = 0 \quad \text{usw.} \tag{17,17}$$

an. Wie man leicht sieht, folgt aus den drei Gleichungen (17,17) auch $(\mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{w}}) = 0$. Damit sind die Gleichungen (17,17) mit

$$\dot{w}_x = 0, \qquad \dot{w}_y = 0, \qquad \dot{w}_z = 0 \tag{17,18}$$

oder in vektorieller Schreibweise mit

$$\dot{\mathfrak{w}} = 0 \tag{17,19}$$

äquivalent. Die EULER-LAGRANGEschen Gleichungen führen also zu der Bedingung, daß der durch (17,13) definierte Vektor $\mathfrak{w}$ konstant sein muß. Da nun $\mathfrak{w}$ proportional zu $\dot{\mathfrak{v}}$ ist, gilt dann auch für das Vektorprodukt

$$[\mathfrak{w} \times \mathfrak{v}] = \text{const.} \tag{17,20}$$

Wir haben also zwei weitere linear unabhängige Integrale der EULER-LAGRANGEschen Gleichungen erhalten.

Aus den gefundenen Integralen folgt, daß die Gleichungen der LOBATSCHEWSKY-Geraden im Geschwindigkeitsraum *lineare* Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z sind. Wie wir wissen, hat die der LORENTZ-Transformation entsprechende Transformation der Geschwindigkeitskomponenten die folgende Gestalt: Die neuen Komponenten sind gebrochene lineare Funktionen der alten mit dem gleichen Nenner. Durch diese Transformation wird also die Linearität der obigen Beziehungen nicht beeinträchtigt.

Wir wollen nun die Länge der LOBATSCHEWSKY-Geraden zwischen den Punkten $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_2$ bestimmen und den Zusammenhang zwischen dieser Länge und der Relativgeschwindigkeit zweier Körper untersuchen, die sich mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ bewegen. Da die Koordinaten der Punkte dieser

Strecke durch lineare Beziehungen verknüpft sind, können wir folgende Parameterdarstellung wählen:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mu\,(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1) \qquad (0 \leqslant \mu \leqslant 1). \tag{17,21}$$

Gehen wir damit in (17,04) ein, so ergibt sich

$$2F = \frac{c^2\,(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)^2 - [\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2]^2}{(c^2 - v^2)^2}\,\dot{\mu}^2. \tag{17,22}$$

Mit der Abkürzung

$$a = \sqrt{c^2\,(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)^2 - [\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2]^2} \tag{17,23}$$

erhalten wir nach Formel (17,03) für die Länge der Strecke

$$s = \int_0^1 \frac{a\,d\mu}{c^2 - v^2}. \tag{17,24}$$

Dieses Integral berechnet man am einfachsten mit Hilfe der Substitution

$$\mu = \frac{(c^2 - v_1^2)\,\xi}{c^2 - (\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2) + \left((\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2) - v_1^2\right)\xi}. \tag{17,25}$$

Damit ergibt sich

$$s = \int_0^1 \frac{a\,b\,d\xi}{b^2 - a^2\xi^2} = \frac{1}{2}\lg\frac{b+a}{b-a}, \tag{17,26}$$

wobei wir

$$b = c^2 - (\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2) \tag{17,27}$$

gesetzt haben. Die Koeffizienten in der Substitution (17,25) sind gerade so gewählt, daß ξ zwischen 0 und 1 variiert und daß der Nenner im Integranden von (17,26) die erste Potenz von ξ nicht enthält. Wir erhalten also

$$\frac{a}{b} = \tanh s. \tag{17,28}$$

Quadrieren wir diese Relation und multiplizieren mit c^2, so können wir dafür schreiben

$$\frac{(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2]^2}{\left(1 - \frac{(\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2)}{c^2}\right)} = c^2 \tanh^2 s. \tag{17,29}$$

Der Vergleich dieses Ausdruckes mit der Gleichung (16,10) zeigt sofort, daß links das Quadrat der Relativgeschwindigkeit steht. Die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}'$

hängt also mit der Länge s des Abschnittes der LOBATSCHEWSKY-Geraden folgendermaßen zusammen:

$$|\mathfrak{v}'| = c \tanh s. \tag{17,30}$$

Die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ mögen nun die gleiche Richtung haben. Wenn wir ihren Beträgen die entsprechenden Abschnitte der LOBATSCHEWSKY-Geraden zuordnen, also setzen

$$v_1 = c \tanh s_1; \qquad v_2 = c \tanh s_2, \tag{17,31}$$

so wird der Abschnitt der LOBATSCHEWSKY-Geraden, welcher der Relativgeschwindigkeit entspricht, gleich der Differenz der Strecken s_2 und s_1. Die Relativgeschwindigkeit wird also

$$v' = c \tanh (s_2 - s_1) = c\,\frac{\tanh s_2 - \tanh s_1}{1 - \tanh s_2 \tanh s_1} \tag{17,32}$$

oder

$$v' = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}}. \tag{17,33}$$

Das ist das EINSTEINsche Additionstheorem (in diesem Fall eigentlich ein Subtraktionstheorem) der Geschwindigkeiten.

Wir betrachten nun den Winkel zwischen den Relativgeschwindigkeiten zweier Körper. Beziehen sich die Geschwindigkeiten auf einen Punkt, der als ruhend angenommen wird, so ergibt sich der Kosinus dieses Winkels nach der gewöhnlichen Formel

$$\cos(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) = \frac{(\mathfrak{v}_2 \cdot \mathfrak{v}_1)}{|v_1| \cdot |v_2|}. \tag{17,34}$$

Beziehen sich dagegen die Geschwindigkeiten auf einen Punkt, der sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bewegt, so bestimmt sich der Winkel zwischen den Relativgeschwindigkeiten aus einer komplizierteren Formel, die auf Grund der nachfolgenden Überlegungen leicht abzuleiten ist. Zunächst führt man eine LORENTZ-Transformation durch, so daß der mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bewegte Punkt zur Ruhe kommt. Dann gilt die gewöhnliche Formel (17,34)

$$\cos\alpha = \cos(\mathfrak{v}_1', \mathfrak{v}_2') = \frac{(\mathfrak{v}_1' \cdot \mathfrak{v}_2')}{|v_1'| \cdot |v_2'|}. \tag{17,35}$$

Dabei sind $\mathfrak{v}_1'$ und $\mathfrak{v}_2'$ die Geschwindigkeiten der Körper in dem neuen System (sie ergeben sich aus (16,07), indem man $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{v}_1$ bzw. durch $\mathfrak{v}_2$ ersetzt). Drücken wir nun $\mathfrak{v}_1'$ und $\mathfrak{v}_2'$ durch $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ aus, so erhalten wir nach einer einfachen Rechnung

$$\cos\alpha = \frac{((\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{u}) \cdot (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{u})) - \frac{1}{c^2}([\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{u}] \cdot [\mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{u}])}{\sqrt{(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{u})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{u}]^2}\,\sqrt{(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{u})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{u}]^2}}. \tag{17,36}$$

Das ist aber der Ausdruck für den Kosinus eines Dreieckswinkels im LOBATSCHEWSKYschen Raum (der Winkel an der Ecke $\mathfrak{u}$ in dem Dreieck mit den Scheitelpunkten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$).

Die Formel (17,36) läßt sich auch auf eine andere Weise ableiten. Unser ursprünglicher Ausdruck (17,01) für das Quadrat des Längenelementes im LOBATSCHEWSKYschen Raum hat die Form

$$ds^2 = \frac{c^2 (d\mathfrak{v})^2 - [\mathfrak{v} \times d\mathfrak{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17,37}$$

Er entspricht einer „Verschiebung" um $d\mathfrak{v}$ im „Punkt" $\mathfrak{v}$. Für eine Verschiebung um $\delta\mathfrak{v}$ im selben Punkt erhalten wir

$$\delta s^2 = \frac{c^2 (\delta\mathfrak{v})^2 - [\mathfrak{v} \times \delta\mathfrak{v}]^2}{(c^2 - v^2)^2}. \tag{17,38}$$

Den Kosinus des Winkels zwischen diesen Verschiebungen können wir in invarianter Weise durch die Formel

$$ds\ \delta s \cos\alpha = \frac{c^2 d\mathfrak{v} \cdot \delta\mathfrak{v} - ([\mathfrak{v} \times d\mathfrak{v}] \cdot [\mathfrak{v} \times \delta\mathfrak{v}])}{(c^2 - v^2)^2} \tag{17,39}$$

definieren. Diese Formel kann man als die Definition eines Winkels in der LOBATSCHEWSKYschen Geometrie ansehen. Schreiben wir nun in (17,36) $\mathfrak{v}$ statt $\mathfrak{u}$ und betrachten die Verschiebungen

$$d\mathfrak{v} = \varepsilon (\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}); \qquad \delta\mathfrak{v} = \eta (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}), \tag{17,40}$$

die vom Scheitelpunkt $\mathfrak{v}$ ausgehen und die Richtungen zweier Seiten des Dreiecks haben, so wird der aus (17,39) folgende Ausdruck für $\cos\alpha$ mit (17,36) identisch.

Der Winkel zwischen Relativgeschwindigkeiten läßt sich also als Winkel in einem LOBATSCHEWSKY-Dreieck auffassen. Sind drei Körper vorhanden, die sich mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ bewegen, so liegen die Ecken des entsprechenden Dreiecks in den Punkten $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$. Die Relativgeschwindigkeiten entsprechen dann den Seiten dieses Dreieckes, und die Winkel zwischen ihnen sind den Winkeln des Dreieckes gleich. Eine solche Konstruktion kann man auch in der nichtrelativistischen Kinematik durchführen; dort ist aber die Geometrie des Geschwindigkeitsraumes euklidisch, während in der Relativitätstheorie dieser Raum eine LOBATSCHEWSKYsche Geometrie besitzt.

Die Gültigkeit der LOBATSCHEWSKYschen Geometrie im Geschwindigkeitsraum kann experimentell geprüft werden. Wir denken dabei an den Versuch von FIZEAU zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit in einem bewegten Medium und an die astronomische Aberration, die von BRADLEY entdeckt wurde.

Beim Versuch von FIZEAU vergleicht man die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem ruhenden mit der in einem bewegten Medium. Die Lichtausbreitung in einem Medium ist ein komplizierter Prozeß, an dem die darin enthaltenen Ladungen beteiligt sind und dem man eine Geschwindigkeit c/n zuschreiben kann (n ist der Brechungsindex des Mediums). Bewegt sich das Medi-

um selbst mit einer Geschwindigkeit v in der Ausbreitungsrichtung des Lichtes, so ist $w = c/n$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes relativ zum Medium. Die Geschwindigkeit w' gegenüber einem ruhenden Bezugssystem ergibt sich nach der EINSTEINschen Formel zu

$$w' = \frac{w + v}{1 + \frac{w \cdot v}{c^2}}. \tag{17,41}$$

Setzen wir darin $w = c/n$ und berücksichtigen nur die Glieder erster und nullter Ordnung in c, so erhalten wir

$$w' = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = w + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{17,42}$$

Der Faktor von v wird als FRESNELscher Mitführungskoeffizient bezeichnet. Der Umstand, daß dieser Faktor von Eins verschieden ist, zeigt, daß bei der Addition von Geschwindigkeiten das EINSTEINsche Additionstheorem, welches der LOBATSCHEWSKYschen Geometrie entspricht, und nicht die vorrelativistische Formel, der die euklidische Geometrie zugrunde liegt, benutzt werden muß.

Unter der astronomischen Aberration versteht man die Erscheinung, daß in zwei relativ zueinander bewegten Bezugssystemen die Richtungen zum gleichen Stern nicht übereinstimmen, sondern sich um den Aberrationswinkel unterscheiden. Zur Bestimmung dieser Größe müssen wir zunächst das LOBATSCHEWSKY-Dreieck mit den Scheitelpunkten $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{a}c$ konstruieren, wobei $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ die Geschwindigkeiten der beiden Bezugssysteme sind, während der Vektor $\mathfrak{a}$ ein Einheitsvektor in Richtung der vom Stern kommenden Lichtwelle ist. In dem Dreieck $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ ist der Winkel an der Spitze $\mathfrak{v}_3$ gleich Null [s. Formel (17,44)]; die Summe der Winkel an den Spitzen $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ ist aber um die Größe der Aberration kleiner als π (wäre das Dreieck euklidisch, so müßte diese Summe natürlich genau π sein).

Die entsprechende trigonometrische Rechnung ist auf Grund der Formel

$$\cos\alpha_1 = \frac{(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)\cdot(\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_1) - \frac{1}{c^2}\left([\mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_1]\cdot[\mathfrak{v}_3 \times \mathfrak{v}_1]\right)}{\sqrt{(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_1]^2}\;\sqrt{(\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}_3 \times \mathfrak{v}_1]^2}} \tag{17,43}$$

sowie der beiden daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 hervorgehenden Formeln leicht durchzuführen.

Wegen $v_3^2 = c^2$ ist zunächst

$$\cos\alpha_3 = 1; \quad \alpha_3 = 0. \tag{17,44}$$

Wir wählen nun das Bezugssystem so, daß

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = 0 \tag{17,45}$$

gilt und setzen

$$|\mathfrak{v}_1| = |\mathfrak{v}_2| = v; \qquad (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v}_1) = -(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v}_2) = v \cos \beta. \tag{17,46}$$

Die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme ist dann

$$v_{12} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}. \tag{17,47}$$

Aus der Formel (17,43) finden wir

$$\cos \alpha_1 = \frac{v - c \cos \beta}{c - v \cos \beta}; \qquad \sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{c^2 - v^2} \sin \beta}{c - v \cos \beta} \tag{17,48}$$

und analog

$$\cos \alpha_2 = \frac{v + c \cos \beta}{c + v \cos \beta}; \qquad \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{c^2 - v^2} \sin \beta}{c + v \cos \beta}. \tag{17,49}$$

Bezeichnen wir den Wert der Aberration mit δ, so können wir schreiben

$$\delta = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2. \tag{17,50}$$

Die vorstehenden Formeln liefern dann

$$2 \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2 v^2 \sin^2 \beta}{c^2 - v^2 \cos^2 \beta}, \tag{17,51}$$

also

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{v \sin \beta}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{17,52}$$

In den astronomischen Beobachtungen wird der Standort eines Sternes bei verschiedenen Bewegungsrichtungen der Erde auf ihrer Bahn verglichen (jährliche Aberration). Da in alle Überlegungen nur die Relativgeschwindigkeiten der Körper eingehen, welche die vom Stern ausgehenden Strahlen empfangen, spielt natürlich die Gesamtbewegung des Sonnensystems relativ zu den Fixsternen keine Rolle, sofern diese Geschwindigkeit in den betrachteten Zeiträumen konstant ist. Es ist also nicht möglich, aus der Aberration die Geschwindigkeit eines Sterns gegenüber der Erde oder der Sonne zu bestimmen.

KAPITEL II

RELATIVITÄTSTHEORIE IN TENSORIELLER FORM

§ 18 Eine Bemerkung über die Kovarianz von Gleichungen

Bei der Diskussion der Grundlagen der Relativitätstheorie in § 6 haben wir einige allgemeine Forderungen aufgestellt, denen die Gleichungen, die den Ablauf physikalischer Vorgänge beschreiben, genügen müssen. Es sind jene Gleichungen gemeint, deren Form nicht von den Anfangsbedingungen abhängt. Diese Forderungen bestimmen das Gesetz, nach welchem sich die Gleichungen beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen transformieren. Nach dem Relativitätsprinzip muß das Transformationsgesetz für die unabhängigen Variablen und die unbekannten Funktionen so beschaffen sein, daß die Gleichungen in *einem* Inertialsystem ebensolchen Gleichungen (d. h. Gleichungen der *gleichen mathematischen Form*) in irgendeinem anderen Inertialsystem äquivalent sind.

Diese Forderung wurde schon zur Ableitung der LORENTZ-Transformation benutzt. Wir erhielten diese Transformation nämlich aus der Bedingung, daß beim Übergang zu einem anderen Inertialsystem die Gleichung für die Ausbreitung einer Wellenfront

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \tag{18,01}$$

ihre Form behalten muß, und daß bei diesem Übergang eine geradlinige und gleichförmige Bewegung in eine ebensolche Bewegung übergeht.

Durch die genannten Forderungen haben wir also bereits die Transformation der unabhängigen Variablen (Koordinaten und Zeit) festgelegt.

Wir müssen nun noch die möglichen Transformationsgesetze für die in den Gleichungen auftretenden unbekannten Funktionen untersuchen.

Das einfachste Transformationsgesetz ist das der Invarianz. In der Gleichung (18,01) etwa ist die unbekannte Funktion die Größe ω, die in der Gleichung für die Wellenfront

$$\omega\,(x, y, z, t) = 0 \tag{18,02}$$

auftritt. Die transformierte Funktion ω', welche die Gleichung für die Wellenfront in den neuen Variablen

$$\omega'\,(x', y', z', t') = 0 \tag{18,03}$$

liefert, ist einfach gleich der ursprünglichen Funktion ω; ihre Form ergibt sich aus der Bedingung

$$\omega'\,(x', y', z', t') \equiv \omega\,(x, y, z, t). \tag{18,04}$$

In den meisten Problemen bleibt aber die Form der Gleichungen nur dann erhalten, wenn eine LORENTZ-Transformation der unabhängigen Variablen von einer gewissen Transformation der unbekannten Funktionen begleitet wird. Man bezeichnet nun eine Gleichung als *kovariant,* wenn es eine Transformation für die unbekannten Funktionen mit der Eigenschaft gibt, daß die neuen Funktionen in den neuen Variablen Gleichungen derselben Form genügen wie die alten Funktionen in den alten Variablen. Die Forderung der Kovarianz der Gleichungen gegenüber einer LORENTZ-Transformation ist eine notwendige Folge des Relativitätsprinzips. Andererseits ist klar, daß nicht alle Gleichungen kovariant sind. Wir müssen deshalb nachprüfen, ob die Gleichungen, die in der Physik zur Beschreibung eines bestimmten physikalischen Prozesses benutzt werden (etwa die Gleichungen der Elektrodynamik oder die der Mechanik), auch wirklich kovariant sind. Ist das nicht der Fall, so müssen sie entsprechend abgeändert werden.

Die Prüfung der Kovarianz und die Aufstellung kovarianter Gleichungen erfordern eine Untersuchung der Größen mit den einfachsten Transformationsgesetzen. Dabei genügt es, wenn wir uns auf lineare Gesetze beschränken. Die vollständige Klassifikation der Größen nach ihren Transformationseigenschaften ist Gegenstand eines Teilgebietes der Gruppentheorie. Wir können dieses Problem hier nicht in voller Allgemeinheit behandeln, sondern wollen uns auf die Dinge beschränken, die zur Formulierung der Grundgleichungen der Mechanik und der Elektrodynamik erforderlich sind.

§ 19 Die Definition eines Tensors im dreidimensionalen Fall und eine Bemerkung über kovariante Größen

Die Formeln für eine Drehung der räumlichen Koordinatenachsen haben die Form

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \\ x_k &= \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} x_i', \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \right\} \tag{19,01}$$

wobei α_{ik} die Kosinus der Winkel zwischen den neuen und den alten Achsen sind. Einen dreidimensionalen Vektor können wir formal als eine Gesamtheit von Größen A_1, A_2, A_3 (seinen Komponenten) definieren, die sich bei einer Achsendrehung nach dem Gesetz

$$A_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} A_k \tag{19,02}$$

transformieren. Ein Spezialfall davon ist der Radiusvektor mit $A_1 = x_1$, $A_2 = x_2$, $A_3 = x_3$.

Nun seien zwei Vektoren gegeben, deren Komponenten A_i und B_i linear zusammenhängen:

$$B_i = \sum_{k=1}^{3} T_{ik} A_k. \tag{19,03}$$

Nach einer Achsendrehung geht diese Beziehung in eine analoge Beziehung zwischen den neuen Komponenten der Vektoren über:

$$B'_i = \sum_{k=1}^{3} T'_{ik} A'_k. \tag{19,04}$$

Dabei ist

$$T'_{ik} = \sum_{j,l=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{kl} T_{jl}. \tag{19,05}$$

Die alten und die neuen Komponenten des Vektors $\mathfrak{B}$ werden nämlich durch die gleichen Formeln verknüpft wie die des Vektors $\mathfrak{A}$. Drücken wir also nach diesen Formeln B'_i durch B_i und dann in (19,03) A_i durch A'_i aus, so erhalten wir (19,04) und (19,05).

Eine Gesamtheit von Größen T_{ik}, die sich bei einer Achsendrehung nach dem Gesetz (19,05) transformieren, bezeichnet man als einen Tensor oder genauer als einen Tensor zweiter Stufe (allgemein ist die Stufe eines Tensors gleich der Anzahl seiner Indizes).

Beispiele für Tensoren finden wir bereits in der nichtrelativistischen Mechanik. So hängen die Komponenten des Drehimpulses eines starren Körpers (B_i) mit den Komponenten seiner Winkelgeschwindigkeit (A_i) durch Beziehungen von der Form (19,03) zusammen, wobei T_{ik} der Tensor des Trägheitsmomentes ist. Ein anderes Beispiel liefert die Elastizitätstheorie. Dort verknüpfen Beziehungen derselben Art die Komponenten (dF_x, dF_y, dF_z) der auf eine kleine Fläche wirkenden Kraft mit den Projektionen (dS_x, dS_y, dS_z) dieser Fläche auf die Koordinatenebenen, wobei die Koeffizienten T_{ik} den Spannungstensor bilden. In beiden Fällen ist der Tensor T_{ik} symmetrisch in den Indizes. Es kommen aber auch Tensoren vor, die diese Eigenschaft nicht haben.

Wie aus der Formel (19,05) hervorgeht, transformieren sich die Komponenten eines Tensors wie die Produkte $x_i\xi_k$ der Koordinaten zweier Punkte (x_1, x_2, x_3) und (ξ_1, ξ_2, ξ_3), die auch zusammenfallen können ($x_i = \xi_i$).

Wir betrachten nun einen antisymmetrischen Tensor, dessen Komponenten also der Beziehung

$$T_{ik} + T_{ki} = 0 \tag{19,06}$$

genügen. Ein Beispiel dafür ist die antisymmetrische Kombination der Koordinatenprodukte zweier Punkte

$$T_{ik} = x_i\xi_k - \xi_i x_k. \tag{19,07}$$

Da die Indizes nur die drei Werte 1, 2, 3 annehmen, können wir statt der beiden Indizes einfach den dritten (übrigbleibenden) Index schreiben

$$\left.\begin{aligned} T_{23} &= -T_{32} = T_1, \\ T_{31} &= -T_{13} = T_2, \\ T_{12} &= -T_{21} = T_3. \end{aligned}\right\} \tag{19,08}$$

Allgemein gilt also, wenn (i, k, l) eine gerade Permutation der Indizes 1, 2, 3 ist,

$$T_{ik} = T_l. \tag{19,09}$$

Unter Benutzung der Antisymmetrie des Tensors T_{ik} können wir statt (19,05) auch schreiben

$$T'_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{p,\, q=1}^{3} (\alpha_{ip}\alpha_{kq} - \alpha_{iq}\alpha_{kp})\, T_{pq}. \tag{19,10}$$

Von den neun Gliedern dieser Summe sind drei (für $p = q$) gleich Null und die übrigen sechs paarweise einander gleich, so daß in Wirklichkeit nur drei verschiedene Glieder vorhanden sind. Es seien nun (i, k, l) und (p, q, r) gerade Permutationen der Zahlen (1, 2, 3). Setzen wir dann

$$\alpha_{ip}\alpha_{kq} - \alpha_{iq}\alpha_{kp} = \beta_{lr}, \tag{19,11}$$

und benutzen die Bezeichnung (19,09), so können wir die Formel (19,10) auch folgendermaßen schreiben:

$$T'_l = \sum_{r=1}^{3} \beta_{lr} T_r. \tag{19,12}$$

Betrachten wir jetzt die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \tag{19,13}$$

Wegen der Orthogonalität der Transformation ist $\Delta^2 = 1$. Besteht diese Transformation in einer einfachen Achsendrehung, so gilt $\Delta = +1$. Ist dagegen die Drehung noch mit einer Spiegelung (Änderung des Vorzeichens einer oder aller drei Koordinaten) verbunden, so gilt $\Delta = -1$. In beiden Fällen haben wir

$$\beta_{lr} = \Delta \cdot \alpha_{lr}. \tag{19,14}$$

Für eine einfache Achsendrehung gilt also

$$T'_l = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{lr} T_r, \tag{19,15}$$

dagegen für eine uneigentliche Orthogonaltransformation (Drehung mit Spiegelung)

$$T'_l = -\sum_{r=1}^{3} \alpha_{lr} T_r. \tag{19,16}$$

Diese Formeln zeigen, daß sich die Gesamtheit der Größen (19,08) bei einer einfachen Achsendrehung wie ein Vektor transformiert. Bei einer Drehung mit Spiegelung dagegen ist die Vektor-Transformation noch zusätzlich mit einer

Vorzeichenänderung aller Komponenten verbunden. Eine Gesamtheit von Größen mit einem solchen Transformationsgesetz bezeichnet man gewöhnlich als *axialen* Vektor, zum Unterschied von einem *polaren* Vektor, der sich stets nach der Formel (19,02) transformiert. Wie man leicht einsieht, ist das Vektorprodukt zweier polarer Vektoren ein axialer Vektor. Ein physikalisches Beispiel für einen polaren Vektor ist die elektrische Feldstärke, während die magnetische Feldstärke ein axialer Vektor ist (beides im Sinne der dreidimensionalen Vektorrechnung). Die Formeln (19,08) zeigen, daß ein axialer Vektor eigentlich ein Tensor zweiter Stufe ist. Benutzt man also die Bezeichnungen „Vektor" und „Tensor" im Sinne der Definitionen (19,02) und (19,05), so kommt man ohne den Ausdruck „axialer Vektor" aus.

Ganz entsprechend lassen sich im dreidimensionalen euklidischen Raum auch Tensoren höherer Stufe definieren. Ein Tensor dritter Stufe etwa ist eine Gesamtheit von Größen T_{ijk}, die sich bei einer Achsendrehung nach dem Gesetz

$$T'_{ijk} = \sum_{l,m,n=1}^{3} \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn} T_{lmn} \tag{19,17}$$

transformieren.

Auch eine Größe, die sich bei einer Achsendrehung gar nicht ändert, läßt sich als Tensor auffassen, und zwar als Tensor nullter Stufe. Eine solche Größe bezeichnet man als *Skalar* oder Invariante.

Ist ein Tensor zweiter Stufe gegeben, so kann man eine Kombination seiner Komponenten bilden, die sich bei einer Achsendrehung nicht ändert, d. h. sich wie ein Skalar verhält. Eine solche Linearkombination ist die Summe der Diagonalelemente eines Tensor zweiter Stufe, d. h. die Größe

$$T = \sum_i T_{ii}. \tag{19,18}$$

Unter Benutzung der Eigenschaft

$$\sum_i \alpha_{ij}\alpha_{il} = \delta_{jl} \tag{19,19}$$

der Koeffizienten einer orthogonalen Transformation kann man leicht nachweisen, daß aus (19,05) folgt

$$T' = T, \tag{19,20}$$

d. h. daß T tatsächlich ein Skalar ist. Analog kann man aus den Komponenten eines Tensors dritter Stufe die drei Vektoren

$$A_l = \sum_m T_{lmm}; \quad B_l = \sum_m T_{mlm}; \quad C_l = \sum_m T_{mml} \tag{19,21}$$

bilden.

Man kann nun fragen, ob es auch Größen verschiedener Stufen gibt, aus deren Komponenten einer bestimmten Stufe sich keine Linearkombinationen bilden lassen, die sich wie Größen geringerer Stufe transformieren. Solche Größen lassen sich tatsächlich konstruieren. Sie transformieren sich wie die harmonischen Poly-

nome, die mit den gewöhnlichen Kugelfunktionen zusammenhängen. Führt man nämlich die Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \qquad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \qquad z = \cos \vartheta$$

ein, so ist die mit r^l multiplizierte Kugelfunktion l-ter Ordnung ein harmonisches Polynom in x, y, z

$$r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_{lm}(x, y, z).$$

Die Ordnung l entspricht der Stufe des Tensor, aber die Anzahl der Komponenten einer bestimmten Stufe ist kleiner als bei einem Tensor. Nach einer Achsendrehung läßt sich das harmonische Polynom $P_{lm}(x', y', z')$ als Linearkombination der Polynome $P_{lm}(x, y, z)$ mit verschiedenen Werten von m ($m = -l, -l+1, \ldots, l$), aber demselben l ausdrücken. Die Koeffizienten dieser linearen Transformation kennzeichnen das Transformationsgesetz der Größen von der Stufe l.

Schließlich möchten wir noch folgendes bemerken. In unseren Überlegungen haben wir angenommen, daß die Tensoren (oder die ihnen analogen Größen) ihrer physikalischen Bedeutung nach völlig bestimmte Größen sind, und zwar einschließlich ihres Vorzeichens. Dementsprechend waren die Koeffizienten in den Transformationsformeln eindeutige Funktionen der Richtungskosinus α_{ik}. Man kann sich aber auch Größen vorstellen, die nur bis auf das Vorzeichen bestimmt sind (bei denen also nur die quadratischen Kombinationen festgelegt sind). In diesem Fall braucht man sich nicht mehr auf Transformationen zu beschränken, deren Koeffizienten eindeutig durch die α_{ik} gegeben werden, sondern kann auch Koeffizienten einführen, die nur bis auf ein Vorzeichen (das für alle Koeffizienten gleich ist) festgelegt sind. Dies führt zu einer neuen Art physikalischer Größen, den sogenannten Spinoren, und zu einer entsprechenden Verallgemeinerung der Kugelfunktionen mit ihren Transformationsgesetzen. Solche Größen werden in der Quantenmechanik benutzt.

Die Tensoren sind also nicht die einzigen geometrischen Größen mit bestimmten Transformationsgesetzen. Bei den üblichen (nichtquantentheoretischen) Anwendungen der Relativitätstheorie kann man sich aber auf die Betrachtung von Tensoren beschränken.

§ 20 Die Definition eines Vierervektors

Im vorigen Paragraphen haben wir an die Definition eines Tensors im dreidimensionalen euklidischen Raum erinnert. Nun müssen wir diese Definition auf das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum erweitern. Die Rolle der Achsendrehung wird dort von der LORENTZ-Transformation übernommen. Wesentlich neu ist dabei der Unterschied in den Vorzeichen der räumlichen und der zeitlichen Glieder in dem Ausdruck

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{20,01}$$

für das Quadrat eines infinitesimalen vierdimensionalen Intervalls. Wie wir sahen, kennzeichnet die Invarianz des Ausdruckes (20,01) die LORENTZ-

Transformation, ähnlich wie eine Drehung der räumlichen Achsen durch die Invarianz des Ausdruckes

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{20,02}$$

charakterisiert wird.

Der erwähnte Unterschied in den Vorzeichen ist für die Theorie sehr wichtig, denn darin kommt die grundlegende Verschiedenheit von Raum und Zeit zum Ausdruck. Man könnte zwar durch Einführung imaginärer Größen (imaginärer Koordinaten oder einer imaginären Zeit) erreichen, daß die Quadrate aller Differentiale in den Ausdruck ds^2 mit dem gleichen Vorzeichen eingehen. Dieser Weg wurde von MINKOWSKI und von UMOW beschritten. Die hierdurch erreichte Symmetrie der Formeln bezüglich des Raumes und der Zeit ist aber nach unserer Ansicht gar nicht zweckmäßig, denn sie verdeckt gerade den wesentlichen Unterschied zwischen Raum und Zeit und bringt dabei keine besonderen mathematischen Vorteile. Wir werden deshalb im folgenden mit reellen Koordinaten und einer reellen Zeit arbeiten.

Setzen wir

$$ct = x_0; \quad x = x_1; \quad y = x_2; \quad z = x_3, \tag{20,03}$$

so nimmt der Ausdruck für ds^2 folgende Form an:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\, dx_k^2. \tag{20,04}$$

Hierbei sind die Größen e_k gleich ± 1 [vgl. (8,25)]. Die direkte und die inverse LORENTZ-Transformation lauten dann

$$x_i' = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k, \tag{20,05}$$

$$x_i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} x_k'. \tag{20,06}$$

Die Differentiale der alten und der neuen Koordinaten hängen also folgendermaßen zusammen

$$dx_i' = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik}\, dx_k. \tag{20,07}$$

Die partiellen Ableitungen einer beliebigen Funktion φ nach den alten und nach den neuen Koordinaten werden verknüpft durch die Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i'} = \sum_{k=0}^{3} e_i a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \tag{20,08}$$

Wäre die quadratische Form (20,04) definit, so wären alle Zahlen e_k einander gleich, und die Koeffizienten in den Formeln (20,07) und (20,08) müßten übereinstimmen. Nun ist aber

$$e_0 = 1; \quad e_1 = e_2 = e_3 = -1, \tag{20,09}$$

und einige der sich entsprechenden Koeffizienten in diesen Formeln unterscheiden sich voneinander durch das Vorzeichen. Das Transformationsgesetz der Differentiale der Koordinaten stimmt also nicht mehr (wie bei rein räumlichen Drehungen) mit dem Transformationsgesetz der partiellen Ableitungen nach den Koordinaten überein. Dies muß bei der Definition des Vektors beachtet werden. Wir müssen diejenigen Vektoren, welche sich wie die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten transformieren, von denen unterscheiden, die sich wie die Differentiale der Koordinaten transformieren. Die ersteren bezeichnen wir als *kovariante*, die letzteren als *kontravariante* Vektoren. Die Komponenten eines kovarianten Vektors bezeichnen wir durch Buchstaben mit *unteren* Indizes, die Komponenten eines kontravarianten Vektors durch Buchstaben mit *oberen* Indizes. Das Transformationsgesetz lautet also für einen kovarianten Vektor

$$A_i' = \sum_{k=0}^{3} e_i a_{ik} A_k \tag{20,10}$$

und für einen kontravarianten Vektor

$$A'^{\,i} = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} A^k. \tag{20,11}$$

Diese Formeln lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$A_i' = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} A_k, \tag{20,12}$$

$$A'^{\,i} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} A^k. \tag{20,13}$$

Wir weisen darauf hin, daß man bei den Koordinaten und ihren Differentialen eine Ausnahme von der Regel über die Stellung der Indizes (oben bzw. unten) macht: Nach der allgemeinen Regel müßten wir schreiben dx^0, dx^1, dx^2, dx^3 und nicht dx_0, dx_1, dx_2, dx_3, wie wir es, dem Brauche folgend, getan haben.

Ist ein kovarianter Vektor A_i gegeben, so können wir stets den entsprechenden kontravarianten Vektor bilden, indem wir setzen

$$A^i = e_i A_i. \tag{20,14}$$

Beide Vektoren sind nicht wesentlich voneinander verschieden. Wir werden in solchen Fällen nicht von zwei verschiedenen Vektoren, sondern von den kontra- und kovarianten Komponenten desselben Vektors sprechen.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren A_i und B_i ist durch die Summe

$$\sum_{i=0}^{3} e_i A_i B_i = \sum_{i=0}^{3} e_i A^i B^i \tag{20,15}$$

definiert, die man auch in der Form

$$\sum_{i=0}^{3} A_i B^i = \sum_{i=0}^{3} A^i B_i \tag{20,16}$$

schreiben kann. Diese Größe ist invariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation. Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst

$$\sum_{i=0}^{3} A_i A^i = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2 \tag{20,17}$$

kann sowohl positiv als auch negativ sein. Ein Vektor, für den die Größe (20,17) positiv ist, wird als zeitartiger Vektor bezeichnet; ist diese Größe negativ, so spricht man von einem raumartigen Vektor.

Ein Beispiel für einen zeitartigen Vektor ist die Vierergeschwindigkeit, deren Komponenten lauten

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^i = \frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{20,18}$$

Daß die Gesamtheit der Größen (20,18) einen Vektor bildet, ergibt sich aus folgender Überlegung. Wir wissen, daß die Größe

$$c\,d\tau = ds = \sqrt{c^2 - v^2}\,dt \tag{20,19}$$

eine Invariante ist. Andererseits kann man die Größen (20,18) auch in der Form

$$u^0 = c\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx_0}{d\tau}; \quad u_i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{20,20}$$

schreiben. Hieraus folgt, daß sich u^0, u^1, u^2, u^3 wie die Differentiale der Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3, d. h. wie ein kontravarianter Vektor transformieren. Daß dieser Vektor zeitartig ist, ergibt sich aus der Identität

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = c^2. \tag{20,21}$$

Ein Beispiel für einen raumartigen Vektor ist der Vierervektor der Beschleunigung. Seine Komponenten lauten

$$w^0 = \frac{du^0}{d\tau}; \quad w^i = \frac{du^i}{d\tau} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{20,22}$$

oder ausführlicher

$$\left.\begin{aligned} w^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \\ w^i &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt}\right) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{20,23}$$

Um zu zeigen, daß der Vektor w raumartig ist, differenzieren wir die Identität (20,21) nach der Zeit (oder nach τ). Das liefert uns

$$u^0 w^0 - u^1 w^1 - u^2 w^2 - u^3 w^3 = 0 \tag{20,24}$$

oder

$$c w^0 - v_1 w^1 - v_2 w^2 - v_3 w_k = 0. \tag{20,25}$$

Hieraus folgt die Ungleichung

$$(w^0)^2 < \frac{v^2}{c^2} [(w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2] < (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2, \tag{20,26}$$

welche den raumartigen Charakter des Vektors w beweist.

§ 21 Vierertensoren

Ähnlich wie im dreidimensionalen Fall kann man auch im vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum Tensoren zweiter und höherer Stufe definieren.

Als kovarianten Tensor zweiter Stufe bezeichnet man eine Gesamtheit von Größen T_{ik}, die sich bei einer LORENTZ-Transformation nach dem Gesetz

$$T'_{ik} = \sum_{j,\, l=0}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} T_{jl} \tag{21,01}$$

oder

$$T'_{ik} = \sum_{j,\, l=0}^{3} e_i e_k a_{ij} a_{kl} T_{jl} \tag{21,02}$$

transformieren. Entsprechend bildet eine Gesamtheit von Größen, die sich nach dem Gesetz

$$T'^{ik} = \sum_{j,\, l=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} T^{jl} \tag{21,03}$$

oder

$$T'^{ik} = \sum_{j,\, l=0}^{3} e_j e_l a_{ij} a_{kl} T^{jl} \tag{21,04}$$

transformieren, einen kontravarianten Tensor zweiter Stufe. Schließlich kann man noch einen gemischten Tensor zweiter Stufe definieren, der kovariant hinsichtlich des einen und kontravariant hinsichtlich des anderen Indexes ist. Seine Komponenten transformieren sich nach dem Gesetz

$$T'^{i}_{k} = \sum_{j,\, l=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} T^{j}_{l} \tag{21,05}$$

oder

$$T'^{i}_{k} = \sum_{j,\, l=0}^{3} e_j e_k a_{ij} a_{kl} T^{j}_{l}. \tag{21,06}$$

5*

Wären alle Zahlen e_i einander gleich, so stimmten die Koeffizienten in den Formeln (21,02), (21,04) und (21,06) überein. In unserem Fall unterscheiden sich aber einige dieser Koeffizienten durch das Vorzeichen.

Die Transformationsformeln (21,02), (21,04) und (21,06) sind nicht wesentlich voneinander verschieden. Deshalb kann man von den Größen, die sich nach einer dieser Formeln transformieren, ohne weiteres zu Größen übergehen, die sich nach einer beliebigen anderen dieser Formeln transformieren. Man braucht dabei nur

$$T^{ik} = e_i e_k T_{ik} \tag{21,07}$$

zu setzen und für T^i_k eine der beiden Größen

$$T^{i\cdot}_{\cdot k} = e_i T_{ik} \tag{21,08}$$

oder

$$T^{\cdot i}_{k\cdot} = e_i T_{ki} \tag{21,09}$$

einzuführen. Ist der Tensor T_{ik} symmetrisch, so stimmen die Größen (21,08) und (21,09) überein. Wie bei den Vektoren werden wir nicht von verschiedenen Tensoren, sondern von den kovarianten, kontravarianten und gemischten Komponenten ein und desselben Tensors reden.

Analog kann man auch Tensoren dritter und höherer Stufe einführen. So transformiert sich zum Beispiel ein Tensor dritter Stufe mit drei kovarianten Indizes nach dem Gesetz

$$T'_{ikm} = \sum_{j,l,n=0}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \frac{\partial x_n}{\partial x'_m} T_{jln} \tag{21,10}$$

oder

$$T'_{ikm} = \sum_{j,l,n=0}^{3} e_i e_k e_m a_{ij} a_{kl} a_{mn} T_{jln}. \tag{21,11}$$

Wie im dreidimensionalen Fall kann man aus den Komponenten eines Tensors zweiter Stufe einen Skalar bilden

$$T = \sum_{i=0}^{3} e_i T_{ii} \tag{21,12}$$

und aus den Komponenten eines Tensors dritter Stufe drei Vektoren

$$A_i = \sum_k e_k T_{ikk}; \quad B_i = \sum_k e_k T_{kik}; \quad C_i = \sum_k e_k T_{kki}. \tag{21,13}$$

Auf die am Schluß des § 19 aufgeworfene Frage nach nichttensoriellen Größen mit einfachen Transformationsgesetzen werden wir hier nicht eingehen, weil bei den nichtquantentheoretischen Anwendungen der Relativitätstheorie Tensoren die Hauptrolle spielen.

Aus zwei Tensoren kann man neue Tensoren bilden, deren Stufe gleich der Summe oder der Differenz der Stufen der gegebenen Tensoren ist (aber auch

Tensoren mit dazwischenliegenden Stufen, die sich um eine gerade Zahl von der Summe oder Differenz unterscheiden). Wir erläutern dies an einigen Beispielen. In § 20 sahen wir, daß man aus zwei Vektoren A_i und B_i den Skalar

$$C = \sum_{i=0}^{3} e_i A_i B_i \tag{21,14}$$

bilden kann. Dabei sind die Vektoren als Tensoren erster Stufe, die Skalare als Tensoren nullter Stufe aufzufassen. Man kann aus den gleichen Vektoren aber auch einen Tensor zweiter Stufe bilden

$$C_{ik} = A_i B_k \quad \text{oder} \quad C_{ik} = B_i A_k. \tag{21,15}$$

Sind T_{ik} ein Tensor zweiter Stufe und A_i ein Vektor, so ist die Größe

$$B_i = \sum_k e_k A_k T_{ik} \tag{21,16}$$

ein Vektor; dagegen ist

$$C_{ikl} = A_i T_{kl} \tag{21,17}$$

[und die sich von (21,17) durch eine Permutation der Indizes auf der rechten Seite unterscheidenden Größen] ein Tensor dritter Stufe. Als weiteres Beispiel bilden wir aus zwei Tensoren zweiter Stufe T_{ik} und U_{ik} den Skalar

$$C = \sum_{i,k=0}^{3} e_i e_k T_{ik} U_{ik}, \tag{21,18}$$

den Tensor zweiter Stufe

$$C_{ik} = \sum_m e_m T_{im} U_{km} \tag{21,19}$$

und den Tensor vierter Stufe

$$C_{iklm} = T_{ik} U_{lm}. \tag{21,20}$$

In diesem Fall ist offenbar

$$C_{ik} = \sum_m e_m C_{imkm}, \tag{21,21}$$

$$C = \sum_i e_i C_{ii}. \tag{21,22}$$

Der Tensorcharakter dieser Größen läßt sich mit Hilfe der Relationen (10,04) und (10,05) für die Koeffizienten der LORENTZ-Transformation leicht nachweisen.

In allen Summen, die Produkte kovarianter Tensorkomponenten enthalten, müssen diese Produkte mit einem zusätzlichen Vorzeichenfaktor e_i, e_k, ... multipliziert werden, wobei i, k, ... die Summationsindizes sind. Man kann aber die Summen auch so schreiben, daß der Summationsindex bei der Komponente des einen Tensors als kovarianter (unterer) Index, dagegen bei der damit multiplizierten Komponente des anderen Tensors als kontravarianter (oberer) Index auftritt. Dann fallen die zusätzlichen Vorzeichenfaktoren weg. So lassen

sich zum Beispiel das Skalarprodukt (21,14) in der Form (20,16) und die Summe (21,18) wegen (21,07) in der Form

$$C = \sum_{i,\,k=0}^{3} T^{ik} U_{ik} \tag{21,23}$$

schreiben.

Aus einem gegebenen Tensor erhält man nicht nur durch Produktbildung einen neuen Tensor, sondern auch durch Differentialoperationen. Die Differentiation nach einer der Koordinaten x_i spielt dabei die Rolle einer Multiplikation mit der kovarianten Komponente eines Vektors. So ist zum Beispiel die Größe

$$C = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial A^i}{\partial x_i} \tag{21,24}$$

ein Skalar, während die Gesamtheit der Größen

$$B_i = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{21,25}$$

einen Vektor bildet (die Divergenz des Tensors T_{ik}). Gilt insbesondere

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{21,26}$$

wobei φ ein Skalar ist, so ist der gemäß (21,24) gebildete Ausdruck

$$\Box\, \varphi = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \tag{21,27}$$

ebenfalls ein Skalar (das Symbol $\Box$ bezeichnet den D'ALEMBERT-Operator).

§ 22 Pseudotensoren

Neben den Tensoren führt man zweckmäßigerweise noch weitere Größen ein, deren Transformationsgesetz vom Vorzeichen der JACOBIschen Determinante der Koordinatentransformation

$$D = \frac{\partial\,(x_0, x_1, x_2, x_3)}{\partial\,(x_0', x_1', x_2', x_3')} = \mathrm{Det}\,(e_i\, a_{ik}) \tag{22,01}$$

abhängt. Infolge der Eigenschaften der Koeffizienten der LORENTZ-Transformation ist das Quadrat dieser Determinante immer gleich Eins. Die Determinante selbst ist $D = +1$ bei einer eigentlichen LORENTZ-Transformation (bei der die Zeitrichtung nicht umgekehrt und ein rechtshändiges System der räumlichen Achsen wieder in ein solches übergeführt wird) und $D = -1$ bei einer uneigentlichen LORENTZ-Transformation. Obwohl wir uns sonst auf die eigentlichen LORENTZ-Transformationen beschränken wollen, ist es für die

Klassifikation der geometrischen Größen nützlich, ihr Verhalten auch bei den uneigentlichen Transformationen zu kennen.

Wir betrachten eine Gesamtheit von Größen ε_{iklm}, die antisymmetrisch in allen Indizes sein sollen; ferner sei $\varepsilon_{0123} = 1$. Daraus ergibt sich: $\varepsilon_{iklm} = 0$, wenn zwei oder mehr Indizes übereinstimmen, $\varepsilon_{iklm} = +1$, wenn (i, k, l, m) eine gerade Permutation der Zahlen (0, 1, 2, 3) ist, und $\varepsilon_{iklm} = -1$, wenn (i, k, l, m) eine ungerade Permutation ist. Nun läßt sich leicht beweisen, daß die Identität

$$\sum_{pqrs=0}^{3} \varepsilon_{pqrs} \frac{\partial x_p}{\partial x_i'} \frac{\partial x_q}{\partial x_k'} \frac{\partial x_r}{\partial x_l'} \frac{\partial x_s}{\partial x_m'} = D \cdot \varepsilon_{iklm} \tag{22,02}$$

gilt. Die linke Seite ist nämlich gerade die Entwicklung der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x_i'} & \frac{\partial x_0}{\partial x_k'} & \frac{\partial x_0}{\partial x_l'} & \frac{\partial x_0}{\partial x_m'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_i'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_k'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_l'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_m'} \end{vmatrix}.$$

Falls alle Indizes i, k, l, m verschieden sind, entsteht diese Determinante aus D durch Vertauschung der Spalten und stimmt deshalb bis auf das Vorzeichen mit D überein, haben dagegen einige dieser Indizes den gleichen Wert, so verschwindet die Determinante.

Nach (22,02) transformieren sich also die Größen ε für $D = 1$ wie Tensorkomponenten; für $D = -1$ dagegen unterscheidet sich das Transformationsgesetz dieser Größen von dem eines Tensors durch das Vorzeichen. Eine Gesamtheit von Größen mit einem solchen Transformationsgesetz nennt man einen *Pseudotensor*.

Wir können die ε_{iklm} als die kovarianten Komponenten eines antisymmetrischen Pseudotensors vierter Stufe betrachten. Die kontravarianten Komponenten dieses Tensors ergeben sich nach der allgemeinen Formel zu

$$\varepsilon^{iklm} = e_i e_k e_l e_m \varepsilon_{iklm}. \tag{22,03}$$

Nun verschwinden die Größen ε nur dann nicht, wenn alle Indizes verschieden sind. Dann gilt aber $e_i e_k e_l e_m = e_0 e_1 e_2 e_3 = -1$, und wir erhalten einfach

$$\varepsilon^{iklm} = -\varepsilon_{iklm}. \tag{22,04}$$

Ist φ ein Skalar, so bildet die Gesamtheit der Größen

$$\varphi_{iklm} = \varphi \varepsilon_{iklm} \tag{22,05}$$

einen antisymmetrischen Pseudotensor vierter Stufe. Dieser Pseudotensor hat wie ein Skalar nur eine wesentliche Komponente. Man bezeichnet ihn deshalb als Pseudoskalar.

Jedem antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe A_{ik} kann man nach der Formel

$$\overset{*}{A}{}^{ik} = \frac{1}{2} \sum_{l,m=0}^{3} \varepsilon^{iklm} A_{lm} \tag{22,06}$$

einen antisymmetrischen Pseudotensor $\overset{*}{A}{}^{ik}$ der gleichen Stufe zuordnen; wir nennen ihn dual zu dem gegebenen Tensor. In der Summe (22,06) sind nur zwei Glieder von Null verschieden, und diese sind einander gleich. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{A}{}^{10} &= A_{23}; & \overset{*}{A}{}^{20} &= A_{31}; & \overset{*}{A}{}^{30} &= A_{12}, \\ \overset{*}{A}{}^{23} &= A_{10}; & \overset{*}{A}{}^{31} &= A_{20}; & \overset{*}{A}{}^{12} &= A_{30}. \end{aligned}\right\} \tag{22,07}$$

Analog kann man einem antisymmetrischen Tensor dritter Stufe A_{ikl} nach der Formel

$$\overset{*}{A}{}^{i} = \frac{1}{6} \sum_{k,l,m=0}^{3} \varepsilon^{iklm} A_{klm} \tag{22,08}$$

einen Pseudovektor (d. h. einen Pseudotensor erster Stufe) zuordnen. In der Summe (22,08) sind sechs Glieder von Null verschieden, die aber untereinander gleich sind. Wir erhalten deshalb für die Komponenten eines Pseudovektors die expliziten Ausdrücke

$$\overset{*}{A}{}^{0} = -A_{123}; \quad \overset{*}{A}{}^{1} = A_{230}; \quad \overset{*}{A}{}^{2} = A_{310}; \quad \overset{*}{A}{}^{3} = A_{120}. \tag{22,09}$$

Als „Produkt eines Tensors mit einem Tensor" bezeichnen wir der Kürze halber einen Tensor, dessen Komponenten sich nach den Regeln aus § 21 durch Multiplikation der Komponenten der beiden Tensoren ergeben. Wir können dann sagen, daß das Produkt eines Pseudotensors mit einem Pseudotensor (ebenso wie das Produkt eines Tensors mit einem Tensor) ein Tensor ist, während das Produkt eines Tensors mit einem Pseudotensor ein Pseudotensor ist. Diese Regel haben wir im Grunde schon bei der Bildung des Pseudotensors $\overset{*}{A}{}^{ik}$ und des Pseudovektors $\overset{*}{A}{}^{i}$ benutzt.

§ 23 Die infinitesimale LORENTZ-Transformation

Die allgemeinste LORENTZ-Transformation (mit einer Verschiebung des Koordinatenursprungs) hat die Form

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k. \tag{23,01}$$

Wir nehmen nun an, daß sich die Transformation (23,01) nur unendlich wenig von der identischen Transformation unterscheidet. Dann sind die Konstanten a_i unendlich klein, und die Koeffizienten a_{ik} lassen sich in der Form

$$a_{ik} = e_k \delta_{ik} + \omega^{ik} \tag{23,02}$$

schreiben, wobei die ω^{ik} infinitesimale Größen sind. Um hervorzuheben, daß die Koordinaten einen kontravarianten Vektor bilden, wollen wir sie in diesem Paragraphen mit *oberen* Indizes versehen:

$$x^0 = ct; \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \tag{23,03}$$

Die infinitesimalen Konstanten, welche die Verschiebung des Ursprungs kennzeichnen, schreiben wir ebenfalls mit oberen Indizes (a^i statt a_i). Mit den neuen Bezeichnungen ergibt sich aus (23,01) und (23,02)

$$x'^i = x^i + a^i + \sum_{k=0}^{3} e_k \omega^{ik} x^k. \tag{23,04}$$

Da bei einer infinitesimalen Transformation der Unterschied zwischen dem ursprünglichen und dem transformierten Bezugssystem unwesentlicb wird, können wir die Differenzen

$$\Delta x^i = x'^i - x^i \tag{23,05}$$

als Vektor in einem dieser Bezugssysteme, etwa dem ursprünglichen, auffassen. Die Ausdrücke

$$\Delta x^i = a^i + \sum_{k=0}^{3} e_k \omega^{ik} x^k \tag{23,06}$$

bilden also einen infinitesimalen, kontravarianten Vektor. Daraus ergibt sich, daß die Konstanten a^i für sich einen solchen Vektor bilden, die Konstanten ω^{ik} aber einen kontravarianten Tensor. Dieser Tensor ist antisymmetrisch. Denn die Orthogonalitätsbedingungen für die Koeffizienten der LORENTZ-Transformation

$$\sum_{k=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl} \tag{23,07}$$

lauten mit den Ausdrücken (23,02) und bei Vernachlässigung von Termen, die quadratisch in den infinitesimalen Größen sind,

$$\omega^{ik} + \omega^{ki} = 0. \tag{23,08}$$

Ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe hat nun sechs unabhängige Komponenten. Diese sechs Größen bilden zusammen mit den vier Komponenten des Verschiebungsvektors des Ursprungs die zehn unabhängigen Parameter, die eine infinitesimale LORENTZ-Transformation kennzeichnen.

Wir führen jetzt zwei infinitesimale Transformationen hintereinander aus. Die eine habe die Parameter a^i, ω^{ik}, die andere die Parameter b^i, φ^{ik}. Wie man leicht sieht, ist das Ergebnis zweier solcher Transformationen, abgesehen von Größen zweiter Ordnung, einer einzigen Transformation mit den Parametern

$$c^i = a^i + b^i; \quad \psi^{ik} = \omega^{ik} + \varphi^{ik} \tag{23,09}$$

äquivalent. Hieraus folgt insbesondere, daß das Ergebnis zweier infinitesimaler Transformationen nicht von ihrer Reihenfolge abhängt. Dieser Umstand erlaubt es, eine Verschiebung des Ursprungs, den Übergang zum bewegten Bezugs-

system und eine infinitesimale Drehung der Raumachsen nacheinander zu betrachten.

Setzen wir

$$a^0 = c\tau, \quad a^1 = a_x; \quad a^2 = a_y; \quad a^3 = a_z, \tag{23,10}$$

so erhalten wir eine Transformation, die einer Verschiebung des Zeitanfangspunktes in einen um die Größe τ *früheren* Zeitpunkt und einer Verschiebung des Koordinatenursprungs nach *rückwärts* um den Vektor $\mathfrak{a}$ entspricht. Den Übergang zu einem mit der infinitesimalen Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ bewegten Bezugssystem vermittelt für die Koordinaten die Transformation

$$\left.\begin{aligned} x' - x &= \Delta x = -V_x t, \\ y' - y &= \Delta y = -V_y t, \\ z' - z &= \Delta z = -V_z t \end{aligned}\right\} \tag{23,11}$$

und für die Zeit die Transformation

$$t' - t = \Delta t = -\frac{1}{c^2}(x V_x + y V_y + z V_z). \tag{23,12}$$

Gehen wir nun von der dreidimensionalen zur vierdimensionalen Schreibweise über, so erhalten wir durch Vergleich der Koeffizienten in (23,11) und (23,06)

$$\omega^{10} = -\frac{V_x}{c}; \quad \omega^{20} = -\frac{V_y}{c}; \quad \omega^{30} = -\frac{V_z}{c}. \tag{23,13}$$

Der Vergleich der Koeffizienten in (23,12) und (23,06) dagegen liefert

$$\omega^{01} = \frac{V_x}{c}; \quad \omega^{02} = \frac{V_y}{c}; \quad \omega^{03} = \frac{V_z}{c}. \tag{23,14}$$

Dieses Ergebnis ist trivial, da der Tensor ω^{ik} antisymmetrisch ist.

Schließlich betrachten wir eine infinitesimale Drehung der Raumachsen. Nach einer bekannten Formel der Kinematik gilt

$$\Delta\mathfrak{r} = [\vec{\omega} \times \mathfrak{r}], \tag{23,15}$$

wobei $\vec{\omega}$ der Vektor der infinitesimalen Drehung ist (seine Komponenten sind den infinitesimalen Drehwinkeln um die Achsen x, y, z gleich). Durch Vergleich von (23,15) mit (23,06) erhalten wir

$$\omega^{23} = -\omega^{32} = \omega_x; \quad \omega^{31} = -\omega^{13} = \omega_y; \quad \omega^{12} = -\omega^{21} = \omega_z. \tag{23,16}$$

Wir wollen auch die kovarianten Komponenten des Tensors ω_{ik} aufschreiben. Nach der bekannten Regel für das Senken von Indizes ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{10} = \frac{V_x}{c}; \quad \omega_{20} = \frac{V_y}{c}; \quad \omega_{30} = \frac{V_z}{c}, \\ &\omega_{23} = \omega_x; \quad \omega_{31} = \omega_y; \quad \omega_{12} = \omega_z. \end{aligned}\right\} \tag{23,17}$$

Die übrigen Komponenten erhält man aus der Antisymmetriebedingung.

Abschließend weisen wir noch darauf hin, daß man die Formeln für die endliche LORENTZ-Transformation aus denen der infinitesimalen Transformation gewinnen kann. Wir wollen hierauf aber nicht näher eingehen.

§ 24 Das Transformationsgesetz für das elektromagnetische Feld und die Kovarianz der MAXWELLschen Gleichungen

Bei der Ableitung der Grundformeln der Relativitätstheorie sind wir von dem Gesetz für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Wellenfront ausgegangen, das sich aus den MAXWELLschen Gleichungen ergibt (vgl. § 3). Wir wollen nun prüfen, ob die MAXWELLschen Gleichungen tatsächlich kovariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation sind. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst das Transformationsgesetz für das elektromagnetische Feld beim Übergang zu einem neuen Bezugssystem aufsuchen.

Das elektromagnetische Feld läßt sich bekanntlich nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; \quad E_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \\ H_2 &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; \quad E_2 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\ H_3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}; \quad E_2 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \end{aligned}\right\} \tag{24,01}$$

aus einem skalaren und einem Vektorpotential ableiten. Das Feld verschwindet dann und nur dann, wenn die lineare Differentialform

$$\delta\varphi = -c\Phi\,dt + A_1 dx_1 + A_2\,dx_2 + A_3\,dx_3 \tag{24,02}$$

ein vollständiges Differential ist. Wir nehmen an, diese lineare Form sei eine Invariante (Skalar). Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die A_1, A_2, A_3 die räumlichen (kovarianten) Komponenten eines Vierervektors mit der zeitlichen Komponente

$$A_0 = -\Phi \tag{24,03}$$

sind. Wegen $ct = x_0$ können wir damit $\delta\varphi$ in der Form

$$\delta\varphi = \sum_{i=0}^{3} A_i\,dx_i \tag{24,04}$$

schreiben.

Die übliche Normierungsbedingung für die Potentiale

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \tag{24,05}$$

ist dann invariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation. Man kann dafür nämlich auch schreiben

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0 \tag{24,06}$$

oder, mit den kontravarianten Komponenten

$$A^0 = A_0 = -\Phi; \quad A^1 = -A_1; \quad A^2 = -A_2; \quad A^3 = -A_3, \tag{24,07}$$

auch

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial A^i}{\partial x_i} = 0. \tag{24,08}$$

Wir schreiben nun die Gleichungen (24,01) in den neuen Bezeichnungen $x_0 = ct$ und $A_0 = -\Phi$. Für das elektrische Feld erhalten wir so

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_0}, \\ E_2 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_0}, \\ E_3 &= \frac{\partial A_0}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_0}, \end{aligned}\right\} \tag{24,09}$$

während für das Magnetfeld die alten Ausdrücke gültig bleiben. Diese Ausdrücke für das elektromagnetische Feld können wir in der Form

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \tag{24,10}$$

zusammenfassen; dabei müssen wir

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= F_{23} \qquad & E_1 &= F_{10} \\ H_2 &= F_{31} \qquad & E_2 &= F_{20} \\ H_3 &= F_{12} \qquad & E_3 &= F_{30} \end{aligned}\right\} \tag{24,11}$$

setzen. Ist (A_i) ein kovarianter Vektor, so ist (F_{ik}) ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe. Aus unserer Annahme über den Vektorcharakter der Potentiale ergibt sich also, daß die sechs Komponenten des elektromagnetischen Feldes im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum einen antisymmetrischen Tensor bilden.

Auf Grund dieser Tatsache läßt sich nun leicht nachweisen, daß die MAXWELLschen Gleichungen gegenüber einer LORENTZ-Transformation kovariant sind. Dazu konstruieren wir aus den Ableitungen der Feldgrößen einen Tensor dritter Stufe

$$F_{ikl} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}, \tag{24,12}$$

der offenbar antisymmetrisch ist. Nach den Formeln (22,09) können wir ihm einen Pseudovektor

$$\overset{*}{F}{}^0 = -F_{123}; \quad \overset{*}{F}{}^1 = F_{230}; \quad \overset{*}{F}{}^2 = F_{310}; \quad \overset{*}{F}{}^3 = F_{120} \tag{24,13}$$

zuordnen. Für dessen Komponenten finden wir

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{F}{}^0 &= -\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_2} - \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = -\operatorname{div}\mathfrak{H};\\
\overset{*}{F}{}^1 &= \frac{\partial F_{23}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x_2} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2};\\
\overset{*}{F}{}^2 &= \frac{\partial F_{31}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{10}}{\partial x_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3};\\
\overset{*}{F}{}^3 &= \frac{\partial F_{12}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x_1} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_3}{\partial t} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (24{,}14)$$

Der größeren Anschaulichkeit halber haben wir auf der rechten Seite x_0 durch ct ersetzt. Wegen der MAXWELLschen Gleichungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 0; \quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0 \qquad (24{,}15)$$

verschwinden die rechten Seiten der Gleichungen (24,14). Die erste Gruppe der MAXWELLschen Gleichungen läßt sich also in der kovarianten Form

$$\overset{*}{F}{}^i = 0 \qquad (24{,}16)$$

oder

$$F_{ikl} = 0 \qquad (24{,}17)$$

schreiben.

Wir wenden uns nun der zweiten Gruppe der MAXWELLschen Gleichungen zu. Dazu gehen wir von den kovarianten zu den kontravarianten Komponenten des Feldtensors über

$$\left.\begin{aligned}
F^{23} &= H_1 & F^{10} &= -E_1\\
F^{31} &= H_2 & F^{20} &= -E_2\\
F^{12} &= H_3 & F^{30} &= -E_3
\end{aligned}\right\} \qquad (24{,}18)$$

und bilden den kontravarianten Vektor

$$s^i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k}. \qquad (24{,}19)$$

Für diesen erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
s^0 &= 0 + \frac{\partial F^{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x_3} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3};\\
s^1 &= \frac{\partial F^{10}}{\partial x_0} + 0 + \frac{\partial F^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3};\\
s^2 &= \frac{\partial F^{20}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial F^{23}}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1};\\
s^3 &= \frac{\partial F^{30}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x_2} + 0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (24{,}20)$$

Die zeitliche Komponente des Vektors (s^i) lautet also

$$s^0 = \operatorname{div} \mathfrak{E}, \tag{24,21}$$

während seine räumlichen Komponenten mit denen des dreidimensionalen Vektors

$$(s^1, s^2, s^3) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \tag{24,22}$$

übereinstimmen. Im ladungsfreien Raum verschwinden die rechten Seiten dieser Gleichungen. Die zweite Gruppe der MAXWELLschen Gleichungen für den ladungsfreien Raum läßt sich also in kovarianter Form schreiben:

$$s^i \equiv \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{24,23}$$

Ist dagegen der Raum mit Ladungen der Dichte ϱ erfüllt, so haben die MAXWELL-LORENTZschen Gleichungen die Form

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho; \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}, \tag{24,24}$$

wobei $\mathfrak{j}$ die Stromdichte ist. Die Kovarianz der MAXWELLschen Gleichungen ist gesichert, wenn die Größen

$$s^0 = 4\pi\varrho; \quad s^i = \frac{4\pi}{c} j_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{24,25}$$

die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors bilden. Wegen der Identität

$$\sum_{i,k=0}^{3} \frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \tag{24,26}$$

muß gelten

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0, \tag{24,27}$$

d. h.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{j} = 0. \tag{24,28}$$

Diese Gleichung drückt bekanntlich die Erhaltung der elektrischen Ladung aus.

Der Vierervektor-Charakter der Größen (24,25) steht im Einklang mit ihrer physikalischen Deutung nach LORENTZ. Danach ist $\mathfrak{j} = \varrho\mathfrak{v}$, wobei ϱ die Dichte der Ladung und $\mathfrak{v}$ ihre Geschwindigkeit ist. Der Vierervektor des Stromes

$$\varrho c, \ \varrho v_1, \ \varrho v_2, \ \varrho v_3 \tag{24,29}$$

ist dem Vektor der Vierergeschwindigkeit [vgl. (20.18)]

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad & u^1 &= \frac{v_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \\ u^2 &= \frac{v_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad & u^3 &= \frac{v_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{24,30}$$

proportional. Der Proportionalitätsfaktor

$$\varrho^* = \varrho \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{24,31}$$

ist eine Invariante. Physikalisch bedeutet er die Ladungsdichte in dem Bezugssystem, in welchem die Ladung gerade ruht.

Wir haben die Kovarianz der MAXWELLschen Gleichungen nachgeprüft und festgestellt, daß das Gesetz für die Transformation des elektromagnetischen Feldes beim Übergang zu einem anderen Bezugssystem mit dem eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe übereinstimmt. Wir wollen nun dieses Transformationsgesetz für den Fall explizite hinschreiben, daß die LORENTZ-Transformation nicht mit einer räumlichen Achsendrehung verbunden ist. Dann lauten die Koeffizienten a_{ik}, durch die Geschwindigkeitskomponenten V_i ausgedrückt,

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \\ a_{0i} &= \frac{a_{00}}{c} V_i; \quad a_{i0} = -\frac{a_{00}}{c} V_i \qquad (i = 1, 2, 3); \\ a_{ik} &= -\delta_{ik} - (a_{00} - 1) \frac{V_i V_k}{V^2} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{24,32}$$

Setzen wir diese Werte in die allgemeine Formel

$$F'_{ik} = e_i e_k \sum_{j,l=0}^{3} a_{ij} a_{kl} F_{jl} \tag{24,33}$$

ein und benutzen die Antisymmetrie des Tensors F_{ik}, so erhalten wir

$$F'_{23} = a_{00} F_{23} - (a_{00} - 1) \frac{V_1}{V^2} (V_1 F_{23} + V_2 F_{31} + V_3 F_{12}) - \\ - \frac{1}{c} a_{00} (V_2 F_{30} - V_3 F_{20}) \tag{24,34}$$

und zwei weitere Gleichungen, die sich daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 ergeben; ferner finden wir

$$F'_{10} = a_{00}F_{10} - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(V_1F_{10} + V_2F_{20} + V_3F_{30}) + \\ + \frac{1}{c}a_{00}(V_2F_{12} - V_3F_{31}) \qquad (24,35)$$

und die beiden daraus durch zyklische Vertauschung entstehenden Gleichungen. Gehen wir gemäß (24,11) zu den üblichen Bezeichnungen für das elektrische und das magnetische Feld über und verwenden die Formeln der dreidimensionalen Vektorrechnung, so können wir schreiben

$$\left.\begin{aligned} E'_1 &= a_{00}E_1 - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{E}) + \frac{a_{00}}{c}[\mathfrak{V}\times\mathfrak{H}]_1; \\ H'_1 &= a_{00}H_1 - (a_{00} - 1)\frac{V_1}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{H}) - \frac{a_{00}}{c}[\mathfrak{V}\times\mathfrak{E}]_1. \end{aligned}\right\} \qquad (24,36)$$

Fassen wir nun die Komponenten zu Vektoren zusammen, ersetzen a_{00} durch seinen Wert (24,32) und ordnen die Glieder etwas anders an, so ergibt sich

$$\mathfrak{E}' = \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{E}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathfrak{E} - \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{E}) + \frac{1}{c}[\mathfrak{V}\times\mathfrak{H}]\right); \qquad (24,37)$$

$$\mathfrak{H}' = \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{H}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathfrak{H} - \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{H}) - \frac{1}{c}[\mathfrak{V}\times\mathfrak{E}]\right). \qquad (24,38)$$

Zum Vergleich geben wir die Transformationsformeln für einen kovarianten Vierervektor an, wobei wir für seine räumlichen Komponenten die übliche Vektorschreibweise benutzen,

$$A'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(A_0 + \frac{1}{c}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{A})\right); \qquad (24,39)$$

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{A}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cdot\frac{\mathfrak{V}}{V^2}\left((\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{A}) + \frac{V^2}{c}A_0\right). \qquad (24,40)$$

Zu den Formeln für die Felder bemerken wir noch, daß

$$(\mathfrak{E}'\cdot\mathfrak{V}) = (\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{V}); \quad (\mathfrak{H}'\cdot\mathfrak{V}) = (\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{V}) \qquad (24,41)$$

gilt. Der zur Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ parallele Anteil des elektrischen und des magnetischen Feldes bleibt also ungeändert. Im räumlichen Anteil eines Vierervektors

bleibt dagegen gerade der zur Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ senkrechte Teil ungeändert, denn es gilt

$$\mathfrak{A}' - \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{A}') = \mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{A}). \tag{24,42}$$

Betrachtet man eine spezielle LORENTZ-Transformation und setzt

$$V_x = V; \quad V_y = V_z = 0, \tag{24,43}$$

so vereinfachen sich die Transformationsformeln für die Felder zu

$$\left.\begin{aligned}
E'_x &= E_x; & H'_x &= H_x,\\
E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(E_y - \frac{V}{c}H_z\right); & H'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(H_y + \frac{V}{c}E_z\right),\\
E'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(E_z + \frac{V}{c}H_y\right); & H'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(H_z - \frac{V}{c}E_y\right).
\end{aligned}\right\} \tag{24,44}$$

Aus den Feldkomponenten lassen sich zwei Größen bilden, die bei einer LORENTZ-Transformation ungeändert bleiben, nämlich

$$\mathfrak{E}'^2 - \mathfrak{H}'^2 = \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2; \tag{24,45}$$

$$(\mathfrak{E}'\cdot\mathfrak{H}') = (\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}). \tag{24,46}$$

Die erste dieser Größen bleibt auch bei uneigentlichen LORENTZ-Transformationen (vgl. § 22) erhalten und ist ein Skalar. Die zweite Größe dagegen wechselt bei einer uneigentlichen Transformation das Vorzeichen und ist ein Pseudoskalar. Hiervon kann man sich mit Hilfe der Tensorsymbolik leicht überzeugen, denn es gilt

$$\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2 = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=0}^{3} F_{ik}F^{ik}; \tag{24,47}$$

$$(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}) = \frac{1}{4}\sum_{i,k=0}^{3} F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}. \tag{24,48}$$

Dabei ist $\overset{*}{F}{}^{ik}$ ein antisymmetrischer Pseudotensor, der mit dem Feldtensor analog zu (22,06) oder (22,07) zusammenhängt. Für eine ebene Welle verschwinden die beiden Ausdrücke (24,45) und (24,46) (und zwar unabhängig vom Bezugssystem).

Die Transformationsformeln für das Feld zeigen, ebenso wie die MAXWELLschen Gleichungen, daß zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld ein enger Zusammenhang besteht. So ist zum Beispiel das Feld einer Ladungsverteilung in dem Bezugssystem, in welchem diese ruht, ein elektrostatisches Feld. In einem anderen Bezugssystem, das gegenüber den Ladungen bewegt ist, kommt zum elektrischen Feld noch ein magnetisches hinzu. Das

wird verständlich, wenn man bedenkt, daß bewegte Ladungen einen elektrischen Strom darstellen. Ein anderes Beispiel: Ein Feld, das in dem einen Bezugssystem rein magnetisch ist, wirkt in einem anderen als Überlagerung eines elektrischen und eines magnetischen Feldes.

§ 25 Die Bewegung eines geladenen Massenpunktes in einem vorgegebenen äußeren Feld

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens mit der Masse m und der Ladung e in einem vorgegebenen äußeren Feld. Nach Formel (20,23) lauten die Komponenten des Vierervektors der Beschleunigung

$$\left.\begin{aligned} w^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right); \\ w^i &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt}\right) \qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{25,01}$$

Unter der zeitlichen Ableitung stehen dabei die Komponenten der Vierergeschwindigkeit

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad u^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{25,02}$$

mit

$$v^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2. \tag{25,03}$$

Nun führen wir ein (gestrichenes) Bezugssystem ein, in dem das Teilchen momentan ruht ($u'^i = 0$). Wir nehmen an, daß in diesem „begleitenden" Bezugssystem die gewöhnliche Beschleunigung dem elektrischen Feld proportional ist

$$\frac{d^2 x_i'}{dt'^2} = \frac{e}{m} E_i' \tag{25,04}$$

und gehen dann wieder zu dem ursprünglichen Bezugssystem zurück.

In dem gestrichenen Bezugssystem lauten die Vierergeschwindigkeit und die Viererbeschleunigung

$$u'^0 = c, \quad u'^1 = u'^2 = u'^3 = 0; \tag{25,05}$$

$$w'^0 = 0, \quad w'^i = \frac{d^2 x_i'}{dt'^2}. \tag{25,06}$$

Letztere läßt sich damit folgendermaßen durch das Feld ausdrücken:

$$w'^0 = 0, \quad w'^i = \frac{e}{m} E'_i. \tag{25,07}$$

Nach den Transformationsformeln für einen kontravarianten Vektor (die mit denen für die Koordinaten identisch sind) gilt

$$w^i = \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ki} w'^k. \tag{25,08}$$

Setzen wir darin auf der rechten Seite für w'^i den Wert (25,07) ein, so erhalten wir für die Viererbeschleunigung im ursprünglichen Bezugssystem

$$w^i = -\frac{e}{m}(a_{1i}E'_1 + a_{2i}E'_2 + a_{3i}E'_3). \tag{25,09}$$

Hierin sind die Werte a_{ik} aus (24,32) einzusetzen. Das liefert

$$w^0 = \frac{e}{m} \cdot \frac{a_{00}}{c} (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{E}'); \tag{25,10}$$

$$w^i = \frac{e}{m}\left(E'_i + (a_{00} - 1)\frac{V_i}{V^2}(\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{E}')\right). \tag{25,11}$$

Nun müssen wir noch $\mathfrak{E}'$ durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ausdrücken. Wegen $(\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{E}') = (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{E})$ ergibt die Formel (24,36), wenn man noch den Wert der Größe a_{00} aus (24,32) einführt,

$$w^0 = \frac{e}{m} \frac{1}{\sqrt{c^2 - V^2}} (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{E}); \tag{25,12}$$

$$w^i = \frac{e}{m} \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{V} \times \mathfrak{H}]\right)_i. \tag{25,13}$$

Hierbei ist $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit des begleitenden Bezugssystems; diese stimmt im betrachteten Zeitpunkt mit der Geschwindigkeit des Teilchens überein. Wir können also $\mathfrak{V}$ durch $\mathfrak{v}$ ersetzen und erhalten dann

$$w^0 = \frac{e}{m} \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{E}); \tag{25,14}$$

$$w^i = \frac{e}{m} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}]\right)_i. \tag{25,15}$$

Nun können wir uns von dem begleitenden Bezugssystem frei machen, indem wir beachten, daß der Zeitpunkt, für welchen $\mathfrak{v} = \mathfrak{V}$ gilt, in keiner Weise ausgezeichnet ist. Wir dürfen daher annehmen, daß diese Gleichungen in jedem Zeitpunkt gelten, also die Bewegungsgleichungen des Teilchens darstellen. Die

Form der Gleichungen (25,14) und (25,15) ist jedoch unhandlich, denn darin wird eine gemischte Schreibweise verwendet: Links steht ein Vierervektor, während die rechten Seiten durch dreidimensionale Größen ausgedrückt sind. Wir wollen deshalb zu einer einheitlichen Schreibweise übergehen. Dazu drücken wir beide Seiten zunächst durch vierdimensionale und dann durch dreidimensionale Größen aus.

Mit (25,02) und den Bezeichnungen (24,11) für die Felder können wir die Gleichungen (25,14) und (25,15) folgendermaßen schreiben:

$$w^0 = \frac{e}{mc}(u^1 F_{10} + u^2 F_{20} + u^3 F_{30}); \tag{25,16}$$

$$w^i = \frac{e}{mc}(u^0 F_{i0} + u^1 F_{i1} + u^2 F_{i2} + u^3 F_{i3}) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{25,17}$$

Wegen der Antisymmetrie des Tensors F_{ik} stehen auf der rechten Seite jeder der Gleichungen (25,17) in Wirklichkeit nicht vier, sondern nur drei Glieder. Benutzen wir die kovarianten Komponenten des Beschleunigungsvektors

$$w_0 = w^0; \quad w_1 = -w^1; \quad w_2 = -w^2; \quad w_3 = -w^3, \tag{25,18}$$

so können wir für alle Werte i von 0 bis 3 schreiben

$$w_i = -\frac{e}{mc}\sum_{k=0}^{3} u^k F_{ik}. \tag{25,19}$$

Darin steht rechts und links ein kovarianter Vektor. Die Bewegungsgleichungen (25,19) behalten also ihre Form in jedem Inertialsystem, wie es auch sein muß. Man sieht leicht ein, daß [in Übereinstimmung mit (20,24)]

$$\sum_{k=0}^{3} u^i w_i = 0 \tag{25,20}$$

gilt. Die erste Bewegungsgleichung folgt also aus den drei übrigen.

Zur Begründung der Gleichungen (25,19) genügt es übrigens nachzuprüfen, daß sie in dem begleitenden Bezugssystem in die Form (25,07) übergehen. Die Kovarianz der Gleichungen verbürgt dann, daß sie auch in jedem anderen Bezugssystem gelten.

Wir wenden uns nun der dreidimensionalen Schreibweise zu. Mit dem Ausdruck (25,01) für den Vierervektor der Beschleunigung erhalten wir in dreidimensionaler Vektorschreibweise

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\,(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{E}); \tag{25,21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}]\right). \tag{25,22}$$

In der Gleichung (25,21) stellt die rechte Seite eine Leistung dar, d. h. die Arbeit, die das Feld in der Zeiteinheit an dem Teilchen leistet. Nach den Grundgesetzen der Mechanik ist also die linke Seite als Zuwachs der kinetischen Energie des Teilchens in der Zeiteinheit zu deuten. In der Gleichung (25,22) steht auf der rechten Seite gerade die LORENTZ-Kraft; dementsprechend ist die linke Seite der Zuwachs des Teilchenimpulses (der Bewegungsgröße) in der Zeiteinheit.

Die kinetische Energie und der Impuls des Teilchens können sich also von den Ausdrücken

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25,23}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{25,24}$$

die in den Bewegungsgleichungen unter dem Symbol der zeitlichen Ableitung stehen, nur um konstante Größen unterscheiden. Der Wert dieser Konstanten ergibt sich aus der Kovarianzforderung. Wir müssen nämlich fordern, daß Energie und Impuls eines Teilchens[1]) einen Vierervektor bilden. Die Größen (25,23) und (25,24) bilden aber selbst schon einen Vierervektor, da sie der zeitlichen und den räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit proportional sind. Die erwähnten Konstanten müssen also verschwinden.[2]) Somit stellen die Größen (25,23) und (25,24) die Energie und den Impuls des Teilchens dar.

Für $\mathfrak{v} = 0$ ergibt sich, in Übereinstimmung mit unseren bisherigen Vorstellungen, $\mathfrak{P} = 0$: Ein ruhender Körper hat keinen Impuls. Die Energie W dagegen nimmt bei $\mathfrak{v} = 0$ den von Null verschiedenen Wert

$$W_0 = mc^2 \tag{25,25}$$

an. Dieses Ergebnis widerspricht den alten Vorstellungen, wird aber vom Experiment vollauf bestätigt: Jedem Körper mit der Masse m entspricht ein Energievorrat W_0 (vgl. § 34). Die analoge Beziehung

$$W = Mc^2 \tag{25,26}$$

zwischen Masse und Energie eines Körpers gilt auch bei beliebiger Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, falls man unter M die Größe

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{25,27}$$

---

[1]) Genauer, die durch c dividierte Energie und der Impuls.

[2]) Etwas ausführlicher könnte man folgendermaßen argumentieren: Die erwähnten Konstanten müssen einerseits einen Vektor bilden, andererseits dürfen sie nicht vom Bewegungszustand, also auch nicht vom Bezugssystem abhängen. Einen von Null verschiedenen konstanten Vektor, dessen Komponenten vom Bezugssystem unabhängig sind gibt es aber nicht.

versteht, die selbst von der Geschwindigkeit abhängt. Diese Größe M ist als zweckmäßige Verallgemeinerung des Massenbegriffs aufzufassen. Sie geht als Faktor der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auch in den Ausdruck (25,24) für den Impuls $\mathfrak{P}$ ein und kennzeichnet also die Trägheit des Körpers (seine träge Masse). Man bezeichnet die Größe M als Masse schlechthin, dagegen m als Ruhmasse. Entsprechend nennt man W die Energie schlechthin und W_0 die Ruhenergie.

Die Ruhmasse m ist eine Konstante, die nicht vom Bewegungszustand des Teilchens, wohl aber von dessen innerem Zustand abhängt (falls das Teilchen eine komplizierte Struktur und innere Freiheitsgrade hat). Sie läßt sich durch die Invariante des Energie-Impuls-Vierervektors ausdrücken. Diese Invariante ist nämlich unabhängig von der Geschwindigkeit und hat den Wert

$$\frac{W^2}{c^2} - P^2 = m^2c^2. \tag{25,28}$$

Die Masse M hängt von der Geschwindigkeit derart ab, daß die Masse eines Teilchens bei der Annäherung seiner Geschwindigkeit an die des Lichtes unbeschränkt wächst. Infolgedessen kann in keinem Bezugssystem ein Körper mit einer von Null verschiedenen Ruhmasse die Lichtgeschwindigkeit erreichen. Hierdurch wird der Charakter der Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit besonders deutlich.

Ist dagegen die Geschwindigkeit des Teilchens klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so stimmt die Differenz

$$W - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots \tag{25,29}$$

bis auf kleine Größen mit dem üblichen Ausdruck für die kinetische Energie des Teilchens überein.

Alle diese Beziehungen haben wir aus der Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens abgeleitet. Sie gelten aber auch allgemein. Zum Beispiel ist die Beziehung (25,26) zwischen Masse und Energie nicht auf den hier betrachteten Fall eines Massenpunktes mit konstanter Ruhmasse beschränkt, sondern sie gilt auch für einen komplizierten Körper oder ein System von Körpern, in dem innere Prozesse ablaufen können, welche die Ruhmasse ändern. Diese Beziehung drückt das fundamentale Gesetz der Proportionalität von Masse und Energie aus. Damit werden wir uns eingehend in § 34 beschäftigen.

§ 26 Die Bewegung eines Systems von Ladungen (angenäherte Problemstellung)

Das Problem der Bewegung eines Systems geladener Massenpunkte erfordert die gleichzeitige Bestimmung des elektromagnetischen Feldes und der Bewegung der Ladungen in diesem Feld. Nur das äußere Feld kann man dabei als vorgegeben ansehen. Die Wechselwirkung zwischen den Ladungen wird durch das Feld vermittelt und breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit) aus. Infolgedessen hängt die Kraft, die auf eine Ladung wirkt, nicht vom momentanen, sondern von einem früheren Bewegungszustand der übrigen

Ladungen ab. Das bei einer beschleunigten Bewegung der Ladungen auftretende Feld bewirkt nicht nur eine Wechselwirkung, sondern wird auch nach außen emittiert. Deshalb setzt sich die Energie eines Systems von Ladungen zum Teil in Strahlung um, so daß das System Energieverluste erleidet und nichtkonservativ ist. Außerdem ist zu beachten, daß das Feld unendlich viele Freiheitsgrade hat. Infolgedessen besitzt auch das System, das aus den Ladungen und ihrem Feld besteht, strenggenommen unendlich viele Freiheitsgrade, ist also kein rein mechanisches System.

Trotzdem läßt sich die Bewegung der Ladungen näherungsweise als Problem der Mechanik formulieren, wobei nur die Freiheitsgrade der Ladungen explizite beachtet werden. Zu diesem Zweck muß man das Feld (genauer: die Potentiale) jeder Ladung durch deren Lage und Geschwindigkeit ausdrücken und dann angenähert von dem früheren Zeitpunkt auf den betrachteten umrechnen. Man muß also die Potentiale an einem bestimmten Ort und zu einem gegebenen Zeitpunkt als Funktion der Lagen und Geschwindigkeiten der Teilchen im gleichen Zeitpunkt (und nicht in einem früheren) darstellen. Auf diese Weise läßt sich eine angenäherte LAGRANGE-Funktion für das Teilchensystem aufstellen.

Zunächst bestimmen wir die LAGRANGEsche Form der Bewegungsgleichungen für eine einzelne Punktladung. Wie man leicht einsieht, ergibt sich die Gleichung (25,22) aus der LAGRANGE-Funktion

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\Phi + \frac{e}{c}(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{v}), \tag{26,01}$$

wobei $\Phi = -A_0$ und A_k das skalare und das Vektorpotential sind. Denn mit $\dot{x}_i = v_i$ gilt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A_i; \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -e\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c}\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial A_k}{\partial x_i}v_k. \end{aligned}\right\} \tag{26,02}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die LAGRANGEschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \tag{26,03}$$

ein und beachten den Zusammenhang zwischen den Feldern und den Potentialen gemäß (24,01), so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) - e\left\{E_i + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}]_i\right\} = 0, \tag{26,04}$$

d. h. die Gleichungen (25,22). Die Gleichung (25,21) läßt sich daraus folgern.

Nun gehen wir zu einem Teilchensystem über. Zunächst ermitteln wir einen Näherungsausdruck für das Feld eines Teilchens, dessen Bewegung bekannt ist.

Sehen wir die Ladungsverteilung als kontinuierlich an, so lauten die Gleichungen für die Potentiale

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho; \tag{26,05}$$

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}. \tag{26,06}$$

Die in Betracht kommende Lösung der Gleichung (26,05) ist das retardierte Potential

$$\Phi = \int \frac{[\varrho]\, dV'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}. \tag{26,07}$$

Hierbei ist

$$[\varrho] = \varrho\,(\mathfrak{r}', t'); \quad t' = t - \frac{1}{c}\,|\,\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'\,|. \tag{26,08}$$

Erfolgt die Bewegung der Teilchen hinreichend langsam und stetig [1]), so kann man für nicht allzu große Abstände die Größe $[\varrho]$ durch die ersten Glieder ihrer Entwicklung nach Potenzen von c^{-1} ersetzen und schreiben

$$[\varrho] = \varrho\,(\mathfrak{r}', t) - \frac{1}{c}\,|\,\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'\,|\,\frac{\partial}{\partial t}\varrho\,(\mathfrak{r}', t) + \frac{1}{2c^2}\,|\,\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'\,|^2\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varrho\,(\mathfrak{r}', t) + \ldots \tag{26,09}$$

Setzen wir diese Entwicklung in (26,07) ein und bedenken, daß das Integral

$$\int \varrho\,(\mathfrak{r}', t)\, dV' = e_a \tag{26,10}$$

die Ladung des Teilchens darstellt, also nicht von der Zeit abhängt, so erhalten wir

$$\Phi = \int \frac{\varrho\,(\mathfrak{r}', t)\, dV'}{|\,\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'\,|} + \frac{1}{2c^2}\frac{d^2}{dt^2}\int \varrho\,(\mathfrak{r}', t) \cdot |\,\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'\,|\, dV' + \ldots \tag{26,11}$$

Nehmen wir nun an, daß die Ladung in der Umgebung des Punktes

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_a = \mathfrak{r}_a(t) \tag{26,12}$$

konzentriert ist [2]), so erhalten wir aus (26,11)

$$\Phi = \frac{e_a}{|\,\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a\,|} + \frac{e_a}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,|\,\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a\,|. \tag{26,13}$$

Wenn wir darin die eine Differentiation nach der Zeit ausführen und

$$\dot{\mathfrak{r}}_a(t) = \mathfrak{v}_a \tag{26,14}$$

---

[1]) Diese Beschränkung betrifft die Geschwindigkeit des Teilchens ($v^2 \ll c^2$) und deren zeitliche Ableitungen verschiedener Ordnung.

[2]) Der Index a an den Größen e_a, $\mathfrak{r}_a$, $\mathfrak{v}_a$ usw. bedeutet hier die Nummer des Teilchens.

setzen, so ergibt sich

$$\Phi = \frac{e_a}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a|} - \frac{e_a}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(\mathfrak{v}_a \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a))}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a|}\right). \tag{26,15}$$

Der erste Term ist das COULOMB-Potential der ruhenden Ladung, der zweite ein Korrekturterm (Berücksichtigung der Retardierung).

Bei dem Vektorpotential braucht man die Retardierung nicht zu berücksichtigen.[1]) Es hat dann die Form

$$A_i = \frac{e_a v_{a i}}{c\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a|}. \tag{26,16}$$

Dieser Wert für das Vektorpotential ergibt sich, wenn man in (26,06) die zweite Ableitung nach der Zeit vernachlässigt, die Stromdichte $\mathfrak{j}$ durch $\varrho \mathfrak{v}_a$ ersetzt und zu einer Punktladung übergeht.

Der Ausdruck (26,15) für das skalare Potential ist insofern unbequem, als er nicht nur die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$, sondern auch die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}_a$ des felderzeugenden Teilchens enthält. Dieser Übelstand läßt sich leicht beseitigen, wenn man beachtet, daß uns eine Eichtransformation der Potentiale, d. h. eine Substitution

$$\left.\begin{aligned} \Phi &\to \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}, \\ A_i &\to A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \end{aligned}\right\} \tag{26,17}$$

(wo χ eine willkürliche Funktion der Koordinaten und der Zeit ist) zur Verfügung steht, welche das Feld nicht ändert. Setzen wir

$$\chi = \frac{e_a}{2c}\frac{(\mathfrak{v}_a \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a))}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a|}, \tag{26,18}$$

so fällt in (26,15) das zweite Glied weg. Dafür wird aber der Ausdruck für die A_i etwas komplizierter. Wir erhalten

$$\Phi = \frac{e_a}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a|}; \tag{26,19}$$

$$A_i = \frac{e_a}{2c}\left\{\frac{v_{a i}}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a|} + \sum_{k=1}^{3}\frac{v_{a k}(x_k - x_{a k})(x_i - x_{a i})}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_a|^3}\right\}. \tag{26,20}$$

---

[1]) In der LAGRANGE-Funktion und in den Bewegungsgleichungen sind die Terme, in die das Vektorpotential eingeht, von der gleichen Größenordnung wie die von der Korrektur des skalaren Potentials herrührenden Terme.

Wie man leicht nachprüft, verschwindet die Divergenz des neuen Ausdrucks für das Vektorpotential

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0. \tag{26,21}$$

Setzen wir nun diese Potentiale in die letzten beiden Terme der LAGRANGE-Funktion (26,01) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -e\Phi + \frac{e}{c}(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{v}) = &-\frac{e e_a}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_a|} + \\ &+\frac{e e_a}{2c^2}\left\{\frac{(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}_a)}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_a|} + \frac{(\mathfrak{v}_a\cdot(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_a))\,(\mathfrak{v}\cdot(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_a))}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_a|^3}\right\}. \end{aligned} \tag{26,22}$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn wir das Teilchen, welches das Feld erzeugt, mit demjenigen vertauschen, auf das dieses Feld wirkt. Wir können ihn als einen angenäherten Ausdruck für das Gesetz der Wechselwirkung zweier Teilchen betrachten. Die LAGRANGE-Funktion für ein Teilchensystem läßt sich dann schreiben

$$\begin{aligned} L = &-\sum_a m_a c^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}}\frac{e_a e_b}{|\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b|} + \\ &+\frac{1}{4c^2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}} e_a e_b\left\{\frac{(\mathfrak{v}_a\cdot\mathfrak{v}_b)}{|\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b|} + \frac{(\mathfrak{v}_a\cdot(\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b))\,(\mathfrak{v}_b\cdot(\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b))}{|\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b|^3}\right\}. \end{aligned} \tag{26,23}$$

Da schon bei der Berechnung der Wechselwirkung Größen von der Ordnung $(v/c)^2$ als klein angesehen wurden, wäre es eigentlich konsequenter, Terme von höherer Ordnung in dieser Größe überall zu vernachlässigen. Dementsprechend entwickeln wir auch die Wurzel nach $(v/c)^2$ und erhalten so statt (26,23)

$$\begin{aligned} L = &-W_0 + \sum_a\left(\frac{1}{2}m_a v_a^2 + \frac{1}{8}m_a\frac{v_a^4}{c^2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}}\frac{e_a e_b}{|\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b|} + \\ &+\frac{1}{4c^2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}} e_a e_b\left\{\frac{(\mathfrak{v}_a\cdot\mathfrak{v}_b)}{|\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b|} + \frac{(\mathfrak{v}_a\cdot(\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b))\,(\mathfrak{v}_b\cdot(\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b))}{|\mathfrak{r}_a-\mathfrak{r}_b|^3}\right\}, \end{aligned} \tag{26,24}$$

wobei

$$W_0 = c^2\sum_a m_a \tag{26,25}$$

die Summe der „Ruhenergien" der einzelnen Teilchen ist.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die LORENTZ-Transformation auf das Problem der Bewegung eines Systems von Massenpunkten anzuwenden ist. Wir nehmen an, daß dieses Problem in einem bestimmten Bezugssystem gelöst sei, d. h. daß in diesem Bezugssystem die Koordinaten jedes Teilchens als Funktionen der Zeit t dieses Systems

$$\mathfrak{r}_a = \mathfrak{r}_a(t) \tag{26,26}$$

bekannt sind. Nun führen wir eine LORENTZ-Transformation aus und fragen, wie in dem neuen System die neuen Koordinaten x_a', y_a', z_a' als Funktionen der neuen Zeit t' aussehen. Die LORENTZ-Transformation hat die Form

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{V}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot(\mathfrak{r}-\mathfrak{V}t)), \tag{26,27}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r})\right). \tag{26,28}$$

Die neuen Funktionen der neuen Zeit ergeben sich dann durch Elimination der Variablen t aus den Gleichungen

$$\mathfrak{r}_a' = \mathfrak{r}_a(t) - \mathfrak{V}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot(\mathfrak{r}_a(t)-\mathfrak{V}t)), \tag{26,29}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left\{t - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a(t))\right\}. \tag{26,30}$$

Man hat also die Wurzel t der Gleichung (26,30) zu bestimmen und in (26,29) einzusetzen. Das kann nur näherungsweise geschehen, indem man V^2/c^2 als klein gegen Eins ansieht. Als Wurzel der Gleichung (26,30) erhält man in dieser Näherung

$$t = \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right)t' + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a(t')). \tag{26,31}$$

Bevor wir das in die Gleichung (26,29) einsetzen, wollen wir diese in der etwas vereinfachten Form

$$\mathfrak{r}_a' = \mathfrak{r}_a(t) - \mathfrak{V}t + \frac{\mathfrak{V}}{2c^2}\{(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a(t)) - V^2 t\} \tag{26,32}$$

schreiben. Setzen wir darin (26,31) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{r}_a'(t') = \mathfrak{r}_a(t') - \mathfrak{V}t' + \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{v}_a(t')\cdot\left\{-\frac{1}{2}V^2 t' + (\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a(t'))\right\} - \frac{\mathfrak{V}}{2c^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a(t')), \tag{26,33}$$

mit

$$\mathfrak{v}_a(t') = \left(\frac{d\mathfrak{r}_a(t)}{dt}\right)_{t=t'}. \tag{26,34}$$

Durch Differentiation der Formel (26,33) nach der Variablen t' erhalten wir den entsprechenden Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_a'(t') = \mathfrak{v}_a(t') - \mathfrak{V} + \frac{1}{c^2}\mathfrak{v}_a(t')\left\{-\frac{1}{2}V^2 + (\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{v}_a(t'))\right\} - \\ - \frac{\mathfrak{V}}{2c^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{v}_a(t')) + \frac{1}{c^2}\dot{\mathfrak{v}}_a(t')\left\{-\frac{1}{2}V^2 t' + (\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a(t'))\right\}. \quad (26,35)$$

Dabei ist $\dot{\mathfrak{v}}_a$ die Ableitung von $\mathfrak{v}_a$ nach dem Argument.

Die Beziehung zwischen t und t' hängt von der Teilchennummer a ab. Das muß auch so sein, denn die Umrechnung auf die neue Gleichzeitigkeit erfordert für verschiedene Teilchen verschiedene Korrekturen. Die alte Gleichzeitigkeit, d. h. Gleichzeitigkeit im ursprünglichen Bezugssystem, ist die Gleichheit der Werte t für alle Teilchen (wobei die Werte t' sich als verschieden ergeben). Die neue Gleichzeitigkeit, d. h. Gleichzeitigkeit im transformierten Bezugssystem, bedeutet, daß für alle Teilchen gleiche t'-Werte (und verschiedene t-Werte) betrachtet werden. Wir dürfen also den Index a bei t' unterdrücken. Ersetzen wir nun das Symbol t' durch den Buchstaben t ohne Strich und lassen dieses Argument in allen Funktionen, die in den Formeln (26,33) und (26,35) vorkommen, fort, so können wir diese Gleichungen auch kürzer in der Form

$$\mathfrak{r}_a' = \mathfrak{r}_a - \mathfrak{V}t + \frac{1}{c^2}\mathfrak{v}_a\left\{-\frac{1}{2}V^2 t + (\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a)\right\} - \frac{\mathfrak{V}}{2c^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a), \quad (26,36)$$

$$\mathfrak{v}_a' = \mathfrak{v}_a - \mathfrak{V} + \frac{1}{c^2}\mathfrak{v}_a\left\{-\frac{1}{2}V^2 + (\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{v}_a)\right\} - \frac{\mathfrak{V}}{2c^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{v}_a) + \\ + \frac{1}{c^2}\dot{\mathfrak{v}}_a\left\{-\frac{1}{2}V^2 t + (\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{r}_a)\right\} \quad (26,37)$$

schreiben. Das sind die neuen Funktionen $\mathfrak{r}_a'$ und $\mathfrak{v}_a'$, ausgedrückt durch die neue unabhängige Variable (die wir mit dem gleichen Buchstaben wie die alte bezeichnen).

Die hier abgeleiteten Formeln sind Näherungsformeln. Nimmt man aber an, daß die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_a$ die gleiche Größenordnung haben, so sind die dabei gemachten Vernachlässigungen genau dieselben wie bei der Ableitung der LAGRANGE-Funktion (unter Berücksichtigung der Retardierung) und liegen deshalb im Wesen des Problems.

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich bekanntlich aus der Variation des Wirkungsintegrals

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L\,dt. \quad (26,38)$$

Wenn, wie es meist der Fall ist, die LAGRANGE-Funktion nur von den Koordinaten und den Geschwindigkeiten (und gegebenenfalls noch von der Zeit) abhängt, haben die Bewegungsgleichungen die Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} - \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0 \quad \text{usw.} \quad (26,39)$$

Treten dagegen in der LAGRANGE-Funktion auch die Beschleunigungen auf, so muß man die Bewegungsgleichungen in der Form

$$-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}-\frac{\partial L}{\partial x_a}=0 \quad \text{usw.} \tag{26,40}$$

schreiben, wobei $\ddot{x}_a$, $\ddot{y}_a$, $\ddot{z}_a$ die Komponenten der Beschleunigung für das Teilchen a sind.

Ist das Wirkungsintegral S invariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation, so sind die Bewegungsgleichungen offenbar kovariant. Als Beispiel betrachten wir die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen, die sich aus der LAGRANGE-Funktion (26,01) ergeben. In diesem Fall läßt sich das Wirkungsintegral in der Form

$$S=-mc^2\int d\tau+\frac{e}{c}\int\sum_{k=0}^{3}A_k\,dx_k \tag{26,41}$$

(mit $x_0 = ct$) schreiben. Seine Invarianz folgt aus der Invarianz des Differentials der Eigenzeit $d\tau$ und der aus den Potentialen aufgebauten linearen Differentialform (24,02).

Für die Kovarianz der Bewegungsgleichungen ist aber die Invarianz des Wirkungsintegrals S nicht notwendig: Es genügt, wenn sich die *Variation* des Wirkungsintegrals bei einer LORENTZ-Transformation nicht ändert. Man erkennt das schon am Beispiel des Ausdrucks (26,41). Eichen wir darin die Potentiale gemäß (26,17) um, wobei χ eine beliebige Funktion ist, so geht S über in

$$S'=S-\frac{e}{c}(\chi^{(2)}-\chi^{(1)}). \tag{26,42}$$

Dabei sind $\chi^{(1)}$ und $\chi^{(2)}$ die Werte der Funktion χ an der unteren und an der oberen Grenze. Da aber die Variation an den Grenzen verschwindet, haben wir

$$\delta S'=\delta S, \tag{26,43}$$

und die Bewegungsgleichungen ändern sich nicht. Das muß auch so sein, denn eine Eichtransformation der Potentiale läßt das Feld unverändert.

Diese Überlegungen sollen nun auf die Bewegungsgleichungen eines Systems von Ladungen, die miteinander wechselwirken, und auf die LAGRANGE-Funktion (26,23) angewandt werden. Den Ausdruck, der sich aus der LAGRANGE-Funktion $L(t)$ ergibt, wenn man nach den Formeln (26,33) und (26,35) $\mathfrak{r}_a(t)$ durch $\mathfrak{r}'_a(t')$ und $\mathfrak{v}_a(t)$ durch $\mathfrak{v}'_a(t')$ ersetzt, bezeichnen wir mit $L'(t')$. Lautete das ursprüngliche Wirkungsintegral

$$S=\int_{(1)}^{(2)}L(t)\,dt, \tag{26,44}$$

so haben wir als transformiertes Integral

$$S'=\int_{(1)}^{(2)}L'(t')\,dt'. \tag{26,45}$$

Die Änderung des Wirkungsintegrals bei einer LORENTZ-Transformation beträgt also

$$S' - S = \int_{(1)}^{(2)} L'(t')\,dt' - \int_{(1)}^{(2)} L(t)\,dt \tag{26,46}$$

oder, wenn wir im ersten Integral die Integrationsvariable t' mit demselben Buchstaben t wie im zweiten bezeichnen,

$$S' - S = \int_{(1)}^{(2)} L'(t)\,dt - \int_{(1)}^{(2)} L(t)\,dt. \tag{26,47}$$

Hierbei ist $L'(t)$ derjenige Ausdruck, welcher sich aus $L(t)$ ergibt, wenn man $\mathfrak{r}_a$ durch $\mathfrak{r}'_a$ und $\mathfrak{v}_a$ durch $\mathfrak{v}'_a$ nach den Formeln (26,36) und (26,37) ausdrückt.

Aus der Beziehung (26,47) folgt als hinreichende Bedingung für die Kovarianz der Bewegungsgleichungen, daß die Differenz

$$\{L'(t) - L(t)\}\,dt = dF \tag{26,48}$$

ein vollständiges Differential einer Funktion F sein muß. Dann ist nämlich

$$S' - S = F^{(2)} - F^{(1)}, \tag{26,49}$$

wobei $F^{(2)}$ und $F^{(1)}$ die Werte der Funktion F an den Grenzen sind. Damit werden die Variationen der Integrale S und S' einander gleich. Durch Ausführung der Rechnungen kann man sich überzeugen, daß die Beziehung (26,48) tatsächlich erfüllt ist und daß die Funktion F folgende Form hat:

$$F = \sum_a \left(-m_a + \frac{1}{2} m_a \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|}\right)\left((\mathfrak{V}_a \cdot \mathfrak{r}) - \frac{V^2}{2} t\right) -$$
$$- \frac{1}{c^2} \sum_a m_a (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{r}_a)(\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{v}_a) + \frac{V^2}{2c^2} \sum_a m_a (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{r}_a) + \frac{V^4}{8c^2} \sum_a m_a t. \tag{26,50}$$

Damit ist bewiesen, daß die aus der LAGRANGE-Funktion (26,23) oder (26,24) folgenden Bewegungsgleichungen tatsächlich (in der betrachteten Näherung) gegenüber einer LORENTZ-Transformation kovariant sind.

§ 27 Ableitung der Erhaltungssätze in der Punktmechanik

Wir wollen jetzt die Integrale der Bewegungsgleichungen aufstellen. Zu diesem Zweck betrachten wir die in § 23 untersuchte infinitesimale LORENTZ-Transformation, die alle zehn Parameter enthält. Es sind dies die Parameter τ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{v}$ und $\vec{\omega}$, welchen folgende Transformationen entsprechen: eine Änderung des Zeitnullpunktes um τ, eine Verschiebung des räumlichen Koordinatenursprungs nach rückwärts um $\mathfrak{a}$, der Übergang zu einem Bezugssystem, das sich relativ zum ursprünglichen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt und eine infinitesimale Drehung der Raumachsen um die Größe $\vec{\omega}$. Wir müssen nun die durch eine solche Trans-

formation bewirkte Änderung derjenigen Funktionen berechnen, welche die Koordinaten jedes Teilchens als Funktionen der Zeit darstellen. Diese Änderung $\delta \mathfrak{r}_b$ hat ihre Ursachen einmal in dem Vektorcharakter von $\mathfrak{r}_b$, zum anderen aber in der Änderung des Argumentes t.

Die vom Vektorcharakter von $\mathfrak{r}_b$ herrührende Änderung beträgt nach (23,06) und (23,17)

$$\Delta \mathfrak{r}_b = \mathfrak{a} - \mathfrak{V} t + [\vec{\omega} \times \mathfrak{r}_b]. \tag{27,01}$$

Das Argument t ändert sich für das Teilchen b um die Größe

$$\Delta t_b = \tau - \frac{1}{c^2} (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{r}_b). \tag{27,02}$$

Dabei rührt das erste Glied von der Verschiebung des Zeitnullpunktes, das zweite vom Übergang zu einem bewegten Bezugssystem her. [Die Formel (27,02) ist eine der Gleichungen (23,06).]

Um die Änderung $\Delta^* \mathfrak{r}_b$, die aus der Änderung des Argumentes in der Funktion $\mathfrak{r}_b(t)$ resultiert, zu erhalten, beachten wir, daß definitionsgemäß

$$\mathfrak{r}_b(t) = \mathfrak{r}'_b(t') \qquad (t' = t + \Delta t_b) \tag{27,03}$$

ist. Daraus folgt

$$\mathfrak{r}'_b(t) = \mathfrak{r}_b(t - \Delta t_b) = \mathfrak{r}_b(t) - \mathfrak{v}_b \Delta t_b \tag{27,04}$$

und damit

$$\Delta^* \mathfrak{r}_b = \mathfrak{r}'_b(t) - \mathfrak{r}_b(t) = - \mathfrak{v}_b \Delta t_b. \tag{27,05}$$

Die Gesamtänderung der Funktion $\mathfrak{r}_b(t)$ beträgt also

$$\delta \mathfrak{r}_b = \Delta \mathfrak{r}_b + \Delta^* \mathfrak{r}_b = \Delta \mathfrak{r}_b - \mathfrak{v}_b \Delta t_b. \tag{27,06}$$

Nach (27,01) und (27,02) läßt sich somit die Gesamtänderung $\delta \mathfrak{r}_b$ durch die Parameter der infinitesimalen LORENTZ-Transformation folgendermaßen ausdrücken:

$$\delta \mathfrak{r}_b = - \mathfrak{v}_b \tau + \mathfrak{a} - \mathfrak{V} t + \frac{1}{c^2} \mathfrak{v}_b (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{r}_b) + [\vec{\omega} \times \mathfrak{r}_b]. \tag{27,07}$$

Die Gesamtänderung $\delta \mathfrak{v}_b$ der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_b$ ist dann offenbar

$$\delta \mathfrak{v}_b = \frac{d}{dt} \delta \mathfrak{r}_b. \tag{27,08}$$

In dem Ausdruck für $\delta \mathfrak{r}_b$ stimmen die Terme mit $\mathfrak{v}$ mit den Termen erster Ordnung (hinsichtlich $\mathfrak{v}$) in der Formel (26,36) überein, wie es auch sein muß.

Wir berechnen nun die Änderung der LAGRANGE-Funktion bei einer infinitesimalen LORENTZ-Transformation, und zwar nach zwei Methoden, welche für die gesuchte Änderung zwei verschiedene Ausdrücke ergeben, die wir dann einander gleichsetzen. Bei der ersten Methode werden die Bewegungsgleichungen

verwendet, bei der zweiten dagegen führt man die Transformation unmittelbar durch und benutzt die Formeln (26,48) und (26,50). Zunächst gilt

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a} \cdot \delta \mathfrak{v}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{r}_a} \cdot \delta \mathfrak{r}_a \right), \tag{27,09}$$

sofern die Funktion L die Zeit nicht explizite enthält. Unter $\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{r}_a}$ ist dabei der dreidimensionale Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial L}{\partial x_a}$, $\frac{\partial L}{\partial y_a}$, $\frac{\partial L}{\partial z_a}$ zu verstehen; eine entsprechende Bedeutung hat $\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a}$. Mit den Bewegungsgleichungen und der Beziehung (27,08) läßt sich dafür schreiben

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a} \delta \mathfrak{r}_a. \tag{27,10}$$

Wir können aber die Änderung der LAGRANGE-Funktion L auch ohne Benutzung der Bewegungsgleichungen bestimmen. Offenbar ändert sich L bei einer Verschiebung des Ursprungs und einer Drehung der Raumachsen nicht. Bei einer Änderung des Zeitnullpunktes ändert sich L um die Größe $-\frac{dL}{dt}\tau$. Ist nämlich $L'(t') = L(t)$, mit $t' = t + \tau$, so haben wir

$$L'(t) = L(t - \tau) = L(t) - \tau \frac{dL}{dt}. \tag{27,11}$$

Die Änderung von L bei dem Übergang zu einem bewegten Bezugssystem wird durch die Formel (26,48) gegeben. Dabei können wir uns in dem Ausdruck (26,50) für F auf die Glieder erster Ordnung (hinsichtlich $\mathfrak{V}$) beschränken, also schreiben

$$F = \sum_a \left(- m_a + \frac{1}{2} m_a \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{e_a}{2\,c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|} \right) (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{r}_a). \tag{27,12}$$

Es ist also

$$\delta L = -\tau \frac{dL}{dt} + \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}(-\tau L + F). \tag{27,13}$$

Setzen wir nun die Ausdrücke (27,13) und (27,10) einander gleich, so ergibt sich daraus

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a} \cdot \delta \mathfrak{r}_a + L\tau - F \right\} = 0, \tag{27,14}$$

also

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a} \cdot \delta \mathfrak{r}_a + L\tau - F = \text{const.} \tag{27,15}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar eine lineare Funktion der zehn Parameter der LORENTZ-Transformation. Setzt man darin die Ausdrücke (27,07) und (27,12) für $\delta \mathfrak{r}_a$ und F ein, so erhält man

$$I \equiv -\tau W + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}) + (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{K}) + (\vec{\omega} \cdot \mathfrak{M}) = \text{const}. \tag{27,16}$$

Die Größen W, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ hängen von den Parametern nicht mehr ab und lauten

$$W = \sum_a \mathfrak{v}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a} - L, \tag{27,17}$$

$$\mathfrak{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a}, \tag{27,18}$$

$$\mathfrak{K} = \sum_a \left(m_a - \frac{1}{2} m_a \frac{v_a^2}{c^2} + \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (a \neq b)}} \frac{e_b}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|} + \frac{1}{c^2} \mathfrak{v}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a} \right) \mathfrak{r}_a - t \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a}, \tag{27,19}$$

$$\mathfrak{M} = \sum_a \left[\mathfrak{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_a} \right]. \tag{27,20}$$

Die linke Seite von (27,16) muß konstant sein, unabhängig von den Werten der Parameter τ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{v}$ und $\vec{\omega}$. Das ist nur möglich, wenn die Größen W, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ selbst konstant sind. Wir erhalten also zehn Integrale, von denen jedes mit einem bestimmten Parameter der infinitesimalen LORENTZ-Transformation verknüpft ist. Die physikalische Bedeutung dieser Integrale ist leicht einzusehen: W ist das Energieintegral, $\mathfrak{P}$ das Impulsintegral, $\mathfrak{K}$ das Integral der Schwerpunktsbewegung und $\mathfrak{M}$ das Drehimpulsintegral. Die gefundenen zehn Integrale bilden also die klassischen Integrale eines Systems von Massenpunkten mit relativistischen Korrekturen.

Wir wollen die gefundenen Integrale explizite hinschreiben. Man findet

$$\begin{aligned} W = {} & c^2 \sum_a m_a + \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + \frac{3}{8} \sum_a m_a \frac{v_a^4}{c^2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|} + \\ & + \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b (\mathfrak{v}_a \cdot \mathfrak{v}_b)}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|} + \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|^3} (\mathfrak{v}_a \cdot (\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b))(\mathfrak{v}_b \cdot (\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b)). \end{aligned} \tag{27,21}$$

Das ist die Energie des Systems. Setzen wir

$$W = c^2 \sum_a m_a + E, \tag{27,22}$$

so ist die Größe E die Energie in der üblichen Normierung (sie verschwindet, wenn die gegenseitigen Abstände unbegrenzt wachsen und die Geschwindigkeiten

gegen Null gehen). Neben der Energie W betrachten wir die ihr entsprechende Masse

$$M = \frac{W}{c^2} = \sum_a m_a + \frac{E}{c^2}, \tag{27,23}$$

die man als die Gesamtmasse des Systems bezeichnen kann. Nach dieser Definition setzt sich die Gesamtmasse des Systems aus der Summe der Ruhmassen der einzelnen Teilchen und derjenigen Masse zusammen, welche ihrer kinetischen und ihrer Wechselwirkungsenergie entspricht.

Wir wenden uns nun den übrigen Bewegungsintegralen des Systems zu. Nach (27,18) beträgt das Impulsintegral

$$\mathfrak{P} = \sum_a m_a \mathfrak{v}_a \left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) + \\ + \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|} \left\{\mathfrak{v}_a + \frac{(\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b)(\mathfrak{v}_b \cdot (\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b))}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|^2}\right\}. \tag{27,24}$$

In dem Integral der Schwerpunktsbewegung setzen wir zur Abkürzung

$$M_a^* = m_a\left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) + \frac{e_a}{2c^2} \sum_{\substack{b \\ (b \neq a)}} \frac{e_b}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|}. \tag{27,25}$$

Damit ergibt sich

$$\mathfrak{K} = \sum_a M_a^* \mathfrak{r}_a - t\,\mathfrak{P}. \tag{27,26}$$

Man beachte, daß

$$\sum_a M_a^* = M \tag{27,27}$$

gilt. Dabei ist unter M der Ausdruck (27,23) in derselben Näherung zu verstehen, in der M_a^* gegeben ist (das entspricht einer nichtrelativistischen Näherung für die Energie E). Führen wir den Radiusvektor $\mathfrak{R}$ des Schwerpunktes des Systems nach der Formel

$$M\mathfrak{R} = \sum_a M_a^* \mathfrak{r}_a \tag{27,28}$$

ein, so lautet der Ausdruck (27,26) für $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} = M\mathfrak{R} - t\,\mathfrak{P}. \tag{27,29}$$

Aus der Konstanz der Größe $\mathfrak{K}$ folgt das Bewegungsgesetz für den Schwerpunkt des Systems.

Das Integral für den Drehimpuls des Systems lautet schließlich

$$\mathfrak{M} = \sum_a m_a \left(1 + \frac{v_a^2}{2c^2}\right)[\mathfrak{r}_a \times \mathfrak{v}_a] + \\ + \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{e_a e_b}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|} \left\{[\mathfrak{r}_a \times \mathfrak{v}_b] - \frac{[\mathfrak{r}_a \times \mathfrak{r}_b](\mathfrak{v}_b \cdot (\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b))}{|\mathfrak{r}_a - \mathfrak{r}_b|^2}\right\}. \tag{27,30}$$

§ 28 Der Tensorcharakter der Bewegungsintegrale

Wir müssen nun untersuchen, wie sich die gefundenen Integrale bei einer LORENTZ-Transformation verhalten. Wüßten wir, daß der Ausdruck

$$I = -\tau W + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}) + (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{K}) + (\vec{\omega} \cdot \mathfrak{M}) \tag{28,01}$$

eine Invariante ist, so könnten wir aus den Eigenschaften der Parameter τ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{V}$ und $\vec{\omega}$ der infinitesimalen LORENTZ-Transformation auf den Tensorcharakter der Größen W, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ schließen. Da jedoch die Invarianz des Ausdrucks (28,01) hier nicht bewiesen ist, wählen wir einen direkteren Weg, obgleich er ziemlich ermüdende Rechnungen erfordert (die wir aber nicht im einzelnen ausführen werden). Wir unterwerfen nämlich die Größen W, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ einer endlichen LORENTZ-Transformation und untersuchen, wie sich die transformierten Größen durch die ursprünglichen ausdrücken.

W', $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{M}'$ seien die Größen, die aus den Ausdrücken für W, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ hervorgehen, wenn man darin $\mathfrak{r}_a$ und $\mathfrak{v}_a$ nach den Formeln (26,36) und (26,37) durch $\mathfrak{r}_a'$ und $\mathfrak{v}_a'$ ausdrückt. Für diese erhalten wir

$$W' = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{V^4}{c^4}\right) W - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)(\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{P}), \tag{28,02}$$

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} - \mathfrak{V}\frac{W}{c^2} + \frac{\mathfrak{V}}{2c^2}\left(\mathfrak{V} \cdot \left(\mathfrak{P} - \mathfrak{V}\frac{W}{c^2}\right)\right) \tag{28,03}$$

oder, unter Benutzung der Gesamtmasse M,

$$c^2 M' = \left(c^2 + \frac{1}{2}V^2 + \frac{3}{8}\frac{V^4}{c^2}\right) M - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right)(\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{P}), \tag{28,04}$$

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} - \mathfrak{V} M + \frac{\mathfrak{V}}{2c^2}\left(\mathfrak{V} \cdot (\mathfrak{P} - \mathfrak{V} M)\right). \tag{28,05}$$

Die letzten Formeln lassen sich mit derselben Genauigkeit auch schreiben

$$c^2 M' = \frac{c^2 M - (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{P})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{28,06}$$

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} - \mathfrak{V} M + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V} \cdot (\mathfrak{P} - \mathfrak{V} M)). \tag{28,07}$$

Vergleichen wir diese Formeln mit denen für die LORENTZ-Transformation (26,27) und (26,28), so sehen wir, daß sich die Komponenten P_x, P_y, P_z des Vektors $\mathfrak{P}$ wie die Koordinaten x, y, z und die Gesamtmasse M wie die Zeit t transformieren. Die vier Größen

$$P^0 = Mc = \frac{W}{c}; \quad P^1 = P_x; \quad P^2 = P_y; \quad P^3 = P_z \tag{28,08}$$

bilden also einen kontravarianten Vektor. Die kovarianten Komponenten dieses Vierervektors lauten

$$P_0 = Mc = \frac{W}{c}; \quad P_1 = -P_x; \quad P_2 = -P_y; \quad P_3 = -P_z. \quad (28,09)$$

Betrachten wir das ganze Ladungssystem als einen zusammengesetzten Körper, so müssen wir ihm die Masse M und den Impuls $\mathfrak{P}$ zuordnen. Ferner können wir ihm (genauer seinem Schwerpunkt) die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{P}}{M} \quad (28,10)$$

und die Ruhmasse

$$\mu = \sqrt{M^2 - \frac{P^2}{c^2}} \quad (28,11)$$

zuschreiben. Die Größe μ hat den Wert M' in dem Bezugssystem, in welchem $\mathfrak{P}' = 0$ ist. Der letzte Fall liefert ein Beispiel dafür, daß die Ruhmasse eines Körpers von seinem inneren Zustand, in unserem Fall vom Bewegungszustand seiner Bestandteile, abhängt.

Wir wenden uns nun dem Transformationsgesetz für die Größen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ zu. Mit denselben Substitutionen (26,36) und (26,37) wie oben erhalten wir für $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{M}'$ die Ausdrücke

$$\mathfrak{K}' = \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)\mathfrak{K} - \frac{1}{2c^2}\mathfrak{V}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{K}) - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{V}\times\mathfrak{M}], \quad (28,12)$$

$$\mathfrak{M}' = \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)\mathfrak{M} - \frac{1}{2c^2}\mathfrak{V}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{M}) + \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right)[\mathfrak{V}\times\mathfrak{K}]. \quad (28,13)$$

Diese Formeln lassen sich mit der gleichen Genauigkeit auch schreiben

$$\mathfrak{K}' = \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{K}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left\{\mathfrak{K} - \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{K}) - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{V}\times\mathfrak{M}]\right\}, \quad (28,14)$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{M}) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left\{\mathfrak{M} - \frac{\mathfrak{V}}{V^2}(\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{M}) + [\mathfrak{V}\times\mathfrak{K}]\right\}. \quad (28,15)$$

Wir vergleichen diese Formeln mit dem Transformationsgesetz eines antisymmetrischen Tensors, wobei wir beachten, daß im Sinne der dreidimensionalen Vektoranalysis $\mathfrak{K}$ ein polarer, $\mathfrak{M}$ ein axialer Vektor ist. Die entsprechenden Transformationsformeln haben wir in § 24 für den elektromagnetischen Feldtensor aufgeschrieben [Formeln (24,37) und (24,38)]. Um Übereinstimmung zu erzielen, müssen wir annehmen, daß sich der Vektor $\mathfrak{M}$ wie $\mathfrak{H}$ und der Vektor

$\mathfrak{K}$ wie $-\frac{1}{c}\,\mathfrak{E}$ transformiert. (Die andere Möglichkeit $\mathfrak{M}$ wie $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{K}$ wie $\frac{1}{c}\,\mathfrak{H}$ scheidet aus, weil $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}$ polare, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ axiale Vektoren sind.) Wir können also einen antisymmetrischen Tensor mit den kovarianten Komponenten

$$\left.\begin{array}{lll} M_{23} = M_x; & M_{31} = M_y; & M_{12} = M_z, \\ M_{10} = -c\,K_x; & M_{20} = -c\,K_y; & M_{30} = -c\,K_z \end{array}\right\} \tag{28,16}$$

oder den kontravarianten Komponenten

$$\left.\begin{array}{lll} M^{23} = M_x; & M^{31} = M_y; & M^{12} = M_z, \\ M^{10} = c\,K_x; & M^{20} = c\,K_y; & M^{30} = c\,K_z \end{array}\right\} \tag{28,17}$$

einführen. Als Kontrolle dient der Umstand, daß für den Fall, daß nur ein einzelnes Teilchen vorhanden ist,

$$\left.\begin{array}{l} M_x = m\,(x^2 u^3 - x^3 u^2) \quad \text{usw.} \\ c\,K_x = m\,(x^1 u^0 - x^0 u^1) \quad \text{usw.} \end{array}\right\} \tag{28,18}$$

gilt. Dabei sind u^0, u^1, u^2 und u^3 die Komponenten der Vierergeschwindigkeit. Die Koordinaten und die Zeit sind durch obere Indizes $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ und $x^3 = z$ gekennzeichnet, wodurch hervorgehoben werden soll, daß es sich um kontravariante Größen handelt.

Damit haben wir gezeigt, daß vier von den zehn Bewegungsintegralen (Energie und Impuls) einen Vierervektor, die übrigen sechs (die Integrale der Schwerpunktsbewegung und des Drehimpulses) einen antisymmetrischen Tensor bilden. Wenn also diese Größen in irgendeinem Bezugssystem konstant sind, so sind sie es auch in jedem anderen. Diese Transformationsgesetze haben wir aus Näherungsformeln abgeleitet; das liegt jedoch an dem Näherungscharakter der ganzen Problemstellung: Wie bereits erwähnt, bleiben strenggenommen die Energie und der Impuls eines Systems von Ladungen gar nicht konstant, sondern sie können in Form von Strahlung abgegeben werden.

Da wir nunmehr die Transformationseigenschaften (d. h. den Tensorcharakter) der Bewegungsintegrale kennen, können wir nachweisen, daß der Ausdruck (28,01) tatsächlich eine Invariante ist. Wir brauchen dazu diesen Ausdruck nur vierdimensional zu schreiben. Nach den Ergebnissen von § 23 gilt

$$\tau = \frac{1}{c}\,a_0; \quad a_x = -a_1; \quad a_y = -a_2; \quad a_z = -a_3, \tag{28,19}$$

wobei a_0, a_1, a_2, a_3 die Komponenten eines kovarianten Vektors sind. Ferner gilt

$$V_x = c\omega_{10}; \quad V_y = c\omega_{20}; \quad V_z = c\omega_{30}, \tag{28,20}$$

$$\omega_x = \omega_{23}; \quad \omega_y = \omega_{31}; \quad \omega_z = \omega_{12}. \tag{28,21}$$

Dabei sind ω_{ik} die kovarianten Komponenten eines antisymmetrischen Tensors. Unter Benutzung der Viererschreibweise (28,08) und (28,17) für die Bewegungsintegrale erhalten wir für (28,01)

$$I = - a_0 P^0 - a_1 P^1 - a_2 P^2 - a_3 P^3 + \\ + \omega_{10} M^{10} + \omega_{20} M^{20} + \omega_{30} M^{30} + \omega_{23} M^{23} + \omega_{31} M^{31} + \omega_{12} M^{12}, \tag{28,22}$$

oder kürzer

$$I = - \sum_{i=0}^{3} a_i P^i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{3} \omega_{ik} M^{ik}. \tag{28,23}$$

Damit ist unsere Behauptung über die Invarianz der Größe I bewiesen.

§ 29 Einiges zur üblichen Formulierung der Erhaltungssätze

In diesem Paragraphen sollen einige kritische Bemerkungen zur üblichen Formulierung der Erhaltungssätze gemacht werden. Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, wollen wir uns mit den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls beschäftigen; diese werden auch am häufigsten benutzt.

Die Ausdrücke für die Energie (oder die Gesamtmasse) und für den Impuls schreibt man gewöhnlich in der Form

$$W = M c^2 = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}, \tag{29,01}$$

$$\mathfrak{P} = \sum_a \frac{m_a \mathfrak{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \tag{29,02}$$

Von diesen Ausdrücken wird nun zweierlei behauptet: erstens, daß sie einen Vierervektor bilden, und zweitens, daß sie konstant sind. Sowohl die eine als auch die andere Behauptung gilt jedoch nur dann, wenn die Teilchen nicht miteinander wechselwirken. In diesem Fall bleibt aber die Geschwindigkeit jedes einzelnen Teilchens konstant, und jedes Wertequadrupel

$$W^{(a)} = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}; \qquad \mathfrak{P}^{(a)} = \frac{m_a \mathfrak{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \tag{29,03}$$

bildet für sich einen konstanten Vierervektor. Ist also keine Wechselwirkung vorhanden, so ergibt sich die Konstanz der Summen (29,01) und (29,02) in

trivialer Weise aus der Konstanz der einzelnen Glieder (29,03), und die Bildung der Summe bringt nichts Neues.

Ist dagegen eine Wechselwirkung vorhanden, so sind die Ausdrücke (29,01) und (29,02) nicht mehr konstant und bilden auch keinen Vierervektor. Der erste Teil dieser Behauptung ist ohne weiteres einzusehen, denn sogar in der nichtrelativistischen Näherung ist nicht die kinetische, sondern die Gesamtenergie des Teilchensystems konstant. Die Relativitätstheorie bringt nicht nur an dem Ausdruck für die Energie des Systems, sondern auch an dem Ausdruck für den Impuls Korrekturen an, die der Wechselwirkung entsprechen [vgl. (27,21) und (27,24)]. Erst mit diesen Korrekturen bleiben die beiden Größen konstant. Hinsichtlich der Vektoreigenschaften könnte folgender Umstand auf den ersten Blick paradox erscheinen. Wie wir in § 25 [Formel (25,23) und (25,24)] sahen, bildet das Wertequadrupel (29,03) für ein einzelnes Teilchen auch im Fall einer beschleunigten Bewegung einen Vierervektor. Ferner dürfte die Summe von Vektoren ebenfalls ein Vektor sein. Dagegen haben wir behauptet, daß die Summen (29,01) und (29,02) nicht die Komponenten eines Vierervektors bilden. Dieses Paradoxon klärt sich dadurch auf, daß die Größen $W^{(a)}$ und $\mathfrak{P}^{(a)}$ Funktionen einer für alle Teilchen einheitlichen Zeit sind. W und $\mathfrak{P}$ sind dann die Summen *über die im gegebenen Bezugssystem gleichzeitigen* Werte $W^{(a)}$ und $\mathfrak{P}^{(a)}$. In einem anderen Bezugssystem muß man nicht nur aus $W^{(a)}$ und $\mathfrak{P}^{(a)}$ Linearkombinationen nach den Regeln der Vektorrechnung bilden, sondern diese Größen auch auf die neue Gleichzeitigkeit umrechnen (wie in § 26 auseinandergesetzt). Diese Umrechnung liefert nur für konstante $W^{(a)}$ und $\mathfrak{P}^{(a)}$ nichts Neues. Im allgemeinen Fall dagegen muß man dabei die Änderung dieser Größen bei dem Übergang von der alten zur neuen Gleichzeitigkeit berücksichtigen (all dies wurde in § 26 näherungsweise durchgeführt). Danach ist also klar, daß die Summen $W = \sum_a W^{(a)}$ und $\mathfrak{P} = \sum_a \mathfrak{P}^{(a)}$ für wechselwirkungsfreie Teilchen Vektoreigenschaften haben, für wechselwirkende Teilchen dagegen nicht.

Ist eine Wechselwirkung vorhanden, so entsprechen die in § 27 angegebenen Ausdrücke für die Bewegungsintegrale den gestellten Forderungen: Sie bilden in der betrachteten Näherung einen Vierervektor und sind zeitlich konstant. Diese Ausdrücke unterscheiden sich von (29,01) und (29,02) einerseits durch die Wechselwirkungsterme, und andererseits dadurch, daß in ihnen die Größen $\frac{m_a}{\sqrt{1 - v_a^2 / c^2}}$ durch die ersten Terme der Entwicklungen nach Potenzen von v_a^2/c^2 ersetzt sind. Diese Entwicklung haben wir bis zu Gliedern von derselben Ordnung durchgeführt, die auch in den Wechselwirkungsgliedern noch berücksichtigt wird.

Es kann allerdings vorkommen, daß infolge großer Abstände zwischen den Teilchen die Wechselwirkungsglieder nur eine unbedeutende Rolle spielen, während gleichzeitig die Geschwindigkeiten der Teilchen sehr groß sind. In diesem Grenzfall sehr schneller, schwach wechselwirkender Teilchen kann man die Ausdrücke (29,01) und (29,02) verwenden. Man muß dabei jedoch beachten, daß diese Ausdrücke nur *vor dem „Beginn“* und *nach dem „Ende“* der Wechselwirkung gelten, nicht aber während der Wechselwirkung. Man

kann dann also die Erhaltungssätze für die Energie und den Impuls in der üblichen Form

$$\sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\frac{v_a^{*2}}{c^2}}}, \tag{29,04}$$

$$\sum_a \frac{m_a \mathfrak{v}_a}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} = \sum_a \frac{m_a \mathfrak{v}_a^*}{\sqrt{1-\frac{v_a^{*2}}{c^2}}} \tag{29,05}$$

benutzen, wobei $\mathfrak{v}_a$ und $\mathfrak{v}_a^*$ die Geschwindigkeiten des Teilchens a vor und nach der Wechselwirkung sind. Nach dem soeben Gesagten bleiben also die linken Seiten dieser Gleichungen während der Wechselwirkung nicht konstant. Aber die Energie und der Impuls des Systems haben nach Beendigung der Wechselwirkung den gleichen Wert wie vor deren Beginn.

Die Bemerkungen dieses Paragraphen gelten ebenso für die übliche Formulierung des Drehimpulssatzes, in der keine Wechselwirkungsterme berücksichtigt werden.

§ 30 Der Vektor des Energiestroms (UMOW-Vektor)

Wir betrachten die gewöhnlichen nichtrelativistischen Bewegungsgleichungen der Kontinuumsmechanik. Sie haben die Form

$$\varrho \frac{dv_i}{dt} = \varrho F_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{30,01}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\varrho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{30,02}$$

Hierbei sind v_1, v_2, v_3 die Komponenten der Geschwindigkeit eines Teilchens des Mediums (Massenelement), ϱ die Dichte des Mediums, p_{ik} der Spannungstensor[1]) und F_i die Komponenten der äußeren Kräfte pro Masseneinheit. Auf der linken Seite von (30,01) tritt als Beschleunigung die sog. substantielle Ableitung

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{30,03}$$

auf. Die Gleichung (30,02) bezeichnet man gewöhnlich als Kontinuitätsgleichung. Sie drückt bekanntlich die Erhaltung der Masse aus.

Das Gleichungssystem (30,01) und (30,02) allein ist noch nicht vollständig: Es ist unmöglich, daraus nach Vorgabe von Anfangs- und Randbedingungen die Bewegung eines Mediums zu bestimmen. Um ein vollständiges Gleichungssystem zu erhalten, muß man erstens den Spannungstensor durch andere Größen

[1]) In diesem Paragraphen benutzen wir die Ausdrücke „Vektor" und „Tensor" im dreidimensionalen Sinn.

wie Deformation, Geschwindigkeit, Druck, Temperatur, elektromagnetische und andere Felder ausdrücken, und zweitens, falls die Anzahl der unbekannten Funktionen größer als vier ist [d. h. größer als die Anzahl der Gleichungen (30,01), 30,02)], zu den Bewegungsgleichungen eine Reihe weiterer Gleichungen wie Zustandsgleichung, Gleichung für den Wärmestrom, Feldgleichungen o. ä. hinzufügen.

Im folgenden wollen wir uns auf ein konservatives System ohne äußere Kräfte beschränken. Zunächst betrachten wir ein elastisches, kompressibeles Medium. Wir können dann die potentielle Energie Π der Masseneinheit des Mediums einführen und den Spannungstensor durch sie ausdrücken. a_1, a_2, a_3 seien LAGRANGEsche Variable; man kann dafür etwa die Anfangskoordinaten der Teilchen des Mediums wählen. Die Koordinaten eines Teilchens im Zeitpunkt t sind dann

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{30,04}$$

Die Deformation des Mediums wird durch die Gesamtheit der Größen

$$A_{mn} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_i}{\partial a_n} \tag{30,05}$$

gekennzeichnet. Die potentielle Energie Π ist eine Funktion der Deformation; setzt man

$$d\Pi = \frac{1}{2\varrho} \sum_{m,n=1}^{3} P^{mn} dA_{mn} \qquad (P^{mn} = P^{nm}), \tag{30,06}$$

so drücken sich die Komponenten des Spannungstensor p_{ik} durch die Koeffizienten P^{mn} wie folgt aus:

$$p_{ik} = \sum_{m,n=1}^{3} P^{mn} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_k}{\partial a_n} \qquad (p_{ik} = p_{ki}). \tag{30,07}$$

Aus diesen Formeln erhält man leicht die Beziehung

$$\varrho \frac{d\Pi}{dt} = \varrho \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,k=1}^{3} p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{30,08}$$

Bei einer Flüssigkeit reduziert sich der Tensor p_{ik} auf einen Skalar. Es gilt nämlich

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}, \tag{30,09}$$

wobei p der Druck ist. Dann vereinfacht sich die Gleichung (30,08) mit (30,02) zu

$$\varrho \frac{d\Pi}{dt} = -p \operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} \tag{30,10}$$

und liefert den bekannten Ausdruck

$$\Pi = \int \frac{p\, d\varrho}{\varrho^2} = \int \frac{dp}{\varrho} - \frac{p}{\varrho} \tag{30,11}$$

für die potentielle Energie der Masseneinheit einer Flüssigkeit. Bei infinitesimalen Deformationen (gewöhnliche Elastizitätstheorie) läßt sich die Beziehung (30,08) unmittelbar (ohne LAGRANGEsche Variable zu benutzen) leicht verifizieren.

Interessant ist ein Vergleich der Beziehung (30,08) mit der thermodynamischen Identität

$$\varrho \frac{du}{dt} = \sum_{i,k=1}^{3} p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \varrho T \frac{d\sigma}{dt}, \tag{30,12}$$

in der u die innere Energie, σ die Entropie und T die Temperatur ist. Für isotherme Prozesse kann man setzen

$$\Pi = u - T\sigma = F, \tag{30,13}$$

wobei F die freie Energie ist; für adiabatische Prozesse gilt

$$\Pi = u. \tag{30,14}$$

Wir wenden uns nun den Bewegungsgleichungen zu. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung lassen sich die drei Gleichungen (30,01) in der Form

$$\frac{\partial(\varrho v_i)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho v_i v_k - p_{ik}) = 0 \tag{30,15}$$

schreiben. Analog zur Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\varrho v_k)}{\partial x_k} = 0, \tag{30,02}$$

die die Erhaltung der Masse ausdrückt, kann man die Gleichung (30,15) als Ausdruck für die Impulserhaltung ansehen. In der Kontinuitätsgleichung ist die skalare Größe ϱ die Massendichte und der Vektor mit den Komponenten ϱv_i $(i = 1, 2, 3)$ die Dichte des Massenstromes. Entsprechend ist in der Gleichung (30,15) der Vektor ϱv_i die Impulsdichte und der Tensor

$$S_{ik} = \varrho v_i v_k - p_{ik} \tag{30,16}$$

die Dichte des Impulsstromes. Der Vektor ϱv_i tritt dabei das eine Mal als Dichte des Massenstromes, das andere Mal als Impulsdichte auf. Ähnlich tritt die Größe S_{ik} sowohl als die i-Komponente des Stroms von ϱv_k, als auch als die k-Komponente des Stroms von ϱv_i auf (man beachte, daß $S_{ik} = S_{ki}$ ist).

Wir haben eben gesehen, daß die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichungen in der Form (30,02) und (30,15) als Erhaltungssätze für die Masse und den Impuls gedeutet werden können. Es ist möglich, auch den Energiesatz in einer ähnlichen Form zu schreiben. Zum ersten Mal hat das UMOW getan, der schon im Jahre 1874 den wichtigen Begriff des Energiestromes eingeführt hat [5], [7].

Wir betrachten die skalare Größe

$$S = \frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho \Pi \tag{30,17}$$

und den Vektor mit den Komponenten

$$S_i = v_i\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho \Pi\right) - \sum_{k=1}^{3} p_{ik} v_k. \tag{30,18}$$

Dabei bedeutet Π wie bisher die potentielle Energie der Masseneinheit. In dem Ausdruck für S ist offenbar der erste Term die Dichte der kinetischen Energie und der zweite Term die Dichte der potentiellen Energie. Die Größe S ist also die räumliche Dichte der Energie. Der Vektor S_i, den wir als UMOWschen Vektor bezeichnen[1]), läßt sich als Energiestrom deuten. Unter Benutzung der Bewegungsgleichungen, der Kontinuitätsgleichung und der Beziehung (30,08) kann man nämlich leicht die Relation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial S_i}{\partial x_i} = 0 \tag{30,19}$$

beweisen, die sich als Energieerhaltungssatz auffassen läßt.

Sind die Bewegungsgleichungen (30,15) gegeben, so ist nur eine der beiden Gleichungen (30,02) (Kontinuitätsgleichung) und (30,19) (Gleichung für Energiestrom) unabhängig; die andere folgt aus dieser und aus den Bewegungsgleichungen. Statt der Kontinuitätsgleichung oder der Gleichung für den Energiestrom könnte man übrigens auch eine Linearkombination aus beiden verwenden, also die Größe $\varrho + \lambda S$ und ihren Strom $\varrho v_i + \lambda S_i$ betrachten, wobei λ eine Konstante von der Dimension eines reziproken Geschwindigkeitsquadrates ist. In den nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß der relativistischen Form der Bewegungsgleichungen eines Kontinuums angenähert eine Linearkombination der erwähnten Art mit der Konstanten $\lambda = 1/c^2$ entspricht.

Abschließend möchten wir noch folgendes bemerken. Zur Bestimmung des einer Größe S entsprechenden Stromvektors $\mathfrak{S}$ steht zunächst nur der Erhaltungssatz zur Verfügung, welcher die Divergenz des Stromvektors liefert. Ohne zusätzliche Bedingungen ist dadurch der Strom selbst, aber nicht eindeutig festgelegt. Genügt nämlich ein Vektor $\mathfrak{S}$ (mit den Komponenten S_i) einer Gleichung von der Form (30,19), so genügt ihr auch jeder Vektor $\mathfrak{S} + \operatorname{rot} \mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor ist. Trotzdem ist der Strom *durch eine geschlossene Fläche* völlig eindeutig bestimmt, denn für eine solche gilt

$$\int (\operatorname{rot} \mathfrak{A})_n \, d\sigma = 0 \tag{30,20}$$

für jeden Vektor $\mathfrak{A}$. Nun ist aber andererseits der Stromvektor seiner physikalischen Bedeutung nach eine völlig bestimmte Größe. Es ist daher zu erwarten, daß man mit Hilfe von Zusatzbedingungen diese Eindeutigkeit auch formal erreichen kann. Eine dieser Bedingungen ist die Forderung, daß der Stromvektor einer Größe S, die eine Zustandsfunktion des Systems darstellt, selbst eine

[1]) Die von UMOW betrachteten Ausdrücke für S und S_i unterscheiden sich von den hier angegebenen dadurch, daß in den ersteren der Term mit der potentiellen Energie fehlt. Auf der rechten Seite der entsprechenden UMOWschen Beziehung steht dementsprechend nicht Null, sondern der Ausdruck (30,08) mit negativem Vorzeichen, d. h. die Arbeit, welche die elastischen Kräfte an der Volumeneinheit in der Zeiteinheit leisten.

Zustandsfunktion ist. Diese Forderung wird im nächsten Paragraphen genauer formuliert und eingehend diskutiert. Ihr genügen in den hier betrachteten Beispielen der Energiestrom (UMOW-Vektor), der Massenstrom und der Strom des Impulses.

§ 31 Der Massentensor

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß im Fall eines konservativen Systems die gewöhnlichen, nichtrelativistischen Bewegungsgleichungen für ein Kontinuum so geschrieben werden können, daß sie dem Verschwinden von vier Ausdrücken gleichbedeutend sind, welche Summen von Ableitungen nach den Koordinaten und der Zeit darstellen. Diese Form der Bewegungsgleichungen läßt vermuten, daß ihre relativistische Verallgemeinerung die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T^{00}}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial T^{i0}}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{31,01}$$

hat, wobei T^{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ ein Tensor ist.

Die erste dieser Gleichungen muß den Erhaltungssatz für Masse und Energie, die übrigen drei (für $i = 1, 2, 3$) den Impulserhaltungssatz ausdrücken. Ist T^{00} die Dichte der Gesamtmasse (einschließlich der Ruhmasse und der Masse der kinetischen Energie), so ist $c\,T^{0i}$ die Dichte des Massenstromes. Ist ferner $c\,T^{i0}$ die Dichte der i-Komponente des Impulses, so ist $c^2 T^{ik}$ $(k = 1, 2, 3)$ die Stromdichte dieser Komponente. Die Masse M, die in einem bestimmten Volumen enthalten ist, und die ihr entsprechende Energie W lassen sich als Volumenintegral über die Dichte T^{00} ausdrücken:

$$M = \frac{W}{c^2} = \int T^{00}\, dV. \tag{31,02}$$

Analog beträgt der in diesem Volumen enthaltene Impuls

$$P^i = c \int T^{i0}\, dV. \tag{31,03}$$

Die Gleichungen (31,01) drücken die Tatsache aus, daß eine Zunahme der Energie oder des Impulses innerhalb eines bestimmten Volumens nur durch einen Zustrom dieser Größen von außen (d. h. durch die Fläche, die dieses Volumen begrenzt) erfolgen kann. Erstreckt man die Integration in (31,02) und (31,03) über das ganze Volumen, so stellen die betreffenden Integrale die Gesamtmasse und den Gesamtimpuls des Systems dar. Diese Größen bleiben konstant (d. h. sie hängen nicht von der Zeit t ab).

Außer den Erhaltungssätzen für Masse, Energie und Impuls muß noch ein Erhaltungssatz für den Drehimpuls und ein Gesetz für die Schwerpunktsbewegung des Systems gelten. Diese Gesetze kann man in einer zu (31,01)

analogen Form schreiben. Aus den Gleichungen (31,01) folgen nämlich die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x_0}(x_i T^{k0} - x_k T^{i0}) + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}(x_i T^{km} - x_k T^{im}) = T^{ki} - T^{ik} \\ (i, k = 0, 1, 2, 3)\end{array}\right\}. \quad (31,04)$$

Diese Gleichungen haben die Form von Erhaltungssätzen, wenn ihre rechten Seiten verschwinden. Das liefert die Bedingung

$$T^{ik} = T^{ki}, \quad (31,05)$$

d. h. der Tensor T^{ik} muß symmetrisch sein. Diese Bedingung besagt speziell, daß der Massenstrom gleich dem Impuls sein muß, und zwar nicht nur für die Gleichungen der Mechanik, sondern ganz allgemein. Die Beziehungen (31,04) für den symmetrischen Tensor schreiben wir für $k = 1, 2, 3$ und für $k = 0$ getrennt auf. Das ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(x_i T^{k0} - x_k T^{i0}) + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}(x_i T^{km} - x_k T^{im}) = 0, \quad (31,06)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(x_i T^{00} - x_0 T^{i0}) + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}(x_i T^{0m} - x_0 T^{im}) = 0, \quad (31,07)$$

wobei $i, k = 1, 2, 3$ ist. Man kann die Formeln (31,06) als Erhaltungssatz für den Drehimpuls und die Formeln (31,07) als Gesetz für die Bewegung des Schwerpunktes des Systems auffassen (beide in differentieller Form). Integriert man diese Ausdrücke über irgendein Volumen, so erhält man die entsprechenden Integralbeziehungen. Wenn man die Integrale

$$M^{ik} = c \int (x_i T^{k0} - x_k T^{i0})\, dV, \quad (31,08)$$

$$K^i = \frac{1}{c} M^{i0} = \int (x_i T^{00} - x_0 T^{i0})\, dV \quad (31,09)$$

über den ganzen Raum erstreckt, so müssen sie konstant bleiben. Dabei sind M^{23}, M^{31}, M^{12} die Drehimpulskomponenten des Systems, die durch c dividierten Größen M^{10}, M^{20}, M^{30} können als Produkte der Masse des Systems mit den Anfangskoordinaten seines Schwerpunktes gedeutet werden.

Den Tensor T^{ik} wollen wir als Massentensor[1]) bezeichnen. Seine Invariante hat die Dimension einer Massendichte. Den mit c^2 multiplizierten Tensor T^{ik} nennt man auch den Energietensor. Die Invariante dieses Tensors hat die Dimension einer Energiedichte.

Wir stellen an den Massentensor noch eine weitere Bedingung, die man durch folgendes physikalisches Prinzip formulieren kann: *Der Massentensor soll eine Zustandsfunktion des Systems sein.* Wir wollen präzisieren, was wir unter einem

[1]) Wir ziehen diesen Namen der häufig benutzten Bezeichnung „Materietensor" vor. Der Begriff „Materie" hat einen sehr allgemeinen Charakter und darf nicht mit dem Begriff „Masse" identifiziert werden.

Zustand verstehen. Wir nehmen an, daß die Bewegungsgleichungen und die Feldgleichungen als ein System von n Gleichungen erster Ordnung für die unbekannten Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vorliegen, die nach den zeitlichen Ableitungen aufgelöst werden können. Die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sind also durch ihre Anfangswerte (in Verbindung mit den Rand- und anderen Bedingungen) für jeden folgenden Zeitpunkt festgelegt (Kausalitätsprinzip). Dann wollen wir sagen, daß die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ den Zustand des Systems kennzeichnen. Jede Funktion der $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, die deren zeitliche Ableitungen nicht enthält und auch nicht die Koordinaten in expliziter Form, bezeichnen wir als Zustandsfunktion. (In der Relativitätstheorie treten die Ableitungen nach den Koordinaten und der Zeit symmetrisch auf; enthält also irgendein Skalar, Vektor oder Tensor keine zeitlichen Ableitungen, so treten darin auch keine Ableitungen nach den Koordinaten auf.)

Wir geben einige Beispiele: In der Punktmechanik wird der Zustand durch die Koordinaten und die Geschwindigkeiten der Teilchen gekennzeichnet. Jede Funktion der Koordinaten und der Geschwindigkeiten ist eine Zustandsfunktion. In der Hydrodynamik wird der Zustand durch die drei Geschwindigkeitskomponenten, die Dichte und den Druck charakterisiert (die letzten beiden Größen seien durch eine Gleichung verknüpft). In der Theorie des elektromagnetischen Feldes wird der Zustand durch den antisymmetrischen Feldtensor gekennzeichnet.

Unser physikalisches Prinzip[1]) verlangt also, daß die Komponenten des Massentensors nur von Funktionen abhängen, die den Zustand des Systems kennzeichnen. Sie dürfen keine Ableitungen dieser Funktionen und auch keine Koordinaten in expliziter Form enthalten (natürlich meinen wir dabei rechtwinkelige Komponenten).

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob der Massentensor durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Zunächst betrachten wir die Gleichungen, die das Verschwinden der Divergenz des Massentensors ausdrücken,

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{31,10}$$

und die Symmetriebedingung $T^{ik} = T^{ki}$. Außerdem fordern wir, daß die Werte der 10 Bewegungsintegrale (die Größen W, P^i und M^{ik}) vorgegeben sein sollen.

Nun sei $A^{im,nk}$ ein Tensor vierter Stufe, der die folgenden Symmetriebedingungen erfüllt:

Antisymmetrie in den ersten beiden Indizes

$$A^{im,nk} = -A^{mi,nk}, \tag{31,11}$$

Antisymmetrie in den letzten beiden Indizes

$$A^{im,nk} = -A^{im,kn} \tag{31,12}$$

[1]) Anscheinend ist dieses Prinzip noch nie explizite formuliert worden. Sämtliche bisher benutzten Formen des Massentensors tragen ihm aber Rechnung.

und zyklische Symmetrie

$$A^{im,nk} + A^{in,km} + A^{ik,mn} = 0. \qquad (31{,}13)$$

Aus diesen Eigenschaften ergibt sich

$$A^{im,nk} = A^{nk,im}. \qquad (31{,}14)$$

Aus den zweiten Ableitungen des Tensors $A^{im,nk}$ konstruieren wir den Tensor

$$B^{ik} = \sum_{m,n=0}^{3} \frac{\partial^2 A^{im,nk}}{\partial x_m \partial x_n}, \qquad (31{,}15)$$

den wir KRUTKOW-Tensor nennen.[1] Man sieht leicht ein, daß dieser Tensor symmetrisch ist. Ferner gilt wegen der Antisymmetrie von $A^{im,nk}$ in den Indizes n, k die Identität

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial B^{ik}}{\partial x_k} = 0. \qquad (31{,}16)$$

Außerdem hat der KRUTKOW-Tensor folgende Eigenschaft: Ersetzt man in Integralen von derselben Form wie M, P^i, M^{ik} und K^i [Formeln (31,02), (31,03), (31,08) und (31,09)] den Tensor T^{ik} durch den KRUTKOW-Tensor B^{ik}, so lassen sich diese Volumenintegrale in Oberflächenintegrale umwandeln. Unter der Bedingung, daß der Tensor $A^{im,nk}$ und seine ersten Ableitungen auf der Oberfläche, die das gegebene Volumen begrenzt, verschwinden (oder, wenn der ganze Raum betrachtet wird, im Unendlichen hinreichend schnell abnehmen), liefern diese mit B^{ik} gebildeten Integrale den Wert Null.

T^{ik} sei ein gegebener Massentensor. Wir addieren dazu den KRUTKOW-Tensor B^{ik} und erhalten so den neuen Tensor

$$\overset{*}{T}{}^{ik} = T^{ik} + B^{ik} \qquad (31{,}17)$$

mit folgenden Eigenschaften: Er ist symmetrisch; weiter genügt er wegen (31,10) und (31,16) der Gleichung

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \overset{*}{T}{}^{ik}}{\partial x_k} = 0, \qquad (31{,}18)$$

und schließlich haben die mit $\overset{*}{T}{}^{ik}$ gebildeten Integrale $\overset{*}{M}$, $\overset{*}{P}{}^{i}$, $\overset{*}{M}{}^{ik}$ und $\overset{*}{K}{}^{i}$ den gleichen Wert wie die entsprechenden Integrale, die man mit dem gegebenen

[1]) Im dreidimensionalen Fall reduziert sich der Tensor vierter Stufe $A^{im,nk}$ auf einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe mit den Komponenten

$$\gamma_{11} = A^{23,23}, \quad \gamma_{22} = A^{31,31}, \quad \gamma_{33} = A^{12,12}$$
$$\gamma_{23} = A^{31,12}, \quad \gamma_{31} = A^{12,23}, \quad \gamma_{12} = A^{23,31}.$$

Der Tensor γ_{pq} wurde von KRUTKOW in seinem Buch [12] eingeführt und weitgehend benutzt.

Tensor T^{ik} erhält. Sieht man also von der Forderung, daß der Massentensor eine Zustandsfunktion sein soll, ab, so genügt der Tensor $\overset{*}{T}{}^{ik}$, der mit T^{ik} durch die Formel (31,17) zusammenhängt, allen übrigen Bedingungen. Mit anderen Worten: Bei Vernachlässigung dieser Forderung ist der Massentensor sicher nicht eindeutig bestimmt.

Durch unsere Forderung, wonach der Massentensor eine Zustandsfunktion sein soll, wird jedoch die Sachlage radikal geändert, denn diese Forderung legt den Massentensor eindeutig fest. Zunächst argumentieren wir so: Selbst wenn der Tensor vierter Stufe $A^{im,\,nk}$ eine Zustandsfunktion ist, besitzen seine zweiten Ableitungen diese Eigenschaft nicht, und ihre Addition zu T^{ik} ist daher unzulässig. Diese Überlegung bildet zwar keinen Beweis, spricht aber für die Richtigkeit unserer Behauptung. Einen Beweis für die Eindeutigkeit des unserer Forderung genügenden Massentensors erhält man mit Hilfe eines Systems von partiellen Differentialgleichungen für die Größen T^{ik} als Funktionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Dieses System zerfällt in zwei Teile. Die Gleichungen des ersten Teilsystems bringen die Tatsache zum Ausdruck, daß T^{ik} ein Tensor ist, während das zweite Teilsystem das Verschwinden der Divergenz dieses Tensors ausdrückt.

Nach (23,06) erfahren die Komponenten eines Vektors bei einer infinitesimalen LORENTZ-Transformation den Zuwachs

$$\delta A^i = \sum_{k=0}^{3} e_k \omega^{ik} A^k. \tag{31,19}$$

Analog lautet die Formel für den Zuwachs der Komponenten eines Tensors

$$\delta T^{ik} = \sum_{m=0}^{3} e_m \omega^{im} T^{mk} + \sum_{m=0}^{3} e_m \omega^{km} T^{im}. \tag{31,20}$$

Da die Zustandsfunktionen φ_s in bestimmter Weise mit Vektor- bzw. Tensorgrößen verknüpft sind (oder selber solche Größen darstellen), muß eine entsprechende Formel auch für sie gelten. Diese Formel schreiben wir in der Form

$$\delta \varphi_s = \frac{1}{2} \sum_{l,\,m=0}^{3} e_l e_m \omega^{lm} \psi_s^{lm}, \tag{31,21}$$

wobei die

$$\psi_s^{lm} = -\psi_s^{ml} \tag{31,22}$$

bekannte Funktionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sind.

Nach unserer Voraussetzung hängt T^{ik} nur von den φ_s ab. Wir haben also

$$\delta T^{ik} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^{ik}}{\partial \varphi_s} \delta \varphi_s \tag{31,23}$$

und wegen (31,21)

$$\delta T^{ik} = \frac{1}{2} \sum_{l,\,m=0}^{3} e_l e_m \omega^{lm} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^{ik}}{\partial \varphi_s} \psi_s^{lm}. \tag{31,24}$$

Die Ausdrücke (31,20) und (31,24) müssen nun einander in den ω^{lm} identisch gleich sein. Durch Gleichsetzen des antisymmetrischen Teiles der Koeffizienten von ω^{lm} bekommt man daraus

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^{ik}}{\partial \varphi_s} \psi_s^{lm} = e_i \delta_{il} T^{mk} - e_i \delta_{im} T^{lk} + e_k \delta_{lk} T^{im} - e_k \delta_{mk} T^{il}. \quad (31,25)$$

Diese Gleichungen bilden den ersten Teil des gesuchten Systems von partiellen Differentialgleichungen. Man beachte, daß sie durch den Tensor

$$T^{ik} = \lambda e_i \delta_{ik} \quad (31,26)$$

mit konstantem λ befriedigt werden.

Das zweite Teilsystem ergibt sich aus dem Verschwinden der Divergenz des Massentensors. Man bekommt

$$\sum_{k=0}^{3} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^{ik}}{\partial \varphi_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} = 0. \quad (31,27)$$

Diese Gleichungen müssen durch jedes Wertesystem von φ_s und $\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}$ erfüllt werden, das mit den Bewegungsgleichungen und (falls die betreffenden Größen nicht unabhängig sind) mit sonstigen algebraischen Relationen verträglich ist. Nachdem man also φ_s und $\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}$ durch unabhängige Größen ausgedrückt hat, müssen letztere die Gleichungen (31,27) identisch erfüllen. Da die Tensorkomponenten T^{ik} keine Ableitungen der φ_s enthalten, folgen aus den genannten Identitäten Beziehungen für $\frac{\partial T^{ik}}{\partial \varphi_s}$, welche wohl die φ_s, nicht aber deren Ableitungen $\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}$ enthalten.

Diese Beziehungen bilden zusammen mit den Beziehungen (31,25) ein System von partiellen Differentialgleichungen für die Größen T^{ik} als Funktionen der φ_s. Das Gleichungssystem besitzt im allgemeinen eine Lösung, welche bis auf einen konstanten Faktor und bis auf einen additiven Tensor von der Form (31,26) eindeutig bestimmt ist. Der Faktor und die Konstante λ im additiven Glied lassen sich aus zusätzlichen Forderungen bestimmen (nämlich aus der Forderung, daß T^{00} die Massendichte darstellen soll, und aus den Bedingungen im Unendlichen).

Wendet man diese Beweisführung auf die Gleichungen der Hydrodynamik und auf die des elektromagnetischen Feldes an, so läßt sich die Eindeutigkeit des Massentensors in allen denjenigen Fällen beweisen, die in den beiden folgenden Paragraphen betrachtet werden.[1] Darauf wollen wir hier jedoch nicht eingehen.

Wir dürfen also annehmen, daß der Massentensor durch die Gesamtheit der physikalischen Bedingungen eindeutig festgelegt wird. Diese Schlußfolgerung ist für die Gravitationstheorie besonders wichtig, da die Gleichungen dieser Theorie den Massentensor selbst und nicht nur seine Divergenz enthalten.

---

[1]) Vgl. hierzu die Arbeiten von SCHECHTER [13].

Zum Schluß eine Bemerkung über nichtkonservative Systeme: Da der Energieerhaltungssatz ganz allgemein gilt, sind unter nichtkonservativen Systemen solche zu verstehen, bei denen einige Formen der Energie (etwa die thermische) nicht explizit berücksichtigt werden. Ist eine Energieform vorhanden, die in die allgemeine Energiebilanz eingeht, aber im Tensor T^{ik} nicht enthalten ist, so verschwindet die Divergenz dieses Tensors nicht. In den Gleichungen (31,01) steht dann auf der rechten Seite die Zunahme dieser Energieform und des entsprechenden Impulses in der Volumeneinheit. Im folgenden werden wir es aber nur mit konservativen Systemen zu tun haben.

§ 32 Beispiele für den Massentensor

Wir wollen nun die explizite Form des Massentensors für einige konkrete Fälle untersuchen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, der „inkohärenten" Materie: Die Teilchen haben keine Wechselwirkung miteinander, jedoch sind ihre Geschwindigkeiten kontinuierlich verteilt, so daß ein Geschwindigkeitsfeld existiert. Für den Massentensor führen wir in diesem Fall die besondere Bezeichnung Θ^{ik} ein. Mit ϱ^* bezeichnen wir die invariante Massendichte, d. h. die Dichte in dem Bezugssystem, in welchem die Teilchen des betreffenden Volumelementes zum betrachteten Zeitpunkt ruhen (das „begleitende" Bezugssystem). u^i sei die Vierergeschwindigkeit der Teilchen. Wir setzen

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2}\,\varrho^* u^i u^k. \tag{32,01}$$

Danach ist Θ^{ik} ein vierdimensionaler, kontravarianter Tensor. Die Komponente Θ^{00} lautet

$$\Theta^{00} = \frac{1}{c^2}\,\varrho^*\,(u^0)^2 = \frac{\varrho^*}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}. \tag{32,02}$$

Diese Komponente muß gleich der Dichte der Gesamtmasse einschließlich der Masse der kinetischen Energie sein. Wir wollen zeigen, daß dies wirklich der Fall ist. Wenn ϱ^* die Dichte der Ruhmasse in dem begleitenden Bezugssystem ist, so lautet die Dichte der Ruhmasse im Laboratoriumssystem (relativ zu welchem sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt)

$$\varrho = \frac{\varrho^*}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{32,03}$$

Ist ferner ϱ die Dichte der Ruhmasse, so beträgt die Dichte der Gesamtmasse (einschließlich der Masse der kinetischen Energie)

$$\frac{\varrho}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{\varrho^*}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \Theta^{00}. \tag{32,04}$$

Diese Formel für die Dichte entspricht dem üblichen Ausdruck

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{32,05}$$

für die Masse eines einzelnen Teilchens. Die übrigen Komponenten des Massentensors lauten in dreidimensionaler Schreibweise

$$\Theta^{0i} = \frac{1}{c} \frac{\varrho^* v_i}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c} \frac{\varrho v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{32,06}$$

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2} \frac{\varrho^* v_i v_k}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c^2} \frac{\varrho v_i v_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32,07}$$

Wir bilden nun die Divergenz des Tensors Θ^{ik}. Es ist

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2} u^i \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\varrho^* u^k)}{\partial x_k} + \frac{\varrho^*}{c^2} \sum_{k=0}^{3} u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k}. \tag{32,08}$$

Für die hierbei auftretenden Summen führen wir besondere Bezeichnungen ein, indem wir

$$Q^* = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial (\varrho^* u^k)}{\partial x_k}, \tag{32,09}$$

$$w^i = \sum_{k=0}^{3} u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \tag{32,10}$$

setzen. Dafür kann man auch schreiben

$$Q^* = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \mathfrak{v}), \tag{32,11}$$

$$w^i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d u^i}{d t}, \tag{32,12}$$

wobei $\frac{d}{dt}$ die substantielle Ableitung ist. Daraus ersieht man, daß die Invariante Q^* die Zunahme der Ruhmasse in der Einheit des flüssigen Volumens pro Zeiteinheit ist.[1]) Der Vektor w^i ist die Viererbeschleunigung, deren räumliche Komponenten in nichtrelativistischer Näherung mit der gewöhnlichen Beschleunigung übereinstimmen. Wir haben also

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k} = \frac{Q^*}{c^2} u^i + \frac{\varrho^*}{c^2} w^i. \tag{32,13}$$

[1]) Unter einem flüssigen Volumen verstehen wir wie üblich das Volumen, welches ein aus ein und denselben Teilchen gebildetes Flüssigkeitselement einnimmt.

Infolge der Bewegungsgleichungen muß dieser Ausdruck verschwinden. Es gilt nun aber identisch

$$\sum_{i=0}^{3} u_i u^i = c^2; \quad \sum_{i=0}^{3} u_i w^i = 0. \tag{32,14}$$

Deshalb ist die Gleichung

$$Q^* u^i + \varrho^* w^i = 0 \tag{32,15}$$

mit den Gleichungen

$$Q^* = 0; \quad w^i = 0 \tag{32,16}$$

äquivalent. Die erste dieser Gleichungen ist die Kontinuitätsgleichung und drückt die Konstanz der Ruhmasse der Teilchen aus. In dem hier betrachteten Fall bleibt die Ruhmasse deshalb unverändert, weil die Teilchen nicht miteinander wechselwirken und weil ihre innere Energie konstant bleibt. Die zweite Gleichung (32,16) drückt die Konstanz der Vierergeschwindigkeit (und damit auch die der gewöhnlichen dreidimensionalen Geschwindigkeit) aus. Daß wechselwirkungsfreie Teilchen sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen müssen, ist auch physikalisch selbstverständlich. Da die Bewegungsgleichungen nur erste Abteilungen der in Θ^{ik} auftretenden Größen ϱ^* und u^i enthalten, ist der Massentensor Θ^{ik} offenbar eine Zustandsfunktion. Die Form des Massentensors für inkohärente Materie darf somit als festgestellt gelten.

Wir befassen uns nun mit den Gleichungen der Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit und wollen dieselben auf den relativistischen Fall verallgemeinern. In der nichtrelativistischen Theorie ist eine ideale Flüssigkeit dadurch gekennzeichnet, daß sich der Spannungstensor auf einen Skalar reduziert. Diese Bedingung läßt sich leicht relativistisch verallgemeinern. Wir nehmen an, daß der mit c^2 multiplizierte Massentensor (also der Energietensor) die Form

$$c^2 T^{ik} = \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^i u^k - p e_k \delta_{ik} \tag{32,17}$$

hat. Dabei sind μ^* und p Viererskalare, die durch die Beziehung

$$\mu^* = f(p) \tag{32,18}$$

verknüpft sind. In dem begleitenden Bezugssystem (in welchem die Geschwindigkeit in dem betrachteten Raum-Zeit-Punkt verschwindet) hat die T^{00}-Komponente des Massentensors den Wert μ^*. Die Größe μ^* ist also die Dichte der Ruhmasse der Flüssigkeit. Da die Flüssigkeit als elastisch angenommen wird und deshalb eine potentielle Kompressionsenergie haben kann, enthält die Ruhmasse auch einen Anteil, der dieser Energie entspricht. Die Kompressionsenergie kann sich aber ändern, so daß die Ruhmasse eines Flüssigkeitsvolumens nicht konstant ist. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, haben wir für die Dichte der Gesamtruhmasse die besondere Bezeichnung μ^* eingeführt, und das Symbol ϱ^* für die Dichte desjenigen Anteils der Ruhmasse aufgespart, der sich im Laufe des Prozesses nicht ändert.

Wir stellen jetzt die Bewegungsgleichungen auf. Setzen wir zur Abkürzung

$$Q = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^k\right] \tag{32,19}$$

und verwenden die oben eingeführte Bezeichnung w^i für die Beschleunigung, so erhalten wir

$$c^2 \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = Q u^i + \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) w^i - e_i \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{32,20}$$

Wenn keine äußeren Kräfte vorhanden sind, muß dieser Ausdruck verschwinden. Daraus ergibt sich mit Hilfe der Identitäten (32,14) ein neuer Ausdruck für Q

$$Q = \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{3} u^k \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{d\tau}, \tag{32,21}$$

wobei $\frac{dp}{dt}$ die substantielle Ableitung und $d\tau$ das Differential der Eigenzeit des Teilchens ist. Die Bedeutung von p ergibt sich aus dem Vergleich der gewonnenen Bewegungsgleichungen mit den nichtrelativistischen; man erkennt leicht, daß p der Druck ist. Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für Q ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{3} \left\{\left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) \frac{\partial u^k}{\partial x_k} + u^k \frac{\partial \mu^*}{\partial x_k}\right\} = 0. \tag{32,22}$$

Da wir annehmen, daß μ^* eine Funktion von p ist, können wir durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\varrho^*}{\varrho^*} = \frac{d\mu^*}{\mu^* + \frac{p}{c^2}} \tag{32,23}$$

eine neue Größe ϱ^* einführen. Die Integrationskonstante wählen wir etwa so, daß für $p = 0$ gilt: $\varrho^* = \mu^*$. Dann können wir die Gleichung (32,22) in der Form

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho^* u^k) = 0 \tag{32,24}$$

schreiben. Daraus ersieht man, daß die Größe ϱ^* als invariante Dichte desjenigen Anteiles der Ruhmasse gedeutet werden kann, der sich während der Bewegung nicht ändert. Diese Größe ist ebenso wie μ^* eine Funktion von p.

Wir setzen nun

$$\mu^* = \varrho^* \left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right). \tag{32,25}$$

Dann ergibt sich aus der Differentialbeziehung zwischen μ^* und ϱ^*

$$d\Pi = \frac{p\,d\varrho^*}{\varrho^{*2}} \tag{32,26}$$

und

$$\Pi = \int_0^p \frac{dp}{\varrho^*} - \frac{p}{\varrho^*}. \tag{32,27}$$

Die Größe Π läßt sich analog zu (30,11) als potentielle Energie der Masseneinheit der Flüssigkeit deuten (unter der Masse verstehen wir hier den konstanten Anteil der Ruhmasse). Drücken wir μ^* durch ϱ^* und Π aus, so erhalten wir den Energietensor in der Form

$$c^2 T^{ik} = \left[\varrho^* + \frac{1}{c^2}(\varrho^*\Pi + p)\right] u^i u^k - p e_k \delta_{ik}, \tag{32,28}$$

während die Bewegungsgleichungen lauten

$$\left[\varrho^* + \frac{1}{c^2}(\varrho^*\Pi + p)\right] w^i = e_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\frac{dp}{d\tau} u^i. \tag{32,29}$$

Außerdem gilt die Kontinuitätsgleichung in der Form (32,24).

Die Invariante des Massentensors lautet

$$\sum_{i=0}^{3} e_i T^{ii} = \varrho^*\left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right) - \frac{3p}{c^2} = \mu^* - \frac{3p}{c^2}. \tag{32,30}$$

Vergleichen wir die Bewegungsgleichungen (32,29) mit der Formel (32,28) für T^{ik}, so sehen wir, daß der Massentensor T^{ik} eine Zustandsfunktion ist, wie es auch sein muß.

Wir schreiben nun die Komponenten des Massentensors in nichtrelativistischer Näherung hin, wobei wir jedoch in T^{00} und T^{0i} Terme von der Ordnung $1/c^2$ gegenüber dem Hauptterm beibehalten wollen. In den Haupttermen setzen wir, entsprechend (32,03),

$$\varrho^* = \varrho - \frac{1}{2}\varrho\frac{v^2}{c^2}. \tag{32,31}$$

Dabei ist ϱ die gewöhnliche Dichte, die der Kontinuitätsgleichung (30,02) genügt. Es ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \varrho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho\Pi\right), \\ T^{0i} &= \frac{1}{c}\varrho v_i + \frac{v_i}{c^3}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho\Pi + p\right), \\ T^{ik} &= \frac{1}{c^2}(\varrho v_i v_k + p\delta_{ik}). \end{aligned}\right\} \tag{32,32}$$

Durch Vergleich der Korrekturterme in T^{00} und T^{0i} mit dem Skalar (30,17) und dem UMOWschen Vektor (30,18) sehen wir, daß sich die Komponenten T^{00} und T^{0i} des Massentensors in der Form

$$T^{00} = \varrho + \frac{1}{c^2} S; \quad T^{0i} = \frac{1}{c} \varrho v_i + \frac{1}{c^3} S_i \tag{32,33}$$

schreiben lassen. Der Skalar und der Vektor von UMOW liefern also gerade die relativistischen Korrekturen zweiter Ordnung zu den gewöhnlichen Ausdrücken für die Massendichte und die Dichte des Impulses. Was die räumlichen Komponenten T^{ik} anbetrifft, so sind diese dem in § 30 behandelten dreidimensionalen Tensor der Dichte des Impulsstromes proportional.

Mit diesem Ergebnis können wir auch Näherungsausdrücke für den Massentensor eines elastischen Körpers angeben. Diese lauten

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \varrho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho\Pi\right), \\ T^{0i} &= \frac{1}{c}\varrho v_i + \frac{1}{c^3}\left\{v_i\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho\Pi\right) - \sum_{k=1}^{3} p_{ik} v_k\right\}, \\ T^{ik} &= \frac{1}{c^2}(\varrho v_i v_k - p_{ik}). \end{aligned}\right\} \tag{32,34}$$

Setzt man darin nach (32,09) $p_{ik} = -p\delta_{ik}$, so kommt man wieder zum Fall der idealen Flüssigkeit zurück.

Auf die relativistische Formulierung der Elastizitätstheorie wollen wir hier nicht näher eingehen. Wir machen nur noch eine Bemerkung über die Anwendbarkeit des Begriffes „starrer Körper" in der Relativitätstheorie. In der nichtrelativistischen Mechanik wird dieser Begriff als Abstraktion eingeführt, wonach die Form und die Abmessungen eines solchen Körpers sich unter dem Einfluß beliebiger Kräfte nicht ändern. Insbesondere soll ein Stoß, der auf das eine Ende eines starren Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt trifft, im gleichen Moment auch das andere Ende des Körpers in Bewegung setzen. In Wirklichkeit breitet sich jedoch die in einem physikalischen festen Körper entstehende Stoßwelle mit Schallgeschwindigkeit aus. Die benutzte Abstraktion impliziert also die Annahme, daß man die Schallgeschwindigkeit als unendlich groß betrachten kann.[1]) Sieht man aber die Schallgeschwindigkeit als unendlich groß an, so muß man um so mehr diese Annahme auch für die Lichtgeschwindigkeit machen, denn letztere ist einige hunderttausendmal größer als die Schallgeschwindigkeit. Es erhellt daraus, daß die Abstraktion, welche dem Begriffe des starren Körpers zugrunde liegt, nur in der nichtrelativistischen Theorie brauchbar ist. In der Relativitätstheorie, die auf der Tatsache der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit jeder Art von Wirkung basiert, führt diese Abstraktion aber notwendig zu Widersprüchen. In der Relativitätstheorie ist deshalb der Begriff des starren Körpers nicht anwendbar.

---

[1]) Zu demselben Schluß kommt man, wenn man den starren Körper als einen elastischen festen Körper mit unendlich großen Werten der Elastizitätsmoduln auffaßt.

Dadurch wird aber die Möglichkeit, in den Gedankengängen der Relativitätstheorie den Begriff des festen Maßstabes zu verwenden, nicht ausgeschlossen. Dieser Begriff setzt nämlich nur die Existenz fester Körper voraus, deren Abmessungen und Form unter bestimmten äußeren Bedingungen (Fehlen von Beschleunigungen und Stößen, konstanter Temperatur usw.) ungeändert bleiben. Solche festen Maßstäbe lassen sich mit hinreichender Genauigkeit durch die in der Natur vorkommenden festen Körper realisieren, die deshalb als Längen-Etalon dienen können. Dabei kann man ihre Konstanz zum Beispiel durch Vergleich mit der Wellenlänge einer bestimmten Spektrallinie (wie in § 2 angedeutet) kontrollieren.

§ 33 Der Energietensor des elektromagnetischen Feldes

Im vorigen Paragraphen haben wir den Massentensor und den dazu proportionalen Energietensor für ein Medium betrachtet, zwischen dessen Teilchen die Wechselwirkung durch elastische Kräfte vermittelt wird. Nun wollen wir den Energietensor für ein Medium untersuchen, dessen Teilchen nur durch das elektromagnetische Feld wechselwirken. Da es sich hier um eine makroskopische Theorie handelt, können wir uns diese Substanz als ein Kontinuum mit stetiger Ladungsverteilung vorstellen.

Wir gehen von den MAXWELLschen Gleichungen in der Form von LORENTZ aus. Die Tensorausdrücke für die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes waren

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= F_{10}; \quad E_2 = F_{20}; \quad E_3 = F_{30}, \\ H_1 &= F_{23}; \quad H_2 = F_{31}; \quad H_3 = F_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{33,01}$$

Nach § 24 lauten die MAXWELLschen Gleichungen in der vierdimensionalen Form

$$F_{ikl} \equiv \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0, \tag{33,02}$$

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i. \tag{33,03}$$

Dabei sind

$$F^{ik} = e_i e_k F_{ik} \tag{33,04}$$

die kontravarianten Komponenten des antisymmetrischen Feldtensors. Die Komponenten des Vierervektors s^i lauten, durch dreidimensionale Größen ausgedrückt,

$$s^0 = 4\pi\varrho; \quad s^i = \frac{4\pi}{c} j_i = \frac{4\pi}{c} \varrho v_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{33,05}$$

wobei ϱ die Ladungsdichte, v_i die dreidimensionale Geschwindigkeit und $j_i = \varrho v_i$ die Stromdichte bedeuten. Führen wir die invariante Ladungsdichte ϱ^* und die Vierergeschwindigkeit u^i ein, so können wir statt (33,05) schreiben

$$s^i = \frac{4\pi}{c}\varrho^* u^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{33,06}$$

In § 25 fanden wir als Bewegungsgleichungen für ein Teilchen mit der Ladung e und der Ruhmasse m

$$m w_i = -\frac{e}{c}\sum_{k=0}^{3} F_{ik} u^k. \tag{33,07}$$

Darin steht rechts die LORENTZ-Kraft, die auf die Ladung e wirkt. Um den Übergang von einem einzelnen Teilchen zu einer Substanz mit kontinuierlicher Ladungs- und Massenverteilung vollziehen zu können, müssen wir statt der Ladung e ihre invariante Dichte ϱ^* und statt der Ruhmasse m ihre invariante Dichte μ^* einführen. Wir erhalten so

$$\mu^* w_i = -\frac{\varrho^*}{c}\sum_{k=0}^{3} F_{ik} u^k \tag{33,08}$$

oder

$$\mu^* w_i = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k. \tag{33,09}$$

Da wir zwei neue Funktionen ϱ^* und μ^* eingeführt haben (die nicht notwendig zueinander proportional sind), müssen wir zu den Bewegungsgleichungen noch zwei Gleichungen für diese Funktionen hinzufügen. Die Gleichung für ϱ^* ist bereits in den MAXWELLschen Gleichungen enthalten und drückt die Erhaltung der Ladung aus:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial(\varrho^* u^k)}{\partial x_k} = 0. \tag{33,10}$$

Die Gleichung für μ^* dagegen muß noch gesondert formuliert werden. Dazu nehmen wir an, daß sich die Ruhmasse der Teilchen während der Bewegung nicht ändert (darin ist auch die Annahme enthalten, daß keine JOULEsche Wärme frei wird). Dann ist

$$Q^* \equiv \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial(\mu^* u^k)}{\partial x_k} = 0. \tag{33,11}$$

Von den Bewegungsgleichungen (33,09) sind nur drei voneinander unabhängig, denn es gilt identisch

$$\mu^* \sum_{i=0}^{3} u^i w_i = -\frac{\varrho^*}{c}\sum_{i,k=0}^{3} F_{ik} u^i u^k = 0. \tag{33,12}$$

Die Bewegungsgleichungen (33,09) stellen also zusammen mit der Gleichung für die Erhaltung der Ruhmasse (33,11) vier voneinander unabhängige Gleichungen

dar. Unsere Aufgabe besteht nun darin, diese Gleichungen in der Form einer verschwindenden Divergenz eines Tensors zu schreiben. Zu diesem Zweck benutzen wir zunächst die Formel (32,13), die in der Form

$$\mu^* w^i + Q^* u^i = c^2 \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k} \tag{33,13}$$

mit

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2} \mu^* u^i u^k \tag{33,14}$$

geschrieben werden kann. (Man beachte, daß die invariante Ruhmasse hier mit μ^* und nicht wie in (32,01) mit ϱ^* bezeichnet wird.) Andererseits können wir aus den Bewegungsgleichungen (33,09) und der Gleichung (33,11) die vier unabhängigen Kombinationen

$$\mu^* w_i + Q^* u_i = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k \tag{33,15}$$

bilden, die wegen (33,12) mit (33,09) und (33,11) äquivalent sind. Die linke Seite dieser Gleichungen (genauer: ihre kontravariante Form) haben wir schon als Divergenz eines Tensors dargestellt. Wir müssen also nur noch die rechte Seite in dieser Form schreiben.

Zu diesem Zweck betrachten wir den Tensor

$$U_{ik} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{3} e_m F_{im} F_{km} + \frac{1}{16\pi} e_i \delta_{ik} \sum_{m,\,n=0}^{3} F^{mn} F_{mn}. \tag{33,16}$$

Mit f_i bezeichnen wir die mit dem negativen Vorzeichen versehene Divergenz dieses Tensors, d. h. es soll gelten

$$f_i = -\sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_k}. \tag{33,17}$$

Die Berechnung der Summe der Ableitungen liefert nach einigen einfachen Umformungen

$$f_i = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k,\,l=0}^{3} F_{ik} \frac{\partial F^{kl}}{\partial x_l} - \frac{1}{8\pi} \sum_{k,\,l=0}^{3} F^{kl} F_{ikl}, \tag{33,18}$$

wobei F_{ikl} die Größe (33,02) ist. Daraus ergibt sich mit den MAXWELLschen Gleichungen (33,02) und (33,03)

$$f_i = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{3} F_{ik} s^k. \tag{33,19}$$

Das ist aber gerade die Dichte der LORENTZ-Kraft, die auf der rechten Seite von (33,15) steht. Damit haben wir beide Seiten der Gleichungen (33,15) als Diver-

genzen dargestellt. Gehen wir zu den kontravarianten Komponenten über, so können wir die Gleichungen

$$\mu^* w^i + Q^* u^i - f^i = 0 \tag{33,20}$$

in der Form

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{33,21}$$

schreiben. Dabei ist

$$c^2 T^{ik} = c^2 \Theta^{ik} + U^{ik} \tag{33,22}$$

der Energietensor des betrachteten Systems, das aus dem Medium und dem Feld besteht. Der erste Term ist der Energietensor des Mediums, der zweite der des Feldes. Der Tensor T^{ik} hängt von der invarianten Dichte μ^*, den Geschwindigkeitskomponenten u^i und den Feldkomponenten F_{ik} ab. Da diese Größen den Zustand des Systems kennzeichnen, ist der betrachtete Massentensor offensichtlich eine Zustandsfunktion.

Wir wollen nun den Energietensor des Feldes etwas näher untersuchen. In der dreidimensionalen Schreibweise lauten die Komponenten des Energietensors des elektromagnetischen Feldes

$$U^{00} = U_{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2), \tag{33,23}$$

$$U^{0i} = -U_{0i} = \frac{1}{4\pi}[\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}]_i, \tag{33,24}$$

$$U^{ik} = U_{ik} = -\frac{1}{4\pi}(E_i E_k + H_i H_k) + \frac{1}{8\pi}\delta_{ik}(E^2 + H^2). \tag{33,25}$$

Die Invariante des Energietensors des Feldes verschwindet:

$$\sum_{i=0}^{3} e_i U_{ii} = 0. \tag{33,26}$$

Die Komponente U^{00} ist wie immer die Energiedichte; die mit c multiplizierten Komponenten U^{0i} geben die Dichte des Energiestromes, d. h. den UMOWschen Vektor an. Den Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] \tag{33,27}$$

bezeichnet man als UMOW-POYNTINGschen Vektor oder einfach als POYNTINGschen Vektor, weil POYNTING als erster die den MAXWELLschen Gleichungen entsprechenden Ausdrücke für die Dichte des Energiestromes des elektromagnetischen Feldes explizite angegeben hat.

Der durch c^2 dividierte Strom einer bestimmten Energieform ist gerade der Massenstrom, der dieser Energieform entspricht, und der Massenstrom ist wiederum gleich dem Impuls. Der durch c^2 dividierte POYNTINGsche Vektor ist also

die Dichte des elektromagnetischen Impulses. Daß das elektromagnetische Feld einen Impuls mit sich führt, zeigt das Phänomen des Lichtdruckes, dessen Existenz im Jahre 1900 von LEBEDEW experimentell nachgewiesen wurde [15]. Wenn ein Körper sich im elektromagnetischen Felde befindet, so wirkt auf ein Flächenelement $d\sigma$ (mit der Normalen in x_i-Richtung) seiner Oberfläche nach den Formeln (33,25) eine Kraft mit den Komponenten

$$F_k d\sigma = + U_{ik} d\sigma \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{33,28}$$

Wir betrachten einen vollkommen spiegelnden Körper mit einem ebenen Oberflächenelement. Die Gleichung des betreffenden Stückes der Oberfläche sei $x_1 = 0$, und der Körper erfülle das Gebiet $x_1 > 0$. Auf diesen Körper soll nun eine ebene Welle der Form

$$\left.\begin{aligned} E_1^0 &= -\sin\vartheta f & H_1^0 &= \sin\vartheta g, \\ E_2^0 &= \cos\vartheta f & H_2^0 &= -\cos\vartheta g, \\ E_3^0 &= g & H_3^0 &= f \end{aligned}\right\} \tag{33,29}$$

einfallen, wobei

$$\left.\begin{aligned} f &= f\left(t - \frac{1}{c}(x_1\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta)\right), \\ g &= g\left(t - \frac{1}{c}(x_1\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta)\right) \end{aligned}\right\} \tag{33,30}$$

ist. Fügen wir zu dem Feld (33,29) die reflektierte Welle hinzu, die sich aus den vorstehenden Formeln ergibt, wenn man ϑ durch $\pi - \vartheta$ und g durch $-g$ ersetzt, so erhalten wir das Gesamtfeld, das den Randbedingungen genügt. Dessen Komponenten betragen an der Oberfläche des Körpers

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -2\sin\vartheta f & H_1 &= 0, \\ E_2 &= 0 & H_2 &= -2\cos\vartheta g, \\ E_3 &= 0 & H_3 &= 2f, \end{aligned}\right\} \tag{33,31}$$

wobei in den Funktionen f und g für x_1 der Wert $x_1 = 0$ einzusetzen ist. Damit erhalten wir aus (33,25) für die Kraft, die auf die Einheit der Oberfläche des reflektierenden Körpers wirkt, den Ausdruck

$$F_1 = U_{11} = \frac{1}{2\pi}(f^2 + g^2)\cos^2\vartheta; \quad F_2 = U_{12} = 0; \quad F_3 = U_{13} = 0. \tag{33,32}$$

Die Kraft wirkt also in Richtung der inneren Normalen (unabhängig von der Einfallsrichtung der Welle) und entspricht einem senkrechten Druck auf den Körper (vgl. [14]).

Wir wollen noch einen anderen Fall betrachten. Das elektromagnetische Feld sei eine Überlagerung von Wellen, wobei alle möglichen Richtungen gleich-

mäßig vertreten sind. Der statistische Mittelwert der Produkte der Komponenten ist dann

$$\overline{E_i E_k} = \frac{1}{3}\,\overline{E^2}\,\delta_{ik}; \quad \overline{H_i H_k} = \frac{1}{3}\,\overline{H^2}\,\delta_{ik}. \tag{33,33}$$

Damit erhalten wir für die räumlichen Komponenten des Energietensors

$$\overline{U}_{ik} = \frac{1}{24\pi}\left(\overline{E^2} + \overline{H^2}\right)\delta_{ik} = \frac{1}{3}\,\overline{U}_{00}\,\delta_{ik}. \tag{33,34}$$

Das elektromagnetische Feld erzeugt also in diesem Fall einen isotropen Druck, der gleich einem Drittel der elektromagnetischen Energiedichte ist. Dieses Ergebnis ist für die Theorie der Hohlraumstrahlung von großer Bedeutung.

§ 34 Masse und Energie

Nach der in der Mechanik üblichen Bezeichnungsweise ist die Masse eines Körpers ein Maß für seine Trägheit (träge Masse). Andererseits bezeichnet man mit dem Wort „Masse" auch ein Maß für die Eigenschaft eines Körpers, ein Schwerefeld zu erzeugen und in einem gegebenen Schwerefeld eine Kraft zu erfahren (schwere Masse). Die Trägheit und das Vermögen, ein Schwerefeld zu erzeugen, sind durchaus verschiedene Eigenschaften der Materie. Es ist aber nicht zufällig, daß das Maß dieser verschiedenen Eigenschaften durch dasselbe Wort bezeichnet wird. Die Möglichkeit mit einem Wort auszukommen, beruht darauf, daß beide Eigenschaften stets gemeinsam auftreten und einander proportional sind, so daß man bei geeigneter Wahl der Einheiten das Maß für beide durch dieselbe Zahl ausdrücken kann. Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ist eine Erfahrung, die mit sehr großer Genauigkeit bestätigt wurde (Versuche von EÖTVÖS). Die Definitionen dieser Begriffe (die sich auf die entsprechenden Eigenschaften der Materie stützen) sind aber verschieden. Es gibt auch eine physikalische Theorie, nämlich die EINSTEINsche Gravitationstheorie, in der das grundlegende Gesetz der Gleichheit von träger und schwerer Masse automatisch berücksichtigt wird, und zwar in dem Sinne, daß ein und dieselbe Konstante, die man bei der Lösung der Gleichungen einführt, sowohl als schwere als auch als träge Masse auftritt.

Wie ist die Frage, ob träge und schwere Masse identisch sind oder nicht, zu beantworten? Ihrer Erscheinungsform nach sind sie verschieden, ihre Zahlenwerte aber sind stets einander proportional. Einen solchen Sachverhalt kennzeichnet man gewöhnlich mit dem Wort „Äquivalenz".

Eine analoge Frage taucht auch bei den Begriffen Masse (sagen wir träge Masse) und Energie auf. Die Definition der Masse haben wir gerade erwähnt. Die Energie definiert man gewöhnlich als ein Maß für die Fähigkeit, Arbeit zu leisten. Für eine Definition der Energie ist erstens das Gesetz der Energieerhaltung und zweitens die Fähigkeit der einzelnen Energieformen, sich ineinander umzuwandeln, wesentlich. Beides zusammen nennt man das Gesetz der Erhaltung und Umwandlung der Energie. Die Existenz eines solchen allgemeinen Gesetzes ge-

stattet es, die Messung einer beliebigen Energieform auf die Messung einer bestimmten anderen Energieform, etwa der mechanischen Energie, zurückzuführen und alle möglichen Energieformen durch ein und dieselbe Einheit (etwa die mechanische) auszudrücken.

Ihrer Erscheinungsform nach sind also die Eigenschaften der Materie, die den Begriffen Masse und Energie entsprechen, zweifellos verschieden. Die Relativitätstheorie behauptet jedoch, daß Masse und Energie untrennbar miteinander verbunden und zueinander proportional sind. Jede Änderung der Energie eines Systems geht mit einer Änderung seiner trägen Masse einher. Das gilt nicht nur für die Änderung der kinetischen Energie eines Körpers bei konstanter Ruhmasse, sondern auch für Änderungen der verschiedenen Formen der inneren Energie, bei denen sich auch die Ruhmasse ändert.

In der Physik sind Erscheinungen bekannt, bei denen die gesamte Energie, die der Ruhmasse des Körpers entspricht, in Strahlungsenergie übergehen kann (diese hat natürlich dieselbe Masse). Umgekehrt kann Ruhmassen-Energie auf Kosten von Strahlungsenergie entstehen. Wir meinen z. B. die Umwandlung eines Elektron-Positron-Paares in ein γ-Quant und den inversen Prozeß der Erzeugung eines solchen Paares durch ein γ-Quant.

Die Beziehung zwischen Masse und Energie haben wir in den vorangegangenen Paragraphen ausführlich untersucht. Wir sahen, daß jeder Energie W eine Masse $M = W/c^2$ und jeder Masse M eine Energie $W = Mc^2$ zuzuordnen ist. Diese beiden Größen sind stets einander proportional, und wenn man sie in denselben (etwa energetischen) Einheiten ausdrückt, kann man sie durch ein und dieselbe Zahl messen. Wir haben weiter gesehen, daß der Energietensor sich vom Massentensor nur durch den Faktor c^2 unterscheidet und daß der Erhaltungssatz für die Energie gleichzeitig ein Erhaltungssatz für die Masse ist.

Auf die oben aufgeworfene Frage, ob Masse und Energie dasselbe sind oder nicht, können wir also die gleiche Antwort geben wie auf die Frage nach träger und schwerer Masse: Die Erscheinungsformen der Eigenschaften „Masse“ und „Energie“ der Materie sind verschieden, aber die Zahlenwerte, welche diese Eigenschaften charakterisieren, sind einander proportional. In diesem Fall kann man ebenfalls von einer Äquivalenz, nämlich der Äquivalenz zwischen Masse und Energie, reden. Besser jedoch bezeichnet man das betrachtete Grundgesetz einfach als das Gesetz der Proportionalität von Masse und Energie.

Wir sagten eben, der Erhaltungssatz für die Energie sei gleichzeitig ein Erhaltungssatz für die Masse. Hier erhebt sich nun die folgende Frage. Die Erfahrung lehrt, daß bei den meisten bekannten physikalischen Prozessen die Masse eines Körpers (durch Wägen bestimmt) und seine Energie (durch die geleistete Arbeit bestimmt) einzeln erhalten bleiben. Man beobachtet also *zwei* Erhaltungssätze. Wie ist damit zu vereinbaren, daß in der Relativitätstheorie nur *ein* Gesetz formuliert wird?

Diese Frage ist folgendermaßen zu beantworten: Es gibt nur einen strengen Erhaltungssatz, nämlich den für die Gesamtmasse M eines Systems und für die ihr entsprechende Gesamtenergie $W = Mc^2$. Der überwiegende Teil der Energie (und der entsprechenden Ruhmasse) nimmt aber an den Prozessen gewöhnlich nicht teil und bleibt für sich erhalten. Damit bleibt auch der restliche, aktive Anteil der Energie, der sich an den Umwandlungen beteiligt, erhalten.

Die Einteilung der Energie in einen „passiven" Anteil, der sich (bei den betreffenden Prozessen) an den Umwandlungen nicht beteiligt, und einen aktiven Anteil, der sich in andere Formen umwandeln kann, läßt sich am Beispiel der in § 32 erörterten hydrodynamischen Gleichungen veranschaulichen. Wir trennten dort (durch Übergang zum begleitenden Bezugssystem) die kinetische Energie ab und betrachteten zwei verschiedene Dichten der Ruhmasse: die Gesamtdichte μ^* und die Dichte des passiven Anteils ϱ^*. Diese beiden Größen hängen nach (32,25) durch die Beziehung

$$\mu^* = \varrho^* + \frac{1}{c^2}\varrho^* \Pi \tag{34,01}$$

zusammen, wobei das zweite Glied die durch c^2 dividierte Dichte der potentiellen Kompressionsenergie ist.

Noch deutlicher wird diese Einteilung in den Näherungsformeln (32,32) und (32,34) für die Dichte der Gesamtmasse T^{00} und ihren Strom $c\,T^{0i}$. Nach (32,33) lassen sich diese Formeln schreiben

$$T^{00} = \varrho + \frac{1}{c^2} S; \qquad c\,T^{0i} = \varrho v_i + \frac{1}{c^2} S_i. \tag{34,02}$$

Hierbei sind ϱ und ϱv_i die Dichte und der Strom desjenigen Anteils der Masse, der sich an den Umwandlungen nicht beteiligt, während der Skalar S und der Vektor S_i von UMOW die Dichte und den Strom des aktiven Energieanteils darstellen (dividiert durch c^2 beschreiben diese Größen die Dichte und den Strom des aktiven Teils der Masse).

Wir sprachen oben davon, daß die durch Wägen bestimmte Gesamtmasse eines Körpers (d. h. die Masse einschließlich ihres variablen Anteils) praktisch erhalten bleibt, obwohl der Körper Energie abgeben oder aufnehmen kann. Das beruht einfach auf der ungenügenden Genauigkeit der Wägung und darauf, daß sich der überwiegende Teil der Masse bei den meisten Körpern passiv verhält. Andererseits kann eine Änderung des aktiven Anteils der Masse mit weitaus höherer Genauigkeit verfolgt werden, indem man den entsprechenden Anteil der Energie mißt (d. h. mit Hilfe kalorimetrischer Methoden, nicht durch Wägung).

Es liegt nahe, nach dem tieferen Grunde dafür zu fragen, daß unter den üblichen Bedingungen der überwiegende Anteil der Energie so fest gebunden ist, daß er sich in einem völlig passiven Zustand befindet. Weshalb kann sich nicht wenigstens ein kleiner Teil dieser gebundenen Energie aus diesem Zustand befreien und die Bilanz des aktiven Anteils der Energie beeinflussen? Diese Frage kann die Relativitätstheorie allein nicht beantworten. Die Antwort ist vielmehr in den Gesetzen der Quantentheorie zu suchen, deren charakteristischer Zug gerade die Existenz stabiler Zustände mit diskreten Energietermen ist. Bei den Elementarteilchen kann die Energie, die der Ruhmasse entspricht, sich entweder vollständig oder gar nicht in die aktive Energieform (Strahlung) umwandeln. Der Verlust nur eines Teiles der Masse ist unmöglich. Das ist für Elektronen und Positronen experimentell nachgeprüft worden; aber auch für die übrigen Elementarteilchen ist das zu erwarten. Da der überwiegende Teil der Masse der Atome in Form von Ruhmasse der Elementarteilchen vorliegt, muß diese Aussage

auch für die Atome gelten. Außerdem ist zu beachten, daß die Energieterme diskret sind. Die Ursache für die außergewöhnliche Festigkeit, mit der der passive Teil der Energie gebunden ist, hat also Quanten-Charakter.

Wir möchten hier betonen, daß die Einteilung der Energie (und der entsprechenden Masse) in einen passiven und einen aktiven Anteil relativ ist. Bei den gewöhnlichen chemischen Reaktionen verhält sich nicht nur die Kernenergie, sondern auch die Energie der inneren Elektronenschalen passiv. Bei sehr hohen Temperaturen sind die Atome vollständig oder nahezu vollständig ionisiert und die Energie der inneren Elektronenschalen nimmt dann aktiven Charakter an. Bei Prozessen schließlich, die mit einer Umwandlung der Atomkerne verbunden sind, wird auch die Kernenergie aktiv. Auch dann aber bleibt die Energie, die der Ruhmasse der schweren Elementarteilchen innerhalb des Kernes entspricht, passiv.

Die Tatsache, daß der überwiegende Anteil der Energie (und der entsprechenden Masse) sehr fest gebunden ist, bildet den eigentlichen Grund dafür, daß man den Erhaltungssatz der Masse und den Energieerhaltungssatz als zwei verschiedene Gesetze ansehen kann, obwohl beide in der Relativitätstheorie zu einem Satz verschmolzen werden.

Der Erhaltungssatz der Masse bei chemischen Reaktionen wurde von LOMONOSSOW entdeckt und experimentell bewiesen und später von LAVOISIER bestätigt. Den Energieerhaltungssatz hat erst im 19. Jahrhundert R. MAYER exakt formuliert. Schon im 17. Jh. aber benutzte ihn HUYGENS und im 18. Jh. BERNOULLI in der Mechanik. Der allgemeine Charakter dieses Satzes war schon für LOMONOSSOW eine Gewißheit, wie aus seinem berühmten Brief an EULER vom Jahre 1748 hervorgeht.

KAPITEL III

ALLGEMEINE TENSORANALYSIS

§ 35 Die zulässigen Transformationen der Koordinaten und der Zeit

Unserer mathematischen Formulierung der Relativitätstheorie haben wir die Gleichung der Wellenfront

$$(\nabla\omega)^2 \equiv \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \qquad (35{,}01)$$

und den damit zusammenhängenden Ausdruck für das Quadrat des Intervalls

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (35{,}02)$$

zugrunde gelegt. (Dabei ist $(\nabla\omega)^2$ eine Abkürzung für den auf der linken Seite der Gleichung der Wellenfront stehenden Differentialoperator.) Wenn wir die üblichen Bezeichnungen

$$x_0 = ct; \quad x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z \qquad (35{,}03)$$

und die Zahlen

$$e_0 = 1; \quad e_1 = e_2 = e_3 = -1 \qquad (35{,}04)$$

einführen, so lauten die Ausdrücke für $(\nabla\omega)^2$ und ds^2

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2, \qquad (35{,}05)$$

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,(dx_k)^2. \qquad (35{,}06)$$

Wie wir wissen, sind beide Ausdrücke gegenüber einer LORENTZ-Transformation invariant. In den neuen Koordinaten

$$x_0' = ct'; \quad x_1' = x'; \quad x_2' = y'; \quad x_3' = z', \qquad (35{,}07)$$

die mit den alten durch eine LORENTZ-Transformation zusammenhängen sollen, gilt also

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k'}\right)^2, \qquad (35{,}08)$$

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k\,(dx_k')^2. \qquad (35{,}09)$$

Diejenigen Variablen (35,03) oder (35,07), in denen die Ausdrücke für $(\nabla\omega)^2$ und ds^2 die Form (35,05) und (35,06) oder (35,08) und (35,09) haben, werden wir GALILEIsche Koordinaten nennen (darin ist auch die Zeit einbegriffen).

Nun nehmen wir an, daß x_0', x_1', x_2', x_3' wie bisher die Bedeutung (35,07) haben (also GALILEIsche Koordinaten sind), während x_0, x_1, x_2, x_3 nicht mehr (35,03) gleich sind, sondern gewisse Hilfsgrößen bedeuten, durch welche die Variablen (35,07) ausgedrückt werden können:

$$x_\alpha' = f_\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{35,10}$$

Dabei sind die f_α beliebige Funktionen, die nur gewissen allgemeinen Bedingungen genügen sollen. Wir nehmen an, daß sich die Gleichungen (35,10) nach x_0, x_1, x_2, x_3 auflösen lassen, d. h. daß ihre JACOBIsche Determinante von Null verschieden ist:

$$D = \frac{\partial\,(x_0', x_1', x_2', x_3')}{\partial\,(x_0, x_1, x_2, x_3)} \neq 0. \tag{35,11}$$

Außerdem sollen die Funktionen f_α stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung haben. Weitere Bedingungen für die f_α, die sich aus physikalischen Erwägungen ergeben, betrachten wir später.

Durch eine Änderung der Variablen entsteht aus $(\nabla\omega)^2$ eine homogene, quadratische Funktion der ersten Ableitungen von ω nach den Variablen x_0, x_1, x_2, x_3, die wir folgendermaßen schreiben

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}. \tag{35,12}$$

Dabei ist

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_k'}\frac{\partial x_\beta}{\partial x_k'}. \tag{35,13}$$

Entsprechend erhalten wir für ds^2 den Ausdruck

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{35,14}$$

mit

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_k'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_k'}{\partial x_\beta}. \tag{35,15}$$

Auf Grund von (35,13) und (35,15) verifiziert man leicht die Relation

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \nu = \mu \\ 0 & \text{für} \quad \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{35,16}$$

Daraus folgt, daß, wenn g die Determinante

$$g = \operatorname{Det} g_{\alpha\beta} \tag{35,17}$$

ist, die Größen $g^{\alpha\beta}$ die durch g dividierten Unterdeterminanten dieser Determinante mit den entsprechenden Vorzeichen sind. Nach der Multiplikationsregel für Determinanten gilt nun

$$\operatorname{Det}\left(e_k \frac{\partial x_k'}{\partial x_\alpha}\right) \cdot \operatorname{Det}\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_\beta}\right) = \operatorname{Det} g_{\alpha\beta}. \tag{35,18}$$

Der zweite Faktor ist dabei gerade die JACOBIsche Determinante D [Formel (35,11)]; wegen

$$e_0 e_1 e_2 e_3 = -1 \tag{35,19}$$

ist der erste Faktor in (35,18) gleich $-D$. Folglich haben wir

$$g = -D^2. \tag{35,20}$$

Es ist zweckmäßig, die Wahl der unabhängigen Variablen x_0, x_1, x_2, x_3 durch die Bedingung einzuschränken, daß die Variable x_0 (ebenso wie x_0') den Charakter einer Zeit, die Variablen x_1, x_2, x_3 aber (ebenso wie x_1', x_2', x_3') den von räumlichen Koordinaten haben sollen. Wir formulieren diese Bedingung etwas genauer. Wie bisher wollen wir unter einem „Ereignis" einen Raum-Zeit-Punkt verstehen, d.h. einen Raumpunkt, der zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachtet wird. Wir fordern, daß zwei Ereignisse, denen dieselben Werte der räumlichen Parameter x_1, x_2, x_3, aber verschiedene Werte von x_0 (nämlich x_0^* und x_0^{**}) zukommen, zeitlich *aufeinanderfolgen* im Sinne von § 12. Für aufeinanderfolgende Ereignisse ist das Quadrat des Intervalls, wie wir wissen, positiv. Nimmt man die Differenz $x_0^{**} - x_0^*$ als unendlich klein an und setzt

$$x_0^* = x_0; \quad x_0^{**} = x_0 + dx_0, \tag{35,21}$$

so muß auch das infinitesimale Intervall ds^2 positiv sein. Es muß also gelten

$$ds^2 = g_{00}\, dx_0^2 > 0 \tag{35,22}$$

und folglich

$$g_{00} > 0. \tag{35,23}$$

Ferner betrachten wir zwei Ereignisse, denen der gleiche Wert des zeitlichen Parameters x_0, aber verschiedene Werte x_1, x_2, x_3 bzw. $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ der räumlichen Parameter entsprechen. Wir wollen fordern, daß diese Ereignisse *quasi-gleichzeitig* im Sinne von § 12 sein sollen. Für quasi-gleichzeitige Ereignisse ist die Größe ds negativ; deshalb muß

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k < 0 \tag{35,24}$$

für sämtliche Werte von dx_1, dx_2, dx_3 (sofern diese nicht alle gleichzeitig verschwinden) gelten. Daraus folgt, daß die quadratische Form (35,24) negativ

definit sein muß. Notwendig und hinreichend dafür sind, wie aus der Algebra bekannt, die Bedingungen

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0, \tag{35,25}$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \tag{35,26}$$

$$g_{11} < 0; \quad g_{22} < 0; \quad g_{33} < 0. \tag{35,27}$$

Diese Ungleichungen sind übrigens nicht alle unabhängig voneinander. Unabhängig sind zum Beispiel die Ungleichung (35,25), die erste Ungleichung (35,26) und die erste Ungleichung (35,27).

Wie man leicht zeigen kann, folgt aus den Bedingungen, die den Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ auferlegt werden [unabhängig von deren Darstellung in der Form (35,15)], daß sich die Größe ds^2 in der Umgebung jedes Punktes als Summe eines positiven und dreier negativer Quadrate darstellen läßt. Die Gesamtheit der Vorzeichen dieser Quadrate bezeichnet man als Signatur der quadratischen Form. In unserem Fall läßt sich die Signatur in der Form (e_0, e_1, e_2, e_3) oder $(+ - - -)$ schreiben.

Aus den Ungleichungen (35,23) und (35,25) bis (35,27) folgt, in Übereinstimmung mit (35,20), daß die Determinante g stets negativ ist. Außerdem ergeben sich aus ihnen für die Größen $g^{\alpha\beta}$ mit oberen Indizes Ungleichungen derselben Form, insbesondere

$$g^{00} > 0, \tag{35,28}$$

und

$$\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik}\,\omega_i\,\omega_k < 0 \tag{35,29}$$

für beliebige, nicht gleichzeitig verschwindende Größen ω_1, ω_2, ω_3. Auf den Beweis dieser rein algebraischen Aussagen werden wir hier nicht eingehen.

Damit also der Parameter x_0 den Charakter einer Zeit, die Parameter x_1, x_2, x_3 den von räumlichen Koordinaten haben, ist notwendig und hinreichend, daß die Größe g_{00} positiv und die quadratische Form mit den Koeffizienten g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ negativ definit ist. Den Größen g_{10}, g_{20}, g_{30} werden keine Einschränkungen auferlegt.

Wir untersuchen nun die geometrische Bedeutung der Gleichungen $x_0 = \text{const}$ und $x_k = \text{const}$. Dazu leiten wir die Bedingung ab, unter der die Gleichung

$$\omega(x, y, z, t) = 0 \tag{35,30}$$

als Gleichung einer sich bewegenden Fläche aufgefaßt werden kann. Aus (35,30) ergibt sich, daß die Differentiale der Koordinaten und der Zeit folgendermaßen zusammenhängen

$$\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz + \omega_t dt = 0. \tag{35,31}$$

Dabei bedeuten $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_t$ die Ableitungen von ω nach x, y, z, t. Wir betrachten eine Verschiebung dx, dy, dz in Richtung der Flächennormalen und setzen

$$dx = \frac{\omega_x}{|\text{grad}\, \omega|} dn; \quad dy = \frac{\omega_y}{|\text{grad}\, \omega|} dn; \quad dz = \frac{\omega_z}{|\text{grad}\, \omega|} dn, \qquad (35{,}32)$$

wobei dn der Betrag der Verschiebung ist. Setzen wir (35,32) in (35,31) ein, so ergibt sich

$$|\text{grad}\, \omega|\, dn + \omega_t dt = 0. \qquad (35{,}33)$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit der Verschiebung

$$v^2 = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \qquad (35{,}34)$$

hat also den Wert

$$v^2 = \frac{\omega_t^2}{(\text{grad}\, \omega)^2}. \qquad (35{,}35)$$

Man kann danach (35,30) als Gleichung einer Fläche auffassen, bei der sich jeder Punkt mit der durch (35,35) gegebenen Geschwindigkeit in Richtung der Flächennormalen bewegt. Eine solche Deutung ist jedoch strenggenommen nur möglich, wenn diese Geschwindigkeit nicht größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Nach (35,35) und (35,01) lautet die Bedingung dafür

$$(\nabla \omega)^2 \leq 0, \qquad (35{,}36)$$

wobei das Gleichheitszeichen der Lichtgeschwindigkeit entspricht.

Ist dagegen

$$(\nabla \omega)^2 > 0, \qquad (35{,}37)$$

so läßt sich die Gleichung (35,30) nach der Zeit auflösen und in der Form

$$t = \frac{1}{c} f(x, y, z) \qquad (35{,}38)$$

schreiben. Dabei ist

$$(\text{grad}\, f)^2 < 1. \qquad (35{,}39)$$

Die Gleichung (35,38) ordnet jedem Raumpunkt einen bestimmten Zeitpunkt zu, wobei alle diese Raum-Zeit-Punkte quasi-gleichzeitig sind. Man kann diese Gleichung „Zeitgleichung“ nennen. Wir erinnern daran, daß wir die Zeitgleichung schon in § 3 in Zusammenhang mit den Charakteristiken der MAXWELLschen Gleichungen betrachtet haben.

Wie bereits in § 3 bemerkt, kann man die Gleichung $\omega = 0$ als Gleichung einer Hyperfläche im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum auffassen. Diese Hyperflächen lassen sich in zwei Klassen einteilen.

Ist $(\nabla\omega)^2 < 0$, so ist eine Dimension der Hyperfläche zeitartig (man sagt häufig ,,die Hyperfläche ist zeitartig''; das ist aber inkorrekt, denn von den drei Dimensionen einer Hyperfläche sind zwei immer raumartig). Nach (35,35) handelt es sich dabei um eine gewöhnliche zweidimensionale Fläche, die sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Ist $(\nabla\omega)^2 > 0$, so nennt man die Hyperfläche raumartig. Das Wort ,,Hyperfläche'' ist hier nur eine andere Bezeichnung für den ganzen unendlichen Raum, dessen einzelne Punkte aber zu verschiedenen Zeiten betrachtet werden; und zwar wird der Punkt x, y, z zu der sich aus der Zeitgleichung (d. h. aus der Gleichung der Hyperfläche) ergebenden Zeit t betrachtet. Jedem Paar von Raum-Zeit-Punkten auf der Hyperfläche muß dabei ein raumartiges Intervall entsprechen (alle drei Dimensionen der Hyperfläche sind also raumartig).

Da $(\nabla\omega)^2$ eine Invariante ist, erhalten wir, indem wir nacheinander $\omega = x_0$, $\omega = x_1$, $\omega = x_2$, $\omega = x_3$ setzen,

$$(\nabla x_0)^2 = g^{00} > 0\,, \tag{35,40}$$

$$(\nabla x_1)^2 = g^{11} < 0; \quad (\nabla x_2)^2 = g^{22} < 0; \quad (\nabla x_3)^2 = g^{33} < 0\,. \tag{35,41}$$

Daraus geht hervor, daß die Gleichung $x_0 = \text{const}$ eine Zeitgleichung darstellt, während jede der Gleichungen $x_k = \text{const}$ ($k = 1,\ 2,\ 3$) die Gleichung einer Fläche ist, die sich mit Unterlichtgeschwindigkeit in Richtung ihrer Normalen bewegt (eine fortschreitende Koordinatenfläche). Aus den Bedingungen, die wir den Transformationen der Koordinaten und der Zeit auferlegt haben, ergibt sich auch folgendes: Konstanten Werten von x_1, x_2, x_3 entspricht in jedem Inertialsystem eine Bewegung des betreffenden Punktes mit Unterlichtgeschwindigkeit.

In der NEWTONschen Mechanik benutzt man häufig zeitabhängige Koordinatentransformationen, die als Übergang zu einem bewegten Bezugssystem gedeutet werden. Vergleicht man die Transformationen der Koordinaten und der Zeit in der NEWTONschen Mechanik mit denen in der Relativitätstheorie, so hat man folgendes zu beachten. Erstens unterscheidet sich schon der Begriff des Bezugssystems in der NEWTONschen Mechanik (im allgemeinen Fall einer beschleunigten Bewegung) von dem in der Relativitätstheorie: In der NEWTONschen Mechanik wird dieser Begriff mit den Vorstellungen eines absolut starren Körpers und einer unendlich großen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes verknüpft. In der Relativitätstheorie dagegen spielt der starre oder vielmehr feste Körper (der nicht absolut starr zu sein braucht, sondern seine Form nur beibehalten muß, wenn Beschleunigungen und äußere Kräfte fehlen) nur eine Hilfsrolle; der Begriff des Bezugssystems basiert dort auf dem Ausbreitungsgesetz für eine Wellenfront. Der Prototyp für ein NEWTONsches Bezugssystem ist ein starres Gerüst, der für das Bezugssystem in der Relativitätstheorie eine Funkortungsstation. Zweitens ist die Klasse der zulässigen Transformationen in der NEWTONschen Mechanik bedeutend größer als in der Relativitätstheorie: In der NEWTONschen Mechanik braucht man die Einschränkungen nicht zu berücksichtigen, die sich aus der Existenz einer Grenzgeschwindigkeit ergeben und die durch die oben betrachteten Ungleichungen ausgedrückt werden.

Als Beispiel betrachten wir eine Transformation, die in der NEWTONschen Mechanik als Übergang zu einem gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem auf-

gefaßt werden kann. Es seien x', y', z', t' die Koordinaten und die Zeit in einem Inertialsystem (GALILEIsche Koordinaten). Wir setzen

$$x' = x - \frac{1}{2}\,a t^2; \quad y' = y; \quad z' = z \tag{35,42}$$

und außerdem

$$t' = t - \frac{a}{c^2}\,t\,x. \tag{35,43}$$

Die Variablen x, y, z, t lassen sich als die Koordinaten und die Zeit in einem beschleunigten Bezugssystem deuten (im Sinne der NEWTONschen Mechanik und einer ihr entsprechenden Näherung). Setzen wir (35,42) und (35,43) in den Ausdruck für ds^2 ein, so ergibt sich

$$ds^2 = (c^2 - 2ax - a^2t^2)\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \\ + \frac{a^2}{c^2}\,(x\,dt + t\,dx)^2. \tag{35,44}$$

Die Ungleichungen für die Koeffizienten sind erfüllt unter den Bedingungen

$$1 - \frac{a^2t^2}{c^2} > 0; \quad \left(1 - \frac{ax}{c^2}\right)^2 - \frac{a^2t^2}{c^2} > 0. \tag{35,45}$$

Außerdem kann man fordern, daß die Ungleichung

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{ax}{c^2} > 0 \tag{35,46}$$

bestehen soll. Diese Ungleichungen zeigen, daß die Substitutionen (35,42) und (35,43) nicht im ganzen Raum und nur in einem beschränkten Zeitintervall zulässig sind.

Ein anderes Beispiel ist die Transformation, die dem Übergang zu einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem (sofern dieser Begriff einen Sinn hat) entspricht. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\omega t + y\sin\omega t; & z' &= z, \\ y' &= -x\sin\omega t + y\cos\omega t; & t' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{35,47}$$

Dann erhalten wir

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2(x^2 + y^2)]\,dt^2 - 2\omega\,(y\,dx - x\,dy)\,dt - \\ - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{35,48}$$

Die Bedingung für die Koeffizienten verlangt

$$c^2 - \omega^2(x^2 + y^2) > 0. \tag{35,49}$$

Diese Ungleichung ist nur in einem beschränkten Bereich um die Drehachse erfüllt, nämlich dort, wo die Bahngeschwindigkeit der Rotation kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Wir möchten nochmals betonen, daß die angeführten Beispiele nur dort einen physikalischen Sinn haben, wo die NEWTONsche Mechanik anwendbar ist (vgl. auch § 61).

Selbstverständlich gehört zu den zulässigen Transformationen auch die Einführung gewöhnlicher krummliniger Koordinaten. Da diese Transformationen die Zeit nicht enthalten, haben sie die gleiche geometrische Bedeutung wie in der nichtrelativistischen Theorie, weshalb wir nicht näher auf sie eingehen wollen.

§ 36 Allgemeine Tensoranalysis und verallgemeinerte Geometrie

Im vorigen Paragraphen betrachteten wir die Ausdrücke

$$(\nabla\omega)^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial x_\beta}, \qquad (36,01)$$

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta. \qquad (36,02)$$

Sie ergaben sich aus den üblichen Ausdrücken der Relativitätstheorie durch Einführung der neuen Variablen x_1, x_2, x_3, x_0 anstelle der Koordinaten x, y, z und der Zeit t. Wir stellten auch die Bedingungen auf, unter denen die Variable x_0 die zeitliche Folge von Ereignissen und die Variablen x_1, x_2, x_3 deren Ort im Raum beschreiben.

Die Einführung von neuen Variablen kann natürlich keinen Einfluß auf die physikalischen Folgerungen aus der Theorie haben, sondern sie ist ein Verfahren von rein mathematischer Natur. Die Entwicklung des Apparates, mit dessen Hilfe man die Gleichungen der mathematischen Physik (etwa die Bewegungs- und die Feldgleichungen) für beliebige unabhängige Variable direkt, d. h. ohne den Umweg über die kartesischen Koordinaten und die Zeit aufstellen kann, ist aber nicht nur in mathematischer Hinsicht (zur Verkürzung der Rechnungen) nützlich, sondern hat auch eine große prinzipielle Bedeutung. Dieser Apparat kann nämlich in gewissen Fällen einen Fingerzeig für die Verallgemeinerung der physikalischen Theorie geben.

Gleichungen, die bei beliebiger Wahl der unabhängigen Variablen gelten, werden wir als allgemein-kovariant bezeichnen. Den Apparat, mit dessen Hilfe man allgemein-kovariante Tensorgleichungen aufstellen kann, nennen wir allgemeine Tensoranalysis.

Allgemein-kovariante Gleichungen werden schon in der NEWTONschen Mechanik verwendet. Wir denken etwa an die LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art, die die Bewegung eines Systems von Massenpunkten in verallgemeinerten Koordinaten beschreiben, und an ihre Verallgemeinerung für ein kontinuierliches Medium. Ohne etwas physikalisch Neues gegenüber den Gleichungen in kartesischen Koordinaten zu liefern, spielen die LAGRANGEschen Gleichungen doch sowohl bei praktischen Anwendungen als auch bei theoretischen Untersuchungen eine wichtige Rolle. In der Relativitätstheorie verfolgt die allgemeine Tensoranalysis ein ähnliches Ziel.

Den Ausgangspunkt der allgemeinen Tensoranalysis bilden die Ausdrücke (36,01) und (36,02) für das Quadrat des vierdimensionalen Gradienten und für das Quadrat des Intervalls. Diese Ausdrücke kennzeichnen die *Maßbestimmung* oder *Metrik* des Raum-Zeit-Kontinuums. Die Koeffizienten $g^{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta}$ werden dabei als Funktionen der Variablen x_0, x_1, x_2, x_3 betrachtet.

Ergeben sich, wie wir bisher angenommen haben, die Ausdrücke (36,01) und (36,02) einfach aus (35,01) und (35,02) [oder aus (35,08) und (35,09)] durch Einführung von neuen Variablen, so lassen sich deren Koeffizienten $g^{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta}$ in der Form (35,13) und (35,15) darstellen. Mit anderen Worten, in diesem Fall können die zehn Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ durch die vier Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3 nach der Formel

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_k}{\partial x_\beta} \tag{36,03}$$

ausgedrückt werden. Durch diese vier Funktionen lassen sich wegen der Beziehung (35,16) dann auch die Koeffizienten $g^{\alpha\beta}$ darstellen.

Es ist jedoch wesentlich, daß die Formeln der allgemeinen Tensoranalysis auch dann kaum komplizierter werden, wenn man von der Annahme, daß sich die $g_{\alpha\beta}$ in der Form (36,03) darstellen lassen, abgeht und diese Größen als gegebene Funktionen der Koordinaten (d. h. der Variablen x_0, x_1, x_2, x_3) auffaßt. Diesem allgemeineren Standpunkt entspricht die Einführung einer nichteuklidischen Geometrie und einer nichteuklidischen Metrik für Raum und Zeit. Damit gehen wir schon über die gewöhnliche (die sog. „spezielle") Relativitätstheorie hinaus. Dieser Schritt ist mit dem Aufbau einer neuen physikalischen Theorie, der EINSTEINschen Gravitationstheorie verbunden, mit der wir uns in den folgenden Kapiteln dieses Buches beschäftigen werden. In diesem Kapitel wollen wir jedoch zunächst rein formal die allgemeine Tensoranalysis unter der Voraussetzung entwickeln, daß die Metrik gegeben ist und daß die Größen $g_{\alpha\beta}$ bekannte Funktionen der Koordinaten darstellen. Dieses Vorgehen hat zwei Vorzüge. Erstens können wir so die Bedingungen bestimmen, denen die Größen $g_{\alpha\beta}$ genügen müssen, um in der Form (36,03) darstellbar zu sein. Auf diese Weise kommt man zu einer allgemein-kovarianten Formulierung der gewöhnlichen Relativitätstheorie. Zweitens aber liefert die allgemeine Tensoranalysis das fertige mathematische Rüstzeug zur Formulierung der EINSTEINschen Gravitationstheorie.

Bevor wir mit der systematischen Darstellung der Tensoranalysis beginnen, wollen wir eine Verbindung zwischen den Ausdrücken $(\nabla\omega)^2$ und ds^2 herstellen, die allein unter der Bedingung gilt, daß

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\mu\alpha}\, g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\nu \tag{36,04}$$

ist [die Verbindung besteht also unabhängig davon, ob sich die $g_{\alpha\beta}$ in der Form (36,03) darstellen lassen oder nicht]. Wir zeigen nämlich folgendes: Wenn die Funktion $\omega(x_0, x_1, x_2, x_3)$ der Gleichung $(\nabla\omega)^2 = 0$ genügt, so erfüllen die Differentiale der Koordinaten, die durch die Beziehung $\omega = \text{const}$ verknüpft sind, die Gleichung $ds^2 = 0$.

Mit der Abkürzung

$$\omega_\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{36,05}$$

können wir die Gleichung $(\nabla\omega)^2 = 0$ in der Form

$$G \equiv \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\, \omega_\alpha\, \omega_\beta = 0 \tag{36,06}$$

schreiben. Diese partielle Differentialgleichung für ω ist vom gleichen Typ wie die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung der klassischen Mechanik und läßt sich analog zu letzterer lösen. Schreiben wir sie in der nach ω_0 aufgelösten Form

$$\omega_0 = -H(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \tag{36,07}$$

so entspricht die Funktion H der HAMILTON-Funktion; die HAMILTONschen Gleichungen lauten dann

$$\frac{d x_k}{d x_0} = \frac{\partial H}{\partial \omega_k}; \quad \frac{d\omega_k}{d x_0} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{36,08}$$

Es ist aber

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_k} = -\frac{\partial \omega_0}{\partial \omega_k} = \left(\frac{\partial G}{\partial \omega_k}\right) \Big/ \left(\frac{\partial G}{\partial \omega_0}\right). \tag{36,09}$$

Damit folgt aus den ersten drei Gleichungen von (36,08), daß die Differentiale dx_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) zu den partiellen Ableitungen der Größe G nach den ω_α proportional sind. Bezeichnen wir den infinitesimalen Proportionalitätsfaktor mit $\frac{1}{2}\, dp$, so ergibt sich

$$dx_\alpha = \frac{dp}{2} \frac{\partial G}{\partial \omega_\alpha} = dp \sum_{\beta=0}^{3} g^{\alpha\beta}\, \omega_\beta. \tag{36,10}$$

Wenn wir diese Gleichung mit Hilfe von (36,04) nach ω_α auflösen, so erhalten wir

$$\omega_\alpha\, dp = \sum_{\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, d x_\beta. \tag{36,11}$$

Die Gleichung

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \omega_\alpha\, d x_\alpha = 0 \tag{36,12}$$

liefert dann durch Multiplikation von (36,11) mit $d x_\alpha$ und Summation über α

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, d x_\alpha\, d x_\beta = 0, \tag{36,13}$$

was zu beweisen war. Betrachten wir also wie bisher $(\nabla\omega)^2 = 0$ als Gleichung der Wellenfront, so können wir sagen, daß für zwei infinitesimal benachbarte Raum-Zeit-Punkte, die auf der Wellenfront liegen, die Differentiale der Koordinaten und der Zeit durch die Beziehung $ds^2 = 0$ verknüpft sind.

Im folgenden werden wir die Größen $g_{\alpha\beta}$ als gegebene Funktionen der Variablen x_0, x_1, x_2, x_3 ansehen und nur voraussetzen, daß sie stetige Ableitungen aller betrachteten Ordnungen haben und den in § 35 formulierten Ungleichungen genügen. Neben den Funktionen $g_{\alpha\beta}$ betrachten wir auch die Funktionen $g^{\alpha\beta}$, die mit den ersteren gemäß (36,04) zusammenhängen. Die Bedingungen für die Darstellbarkeit der $g_{\alpha\beta}$ in der Form (36,03) werden weiter unten (in § 42) aufgestellt.

§ 37 Die Definition eines Vektors und eines Tensors. Tensoralgebra

In der Tensoranalysis hat man es ständig mit Summen von der Art (36,01) und (36,02) zu tun, in denen die Summationsindizes zweimal auftreten. Nach einem Vorschlag von EINSTEIN wollen wir für diese Summen eine vereinfachte Bezeichnung verwenden, welche darin besteht, daß man sich die Summation über zweimal auftretende Indizes auch ohne explizite Verwendung des Summenzeichens ausgeführt zu denken hat. Dabei soll über griechische Indizes α, β, ... von 0 bis 3, über lateinische Indizes i, k, ... von 1 bis 3 summiert werden. Danach können wir zum Beispiel statt

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{37,01}$$

einfach schreiben

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{37,02}$$

oder, falls wir der Koordinate[1] x_0 eine Sonderstellung einräumen wollen,

$$ds^2 = g_{00}\, dx_0^2 + 2g_{0i}\, dx_0\, dx_i + g_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{37,03}$$

Diese abgekürzte Bezeichnungsweise erweist sich als sehr zweckmäßig und kann auch nicht zu Mißverständnissen führen. In den seltenen Fällen, daß über einen doppelt auftretenden Index nicht summiert werden soll, werden wir das besonders vermerken. So werden wir zum Beispiel in dem Spezialfall, daß sich der Ausdruck (36,02) auf

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \tag{37,04}$$

reduziert, schreiben

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha\, \delta_{\alpha\beta} \quad \text{(ohne Summation).} \tag{37,05}$$

---

[1]) Der Einheitlichkeit halber bezeichnen wir hier und im folgenden alle 4 Variablen x_0, x_1, x_2, x_3 als Koordinaten, obwohl x_0 den Charakter einer Zeit hat. In diesem Sinne wird auch der Ausdruck „GALILEIsche Koordinaten" benutzt.

Die Definition eines kovarianten und eines kontravarianten Vektors haben wir für den Fall (37,05) im § 20 gegeben. Die Formeln (20,12) und (20,13), die wir jetzt in der Form

$$A'_\alpha = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} A_\beta, \tag{37,06}$$

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} A^\beta \tag{37,07}$$

schreiben, kann man auch im allgemeinen Fall als Definition eines Vektors benutzen. Wie früher bezeichnen wir kovariante Vektoren durch Buchstaben mit unteren, kontravariante Vektoren durch solche mit oberen Indizes. Hiervon machen wir aber bei den Differentialen der Koordinaten eine Ausnahme und schreiben sie in der Form $d\,x_\alpha$, obwohl sie einen kontravarianten Vektor bilden. Ein kovarianter Vektor läßt sich also als eine Gesamtheit von vier Größen definieren, die sich wie die partiellen Ableitungen einer Funktion nach den Koordinaten transformieren. Analog ist ein kontravarianter Vektor eine Gesamtheit von vier Größen, die sich wie die Differentiale der Koordinaten transformieren.

Wenn ds^2 die Form (37,04) hat und wir es nur mit LORENTZ-Transformationen zu tun haben, sind die Koeffizienten der Transformationsformeln (37,06) und (37,07) konstant. Im allgemeinen Fall beliebiger Transformationen dagegen sind sie variabel. Bei einer LORENTZ-Transformation muß sich der Vektor nicht unbedingt auf einen bestimmten Raumpunkt beziehen, sondern kann „frei" sein. Ein Beispiel für einen freien Vektor ist der Energie-Impuls-Vektor eines materiellen Systems. (Entsprechend ist der Tensor des Drehimpulses und der Schwerpunktsbewegung des Systems ein freier Tensor.) Bei einer allgemeinen Koordinatentransformation (sogar schon beim Übergang zu krummlinigen Koordinaten) ist es dagegen notwendig, daß der Vektor mit einem bestimmten Raumpunkt verknüpft wird. Solche „gebundenen" Vektoren sind die Feldvektoren (zum Beispiel das Geschwindigkeitsfeld eines kontinuierlichen Mediums), deren Komponenten Raum-Zeit-Funktionen, d. h. Funktionen der Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 sind. Ein gebundener Vektor muß aber nicht unbedingt in irgendeinem endlichen Raum-Zeit-Gebiet definiert sein; sein Definitionsbereich kann auch eine Kurve (Tangentenvektor) oder eine Fläche (Normalenvektor) sein. Alle diese Bemerkungen gelten auch für Tensoren. In der allgemeinen Tensoranalysis haben wir es also mit gebundenen Vektoren und Tensoren zu tun. Dabei müssen die variablen Transformationskoeffizienten $\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}$ usw. an der Stelle gebildet werden, auf die sich der Vektor oder der Tensor bezieht.

Die Definition eines Tensors im allgemeinen Fall ist derjenigen ganz analog, die in § 21 für den Fall einer LORENTZ-Transformation gegeben wurde. Die Transformationsregeln (21,01), (21,03) und (21,05) für einen kovarianten, einen kontravarianten und einen gemischten Tensor zweiter Stufe bleiben auch in

der allgemeinen Tensoranalysis gültig. In unserer neuen Bezeichnungsweise lauten sie

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T_{\alpha\beta}, \tag{37,08}$$

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} T^{\alpha\beta}, \tag{37,09}$$

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T^{\alpha}_{\beta}. \tag{37,10}$$

Als Tensor zweiter Stufe (kovariant, kontravariant und gemischt) bezeichnet man also eine Gesamtheit von Größen, die sich nach den Gesetzen (37,08), (37,09) und (37,10) transformieren.

Die Symmetrie oder Antisymmetrie eines kovarianten oder kontravarianten (nicht aber die eines gemischten) Tensors zweiter Stufe bleibt bei einer Transformation erhalten. Ändern wir nämlich in (37,08) die Bezeichnung der Indizes, so können wir auch schreiben

$$T'_{\nu\mu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} T_{\beta\alpha}. \tag{37,11}$$

Setzen wir nun

$$2 S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}, \tag{37,12}$$

$$2 A_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} \tag{37,13}$$

und definieren $S'_{\mu\nu}$ und $A'_{\mu\nu}$ analog, so erhalten wir

$$S'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} S_{\alpha\beta}, \tag{37,14}$$

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} A_{\alpha\beta}. \tag{37,15}$$

Die Größe $S_{\alpha\beta}$ nennt man den symmetrischen, die Größe $A_{\alpha\beta}$ den antisymmetrischen Anteil des Tensors $T_{\alpha\beta}$. Aus den Formeln (37,14) und (37,15) folgt, daß jeder der beiden Anteile für sich einen Tensor bildet. Ist nun der Tensor $T_{\alpha\beta}$ symmetrisch, so gilt $A_{\alpha\beta} = 0$ und damit auch $A'_{\mu\nu} = 0$, d. h. der transformierte Tensor $T'_{\mu\nu}$ ist ebenfalls symmetrisch. Ist andererseits der Tensor $T_{\alpha\beta}$ antisymmetrisch, so gilt $S_{\alpha\beta} = 0$ und damit $S'_{\mu\nu} = 0$, so daß der transformierte Tensor $T'_{\mu\nu}$ auch antisymmetrisch ist. Die gleichen Überlegungen gelten für den kontravarianten Tensor $T^{\alpha\beta}$. Bei dem gemischten Tensor T^{α}_{β} dagegen gehen der obere und der untere Index nicht in gleicher Weise in die Transformationsformel (37,10) ein, so daß die Aufspaltung in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil keine invariante Bedeutung hat.

Ein wichtiges Beispiel für einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe ist die Gesamtheit der Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ in dem Ausdruck für ds^2. Daß diese Koeffi-

zienten in den beiden Indizes symmetrisch sind, ergibt sich unmittelbar aus ihrer Definition. Daß sie einen Tensor bilden, folgt aus der Invarianz des Ausdruckes für ds^2. Denn beim Übergang zu neuen Variablen x_0', x_1', x_2', x_3' gilt

$$g'_{\mu\nu}\, d x'_\mu\, d x'_\nu = g_{\alpha\beta}\, d x_\alpha\, d x_\beta, \tag{37,16}$$

woraus folgt

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}. \tag{37,17}$$

Das ist das Transformationsgesetz für einen kovarianten Tensor. Den Tensor $g_{\alpha\beta}$ nennt man Fundamental- oder metrischen Tensor.

Die Gesamtheit der Größen $g^{\alpha\beta}$, die durch die Gleichungen

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \tag{37,18}$$

definiert werden, bilden auch einen Tensor, und zwar einen kontravarianten Tensor. Das wollen wir jetzt beweisen. In einem gestrichenen Bezugssystem haben wir für $g'_{\mu\nu}$ den Ausdruck (37,17); die $g'^{\mu\nu}$ ergeben sich dann aus den Gleichungen

$$g'^{\mu\lambda} g'_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{37,19}$$

Ist andererseits $g^{\alpha\beta}$ ein kontravarianter Tensor, so muß gelten

$$g'^{\mu\lambda} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\beta}. \tag{37,20}$$

Wir müssen nun zeigen, daß die beiden Definitionen für $g'^{\mu\lambda}$ übereinstimmen. Da die Auflösung der Gleichungen (37,19) nach $g'^{\mu\lambda}$ eindeutig ist, brauchen wir nur noch nachzuweisen, daß die Ausdrücke (37,20) den Gleichungen (37,19) genügen. Das ist leicht durchzuführen, wenn man die Identitäten

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\varrho} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\varrho} = \delta^\alpha_\varrho, \tag{37,21}$$

$$g'_{\lambda\nu} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\varrho} = g_{\varrho\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu} \tag{37,22}$$

beachtet. Setzen wir (37,20) in (37,19) ein und benutzen zunächst (37,22) und dann (37,18), so ergibt sich folgende Kette von Gleichungen

$$g'^{\lambda\mu} g'_{\lambda\nu} = g^{\alpha\beta} g'_{\lambda\nu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\beta} = g^{\alpha\beta} g_{\beta\sigma} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu} =$$

$$= \delta^\alpha_\sigma \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{37,23}$$

Die äußersten Glieder dieser Kette sind aber gerade die Gleichungen (37,19). Die Größen $g^{\alpha\beta}$ nennt man die kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors, während die $g_{\alpha\beta}$ seine kovarianten Komponenten sind.

Die in (37,23) benutzte Gleichung

$$\delta_\sigma^\alpha \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\nu} = \delta_\nu^\mu \tag{37,24}$$

zeigt, daß die Gesamtheit der Größen

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mu = \nu, \\ 0 & \text{für} \quad \mu \neq \nu, \end{cases} \tag{37,25}$$

die in allen Koordinatensystemen denselben Wert besitzen, der Definition eines gemischten Tensors zweiter Stufe genügt.

Ist ein kovarianter Vektor A_ν gegeben, so transformiert sich, wie man leicht nachprüft, die Gesamtheit der Größen

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{37,26}$$

wie ein kontravarianter Vektor. Wir betrachten die beiden Vektoren A_ν und A^μ nicht als wesentlich verschieden, sondern als kovariante und kontravariante Komponenten des gleichen Vektors. Die durch die Gleichung (37,26) ausgedrückte Operation bezeichnet man kurz als Heben, die umgekehrte Operation

$$A_\nu = g_{\nu\mu} A^\mu \tag{37,27}$$

als Senken eines Vektorindexes. Das Heben und Senken von Indizes kann auch bei Tensoren erfolgen. Zum Beispiel kann man aus einem kovarianten Tensor $T_{\mu\nu}$ durch Heben der Indizes den kontravarianten Tensor

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta} \tag{37,28}$$

bilden, aus dem sich umgekehrt der ursprüngliche Tensor gemäß

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} \tag{37,29}$$

ergibt. Dabei bleibt offenbar die Symmetrie oder Antisymmetrie des Tensors erhalten. Bei der Bildung von gemischten Tensoren muß man aufpassen, welcher Index gehoben oder gesenkt werden soll. Der Deutlichkeit halber kann man den Platz eines gehobenen oder gesenkten Indexes durch einen Punkt bezeichnen. Die Tensoren

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} \tag{37,30}$$

und

$$T^{\cdot\mu}_{\nu\cdot} = g^{\mu\alpha} T_{\nu\alpha} \tag{37,31}$$

zum Beispiel stimmen nur dann überein, wenn der Tensor $T_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist. Dann kann man die Punkte auch fortlassen und einfach schreiben

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\nu\alpha}. \tag{37,32}$$

Wir haben bisher der Einfachheit halber nur Vektoren und Tensoren zweiter Stufe betrachtet. Ganz analog kann man aber auch Tensoren höherer Stufe definieren. Als kovarianten Tensor n-ter Stufe bezeichnet man eine Gesamtheit von Größen, die sich nach dem Gesetz

$$A'_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} = A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial x'_{\beta_1}} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial x'_{\beta_2}} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_n}}{\partial x'_{\beta_n}} \tag{37,33}$$

transformieren. Entsprechend ist ein kontravarianter Tensor n-ter Stufe eine Gesamtheit von Größen, die sich nach dem Gesetz

$$B'^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} = B^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \frac{\partial x'_{\beta_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial x'_{\beta_2}}{\partial x_{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial x'_{\beta_n}}{\partial x_{\alpha_n}} \tag{37,34}$$

transformieren. Ein gemischter Tensor n-ter Stufe mit k kovarianten und m kontravarianten Indizes (mit $k + m = n$) schließlich ist eine Gesamtheit von Größen, die sich nach dem Gesetz

$$C'^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\nu_1\cdots\nu_k} = C^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_k} \frac{\partial x'_{\mu_1}}{\partial x_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'_{\mu_m}}{\partial x_{\alpha_m}} \frac{\partial x_{\beta_1}}{\partial x'_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x_{\beta_k}}{\partial x'_{\nu_k}} \tag{37,35}$$

transformieren. Aus einem kovarianten Tensor n-ter Stufe läßt sich nach der Formel

$$A^{\mu_1\cdots\mu_n} = A_{\alpha_1\cdots\alpha_n} g^{\alpha_1\mu_1} \cdots g^{\alpha_n\mu_n} \tag{37,36}$$

ein kontravarianter Tensor der gleichen Stufe bilden. Dabei kann man von den kovarianten und kontravarianten Komponenten des gleichen Tensors sprechen. Wenn man nicht alle, sondern nur einige Indizes hebt, so kann man aus einem kovarianten Tensor auch einen gemischten Tensor der gleichen Stufe bilden (an den Platz der gehobenen Indizes setzen wir dabei der Deutlichkeit halber Punkte). Aus zwei Tensoren der Stufen k und m läßt sich durch Multiplikation ihrer Komponenten ein Tensor der höheren Stufe $n = k + m$ bilden. Für kovariante Tensoren zum Beispiel haben wir

$$A_{\alpha_1\cdots\alpha_k} B_{\alpha_{k+1}\cdots\alpha_n} = C_{\alpha_1\cdots\alpha_n}. \tag{37,37}$$

Analoge Formeln gelten für kontravariante und gemischte Tensoren.

Aus einem gegebenen Tensor n-ter Stufe $A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ kann man nach der Formel

$$A_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-2}\beta\gamma} g^{\beta\gamma} = B_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-2}} \tag{37,38}$$

einen neuen Tensor $B_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-2}}$ bilden, dessen Stufe um zwei niedriger ist als die des ursprünglichen Tensors. Diese Operation bezeichnet man als Verjüngung nach den entsprechenden beiden Indizes. In der Formel (37,38) erfolgte die Verjüngung nach den beiden letzten Indizes; offensichtlich hängt das Ergebnis im allgemeinen von der Wahl des Indexpaares ab, nach dem verjüngt wird. Man kann die Verjüngung in zwei Schritten ausführen: Zunächst hebt man einen der Indizes nach der Formel

$$A_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\gamma} g^{\beta\gamma} = A_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}^{\cdots\cdots\cdots\beta}, \tag{37,39}$$

dann setzt man den anderen Index α_{n-1} dem gehobenen Index β gleich und summiert über diesen

$$A_{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-2}\beta}^{\cdots\cdots\cdots\cdots\beta} = B_{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-2}}. \tag{37,40}$$

Die Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe liefert einen Skalar

$$T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = T, \tag{37,41}$$

wofür man auch schreiben kann

$$T^{\nu\cdot}_{\cdot\nu} = T^{\cdot\nu}_{\nu\cdot} = T. \tag{37,42}$$

Daß für die Verjüngung der beiden Tensoren (37,30) und (37,31) das gleiche Ergebnis herauskommt, ist ganz verständlich, denn der Skalar T hängt nur vom symmetrischen Anteil des Tensors $T_{\mu\nu}$ ab, und für einen symmetrischen, kovarianten Tensor stimmen die beiden Formen des gemischten Tensors überein.

Die Verjüngung eines Vektors ist nicht möglich, da er nur einen Index enthält. Aus zwei Vektoren A_μ und B_ν läßt sich aber ein Tensor zweiter Stufe aufbauen, der dann verjüngt werden kann. Das Resultat ist der Skalar

$$g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A_\mu B^\mu = A^\nu B_\nu, \tag{37,43}$$

den man das Skalarprodukt der zwei Vektoren A_μ und B_ν nennt. Stimmen beide Vektoren überein, so lautet der entsprechende Skalar

$$g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu = A_\mu A^\mu. \tag{37,44}$$

Nach dem Vorzeichen dieses Skalarproduktes eines Vektors mit sich selbst kann man die Vektoren in zeitartige ($A_\mu A^\mu > 0$), raumartige ($A_\mu A^\mu < 0$) und Null-Vektoren ($A_\mu A^\mu = 0$) einteilen. Diese Einteilung ist mit in der § 20 betrachteten identisch.

Das Skalarprodukt zweier zeitartiger Vektoren A^μ und B^μ, deren Invarianten gleich Eins sind, ist dem Betrage nach größer als Eins. Mit anderen Worten, aus den Bedingungen

$$g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = 1; \qquad g_{\mu\nu} B^\mu B^\nu = 1 \tag{37,45}$$

folgt

$$|g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu| \geq 1. \tag{37,46}$$

Das wollen wir jetzt beweisen. Die Bedingung (37,45) für den Vektor A^μ läßt sich in der Form

$$\left(\sqrt{g_{00}} A^0 + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} g_{0i} A^i\right)^2 - \left(\frac{g_{0i}\, g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}\right) A^i A^k = 1 \tag{37,47}$$

schreiben, oder kürzer

$$\frac{1}{g_{00}} (A_0)^2 - a_{ik} A^i A^k = 1. \tag{37,48}$$

Dabei haben wir

$$a_{ik} = \frac{g_{0i}\, g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik} \tag{37,49}$$

gesetzt. Entsprechend gilt

$$B_\mu B^\mu \equiv \frac{1}{g_{00}} (B_0)^2 - a_{ik}\, B^i B^k = 1\,. \tag{37,50}$$

Andererseits hat das Skalarprodukt $A_\mu B^\mu$ den Wert

$$A_\mu B^\mu \equiv \frac{1}{g_{00}} A_0 B_0 - a_{ik} A^i B^k. \tag{37,51}$$

Wegen der in § 35 aufgestellten Ungleichungen für die $g_{\mu\nu}$ sind die Größen a_{ik} Koeffizienten einer positiv definiten quadratischen Form. Deshalb ist die SCHWARZsche Ungleichung anwendbar, welche ergibt

$$|a_{ik} A^i B^k| \leqq \sqrt{a_{ik} A^i A^k}\, \sqrt{a_{ik} B^i B^k}. \tag{37,52}$$

Mit

$$A = \sqrt{a_{ik} A^i A^k}; \quad B = \sqrt{a_{ik} B^i B^k} \tag{37,53}$$

haben wir also

$$|A_0| = \sqrt{g_{00}}\, \sqrt{1 + A^2}; \quad |B_0| = \sqrt{g_{00}}\, \sqrt{1 + B^2}; \quad |a_{ik} A^i B^k| \leqq A\, B. \tag{37,54}$$

Daraus folgt

$$|A_\mu B^\mu| \geqq \sqrt{1 + A^2}\, \sqrt{1 + B^2} - A\, B \geqq 1, \tag{37,55}$$

was zu beweisen war.

Wir bemerken noch, daß die für zeitartige Vektoren gültige Ungleichung (37,46), die wir in der Form

$$|g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu| \geqq \sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu}\, \sqrt{g_{\mu\nu} B^\mu B^\nu} \tag{37,56}$$

schreiben können, zu (37,52) analog ist, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat; das rührt von dem indefiniten Charakter der Metrik her. Bei einem zeitartigen Vektor haben die kovariante und die kontravariante Null-Komponente immer das gleiche Vorzeichen. Nehmen wir etwa an, daß $A_0 > 0$ und $B_0 > 0$ (und damit auch $A^0 > 0$ und $B^0 > 0$) ist, so können wir die Formel (37,56) folgendermaßen schreiben:

$$A_\nu B^\nu \geqq \sqrt{A_\nu A^\nu}\, \sqrt{B_\mu B^\mu}. \tag{37,57}$$

Schließlich wollen wir noch den Begriff des Pseudotensors in der allgemeinen Tensoranalysis betrachten. In § 22 haben wir eine Gesamtheit von Größen $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ eingeführt, die antisymmetrisch in allen Indizes sind; ihr Wert ist dann durch

$\varepsilon_{0123} = 1$ festgelegt. Diese Größen genügen der Beziehung (22,02), die mit etwas abgeänderten Bezeichnungen lautet

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\varrho} \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\sigma} = D \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}. \tag{37,58}$$

Dabei ist D die JACOBIsche Determinante[1]) (35,11). Andererseits kann man unter Benutzung der Multiplikationsregel für Determinanten leicht folgende Formel beweisen

$$\text{Det}\, g_{\alpha\beta} = D^2 \,\text{Det}\, g'_{\lambda\mu}, \tag{37,59}$$

die eine Verallgemeinerung von (35,18) darstellt. Dafür können wir auch kürzer schreiben:

$$g = D^2 g'. \tag{37,60}$$

Ändern wir das Vorzeichen und ziehen die positive Quadratwurzel, so erhalten wir

$$\sqrt{-g} = |D| \sqrt{-g'}. \tag{37,61}$$

Das gibt uns das Transformationsgesetz für die Determinante g. Wir multiplizieren nun beide Seiten von (37,58) mit $\sqrt{-g'}$ und setzen

$$E_{\mu\nu\varrho\sigma} = \sqrt{-g}\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}, \tag{37,62}$$

$$E'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g'}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{37,63}$$

Dann läßt sich die Formel (37,58) in der Form

$$E'_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\varrho} \frac{\partial x'_\delta}{\partial x_\sigma} = (\text{sgn}\, D)\, E_{\mu\nu\varrho\sigma} \tag{37,64}$$

schreiben. Dabei ist $\text{sgn}\, D = \pm 1$ das Vorzeichen der JACOBIschen Determinante D. Diese Formel zeigt, daß sich die Größen $E_{\mu\nu\varrho\sigma}$ bei Transformationen mit positiver JACOBIscher Determinante wie ein kovarianter Tensor vierter Stufe transformieren. Bei Transformationen mit negativer JACOBIscher Determinante dagegen unterscheidet sich ihr Transformationsgesetz von dem eines kovarianten Tensors nur durch das Vorzeichen. Eine solche Gesamtheit von Größen bezeichnen wir als antisymmetrischen *Pseudotensor*. Der entsprechende kontravariante Pseudotensor ergibt sich nach der allgemeinen Formel

$$E^{\mu\nu\varrho\sigma} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\varrho\gamma} g^{\sigma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{37,65}$$

und lautet

$$E^{\mu\nu\varrho\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}. \tag{37,66}$$

---

[1]) In (22,02) haben wir mit D die JACOBIsche Determinante der inversen Substitution bezeichnet.

Mit Hilfe des antisymmetrischen Pseudotensors vierter Stufe kann man jedem antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe $A_{\gamma\delta}$ einen dualen Pseudotensor

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \tag{37,67}$$

und jedem antisymmetrischen Tensor dritter Stufe $A_{\beta\gamma\delta}$ einen dualen Pseudovektor

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha} = \frac{1}{6} E^{\alpha\beta\gamma\delta} A_{\beta\gamma\delta} \tag{37,68}$$

zuordnen. Ist der antisymmetrische Tensor $A_{\beta\gamma\delta}$ aus den drei Vektoren a_μ, b_μ, c_μ nach der Formel

$$A_{\beta\gamma\delta} = a_\beta b_\gamma c_\delta + a_\gamma b_\delta c_\beta + a_\delta b_\beta c_\gamma - a_\gamma b_\beta c_\delta - a_\beta b_\delta c_\gamma - a_\delta b_\gamma c_\beta \tag{37,69}$$

gebildet, so hat der dazu duale Pseudovektor die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{A}{}^{0} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad & \overset{*}{A}{}^{1} &= +\frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ \overset{*}{A}{}^{2} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}; \quad & \overset{*}{A}{}^{3} &= +\frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\}. \tag{37,70}$$

Diese sind den Unterdeterminanten (mit dem entsprechenden Vorzeichen) proportional, die in der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{37,71}$$

zu den Elementen ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 gehören. Offensichtlich gilt dann

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha} a_\alpha = 0; \quad \overset{*}{A}{}^{\alpha} b_\alpha = 0; \quad \overset{*}{A}{}^{\alpha} c_\alpha = 0. \tag{37,72}$$

Der Pseudovektor $\overset{*}{A}{}^{\alpha}$ steht also auf jedem der Vektoren a_α, b_α und c_α senkrecht. Diesen Pseudovektor kann man deshalb als das Vektorprodukt der drei Vektoren a_α, b_α und c_α bezeichnen.

§ 38 Die Gleichungen der geodätischen Linie

Wir betrachten zwei Raum-Zeit-Punkte, die aufeinanderfolgenden Ereignissen entsprechen; ihre Koordinaten seien $x_\alpha^{(1)}$ und $x_\alpha^{(2)}$. Ein Massenpunkt soll sich nun derart längs irgendeiner Kurve bewegen, daß seine räumlichen Koordinaten

für $x_0 = x_0^{(1)}$ die Werte $x_k = x_k^{(1)}$ und für $x_0 = x_0^{(2)}$ die Werte $x_k = x_k^{(2)}$ haben.

Da die Ereignisse $x_\alpha^{(1)}$ und $x_\alpha^{(2)}$ nach Voraussetzung aufeinanderfolgend sind, ist eine solche Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit möglich. Man kann die Zeit x_0 und die ihr entsprechenden Raumkoordinaten x_k des Massenpunktes durch einen Hilfsparameter p ausdrücken, indem man setzt

$$x_\alpha = \varphi^\alpha(p). \tag{38,01}$$

Dabei müssen die Bedingungen

$$x_\alpha^{(1)} = \varphi^\alpha(p_1); \qquad x_\alpha^{(2)} = \varphi^\alpha(p_2) \tag{38,02}$$

erfüllt sein. Da die Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit erfolgt, muß für jedes infinitesimale Intervall

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,\dot\varphi^\alpha\,\dot\varphi^\beta\,dp^2 > 0 \tag{38,03}$$

gelten, wobei der Punkt über φ^α die Ableitung von φ^α nach dem Parameter p bedeutet. Bezeichnen wir mit $s = c\tau$ ein endliches Intervall zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen, das der verstrichenen Eigenzeit τ proportional ist, so haben wir

$$s = c\tau = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}\,\dot\varphi^\alpha\,\dot\varphi^\beta}\,dp. \tag{38,04}$$

Wir betrachten nun zwei quasi-gleichzeitige Ereignisse. Die Raumpunkte, an denen diese Ereignisse stattfinden, können wir durch eine Kurve verbinden. Jedem Punkt dieser Kurve ordnen wir dann einen bestimmten Zeitpunkt zu (d. h. wir geben für jeden Punkt seine „Zeitgleichung" vor), und zwar derart, daß je zwei benachbarte Raum-Zeit-Punkte auf dieser Kurve zueinander quasi-gleichzeitig liegen. Analytisch kann man die Form der Kurve und die Zeitgleichungen wie bisher durch die Gleichungen (38,01) und (38,02) darstellen. Wir können aber diese Gleichungen nicht mehr in dem Sinne deuten, daß sie die *Bewegung* eines Punktes auf einer Kurve beschreiben, sondern müssen zu einer *statischen* Betrachtung der Kurve als Ganzes übergehen. Für jedes infinitesimal benachbarte Punktepaar auf der Kurve gilt dann

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,\dot\varphi^\alpha\,\dot\varphi^\beta\,dp^2 < 0, \tag{38,05}$$

und das raumartige Intervall

$$l = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-\,g_{\alpha\beta}\,\dot\varphi^\alpha\,\dot\varphi^\beta}\,dp \tag{38,06}$$

kennzeichnet die Länge der Kurve.

Man kann nun nach den Extremalwerten des zeitartigen Intervalls (38,04) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen und denen des raumartigen Intervalls (38,06) zwischen zwei quasi-gleichzeitigen Ereignissen fragen. Das

betreffende Variationsproblem führt für das zeitartige Intervall auf Gleichungen derselben Form wie für das raumartige Intervall. Diese Variationsgleichungen bezeichnet man in Analogie zur Flächentheorie als Gleichungen der geodätischen Linie. Dazu ist jedoch zu bemerken, daß die geodätische Linie in der Flächentheorie (wo das Quadrat des infinitesimalen Abstandes eine positiv definite Form der Koordinatendifferentiale ist) im allgemeinen[1]) die *kürzeste* Verbindung ist. Dagegen entspricht das Extremum des zeitartigen Intervalls einem ***Maximum***, das des raumartigen Intervalls weder einem Maximum noch einem Minimum.

Diese letzte Behauptung läßt sich in dem Spezialfall, daß ds^2 die Form (37,04) hat (GALILEIsche Metrik), leicht beweisen. Bei aufeinanderfolgenden Ereignissen kann man das Bezugssystem so wählen, daß die räumlichen Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes zusammenfallen, und dann als Parameter die Zeit t benutzen. Das ergibt

$$s = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \sqrt{c^2 - v^2}\, dt, \tag{38,07}$$

mit

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{38,08}$$

Das Variationsproblem wird durch konstante Werte von x, y, z gelöst; dann ist $v^2 = 0$. Für jede andere Bahn ist $v^2 > 0$, also $\sqrt{c^2 - v^2} < c$ und folglich

$$s < s_{\max} = c(t^{(2)} - t^{(1)}). \tag{38,09}$$

Für ein raumartiges Intervall kann man das Bezugssystem so wählen, daß die Gleichungen

$$t^{(2)} = t^{(1)}; \quad y^{(2)} = y^{(1)}; \quad z^{(2)} = z^{(1)} \tag{38,10}$$

erfüllt sind, während $x^{(2)} > x^{(1)}$ ist. Benutzen wir als Parameter die Koordinate x, so erhalten wir

$$l = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - c^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{38,11}$$

Die Lösung dieses Variationsproblems ergibt konstante Werte für y, z, und t, und das Intervall berechnet sich zu

$$l_{\text{extr}} = x^{(2)} - x^{(1)}. \tag{38,12}$$

Für andere Kurven $y(x), z(x)$ und für andere Zeitgleichungen $t(x)$ kann aber sowohl $l > l_{\text{extr}}$ als auch $l < l_{\text{extr}}$ ausfallen, je nachdem ob die Quadratwurzel in (38,11) im Mittel größer oder kleiner als Eins ist.

---

[1]) D. h. bei hinreichend nahe benachbarten Anfangs- und Endpunkten.

Wir wollen jetzt die Differentialgleichungen für die geodätische Linie aufstellen. Die LAGRANGE-Funktion unseres Variationsproblems lautet

$$L = \sqrt{g_{\alpha\beta}\, \dot{\varphi}^\alpha\, \dot{\varphi}^\beta} \tag{38,13}$$

oder, wenn wir x_α statt φ^α schreiben,

$$L = \sqrt{g_{\alpha\beta}\, \dot{x}_\alpha\, \dot{x}_\beta}\,. \tag{38,14}$$

Die Bedingung, daß das Integral

$$s = \int_{p_1}^{p_2} L\, dp \tag{38,15}$$

ein Extremum sein soll, führt auf die LAGRANGEschen Gleichungen

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0\,. \tag{38,16}$$

Wenn wir

$$F = \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \dot{x}_\alpha\, \dot{x}_\beta \tag{38,17}$$

setzen, so wird

$$L = \sqrt{2F}\,. \tag{38,18}$$

Wie in § 17 können wir den Parameter p so wählen, daß gilt

$$\frac{dF}{dp} = 0; \quad F = \text{const.} \tag{38,19}$$

Dann sind die Gleichungen (38,16) mit

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{38,20}$$

äquivalent. Diese Gleichungen haben das Integral

$$\dot{x}_\alpha \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} - F = F = \text{const}\,, \tag{38,21}$$

so daß die Bedingung (38,19) eine Folgerung aus (38,21) ist. Rechnen wir die linke Seite von (38,20) aus, so erhalten wir

$$\frac{d}{dp}\,(g_{\alpha\beta}\, \dot{x}_\beta) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\, \dot{x}_\beta\, \dot{x}_\gamma = 0 \tag{38,22}$$

und nach Ausführung der Differentiation

$$g_{\alpha\beta}\,\ddot{x}_\beta + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\,\dot{x}_\beta\,\dot{x}_\gamma - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\,\dot{x}_\beta\,\dot{x}_\gamma = 0\,. \tag{38,23}$$

Den Koeffizienten der Größe $\dot{x}_\beta\,\dot{x}_\gamma$ kann man in den Indizes β und γ symmetrisch machen. Setzt man

$$[\beta\gamma,\alpha] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\right), \tag{38,24}$$

so lauten die Gleichungen für die geodätische Linie

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta + [\beta\gamma,\alpha]\,\dot{x}_\beta\,x_\gamma = 0\,. \tag{38,25}$$

Den Ausdruck (38,24) nennt man CHRISTOFFEL-Symbol erster Art. Um die Gleichungen (38,25) nach den zweiten Ableitungen aufzulösen, multiplizieren wir sie mit $g^{\alpha\nu}$, summieren über α und führen die Bezeichnung

$$\{\beta\gamma,\nu\} = g^{\alpha\nu}[\beta\gamma,\alpha] \tag{38,26}$$

ein. Dann erhalten wir

$$\ddot{x}_\nu + \{\beta\gamma,\nu\}\,\dot{x}_\beta\,\dot{x}_\gamma = 0\,. \tag{38,27}$$

Den Ausdruck (38,26) nennt man CHRISTOFFEL-Symbol zweiter Art. Man benutzt dafür häufig die Bezeichnung

$$\{\beta\gamma,\nu\} = \Gamma^\nu_{\beta\gamma}. \tag{38,28}$$

Der Einheitlichkeit halber kann man auch für das CHRISTOFFEL-Symbol erster Art die analoge Bezeichnung

$$[\alpha\beta,\gamma] = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} \tag{38,29}$$

benutzen, obwohl sie weniger gebräuchlich ist. Es ist also

$$\Gamma_{\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\right), \tag{38,30}$$

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right). \tag{38,31}$$

Mit diesen Bezeichnungen lauten die Gleichungen für die geodätische Linie

$$\frac{d^2 x_\nu}{dp^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\,\frac{dx_\alpha}{dp}\,\frac{dx_\beta}{dp} = 0. \tag{38,32}$$

Ist der Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}$ in der Form (35,15) darstellbar, so sind die mit den entsprechenden CHRISTOFFEL-Symbolen gebildeten Gleichungen (38,32) mit den Gleichungen

$$\frac{d^2 x'_k}{dp^2} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, 3) \tag{38,33}$$

für die GALILEIschen Koordinaten x'_k äquivalent. Das folgt aus der Kovarianz der Gleichungen und aus dem Umstand, daß die CHRISTOFFEL-Symbole in GALILEIschen Koordinaten verschwinden. Die Gleichungen für die geodätische Linie (38,32) entsprechen also im Fall des Fundamentaltensors (35,15) einer linearen Abhängigkeit der GALILEIschen Koordinaten vom Parameter p.

Offensichtlich gelten die Rechnungen, die uns zu den Gleichungen (38,32) führten, unabhängig vom Vorzeichen der Größe F. Ist $F > 0$, so verbindet die „geodätische Linie" zwei aufeinanderfolgende Ereignisse, und die Gleichungen (38,32) lassen sich als Gleichungen für die Bewegung eines freien Massenpunktes mit Unterlichtgeschwindigkeit auffassen. Der Zuwachs dp des Parameters p ist dem Zuwachs $d\tau$ der Eigenzeit τ proportional, so daß man anstelle von (38,32) schreiben kann

$$\frac{d^2 x_\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{d x_\alpha}{d\tau} \frac{d x_\beta}{d\tau} = 0. \tag{38,34}$$

Die Länge der geodätischen Linie liefert das Intervall der Eigenzeit zwischen dem „Abgang" und der „Ankunft" des Massenpunktes. Ist dagegen $F < 0$, so verbindet die „geodätische Linie" zwei quasi-gleichzeitige Ereignisse, und wir können dp dem Zuwachs dl des raumartigen Intervalles proportional setzen. Die Gleichungen (38,32) lauten dann

$$\frac{d^2 x}{dl^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{d x_\alpha}{dl} \frac{d x_\beta}{dl} = 0. \tag{38,35}$$

Dem Fall $F = 0$ entspricht die Bewegung eines Punktes längs eines Lichtstrahls mit Lichtgeschwindigkeit. In diesem Fall ist die LAGRANGE-Funktion (38,18) gleich Null, so daß die oben durchgeführte Ableitung der Gleichungen der geodätischen Linie ihre Beweiskraft verliert. Die Gleichungen (38,32) selbst behalten jedoch auch in diesem Fall ihren Sinn. Da diese Gleichungen das Integral (38,21) besitzen, sind sie auch mit der Bedingung $F = 0$ verträglich. Zu ihrer Begründung kann man von den in § 36 behandelten HAMILTONschen Gleichungen ausgehen. Nach (36,08) lauten diese Gleichungen

$$\frac{d x_k}{d x_0} = \frac{\partial H}{\partial \omega_k}; \quad \frac{d\omega_k}{d x_0} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{38,36}$$

wobei sich die HAMILTON-Funktion $H = -\omega_0$ ergibt, indem man die Gleichung

$$G \equiv g^{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta = 0 \tag{38,37}$$

nach ω_0 auflöst. Es gilt also

$$dH = -d\omega_0 = \frac{1}{\left(\frac{\partial G}{\partial \omega_0}\right)} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} d x_\alpha + \frac{\partial G}{\partial \omega_k} d\omega_k\right). \tag{38,38}$$

Beachten wir, daß

$$\frac{d\omega_0}{dx_0} = -\frac{dH}{dx_0} = -\frac{\partial H}{\partial x_0} \tag{38,39}$$

ist, und drücken die Ableitungen von H durch solche von G aus, so können wir die Gleichungen (38,36) in der symmetrischen Form

$$\frac{dx_\alpha}{dp} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \omega_\alpha}; \quad \frac{d\omega_\alpha}{dp} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{38,40}$$

schreiben, wobei dp als Differential der unabhängigen Variablen p aufgefaßt wird. Die ersten vier Gleichungen (38,40) haben wir schon in § 36 aufgestellt. Schreiben wir die rechten Seiten von (38,40) ausführlicher, so erhalten wir

$$\frac{dx_\alpha}{dp} = g^{\alpha\beta}\,\omega_\beta; \quad \frac{d\omega_\alpha}{dp} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\,\omega_\mu\,\omega_\nu. \tag{38,41}$$

Man findet leicht, daß diese Gleichungen mit (38,32) äquivalent sind. Es gilt nämlich

$$\omega_\mu = g_{\mu\lambda}\frac{dx_\lambda}{dp} \tag{38,42}$$

und folglich

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\,\omega_\mu = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\,g_{\mu\lambda}\frac{dx_\lambda}{dp} = -\,g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\lambda}{dp}. \tag{38,43}$$

Denn es ist

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\,g_{\mu\lambda} + g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,(g^{\mu\nu}\,g_{\mu\lambda}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,(\delta^\nu_\lambda) = 0. \tag{38,44}$$

Setzen wir (38,43) in (38,41) ein, so ergibt sich

$$\frac{d\omega_\alpha}{dp} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\omega_\nu\,\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\lambda}{dp} \tag{38,45}$$

oder, wegen der ersten Gleichungen von (38,41),

$$\frac{d\omega_\alpha}{dp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\lambda}{dp}. \tag{38,46}$$

Ersetzen wir hierin die Größen ω_α durch deren Werte (38,42), so erhalten wir schließlich

$$\frac{d}{dp}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx_\beta}{dp}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\lambda}{dp}. \tag{38,47}$$

Diese Gleichungen sind aber mit (38,22) identisch, woraus wir die Gleichungen für die geodätische Linie in der Form (38,32) erhielten. Der Übergang von (38,41) zu (38,47) entspricht dem bekannten Übergang von den HAMILTONschen zu den

LAGRANGEschen Gleichungen. Wir haben also gezeigt, daß auch eine „geodätische Nullinie" durch die Gleichungen (38,32) beschrieben wird, wenn man zu diesen noch die Bedingung $F = 0$ hinzufügt.

Da die Größe F konstant ist, hat eine geodätische Linie in ihrer ganzen Ausdehnung denselben Charakter: Entweder entspricht sie überall der Bewegung eines Punktes mit Unterlichtgeschwindigkeit, oder sie ist ständig eine Nullinie oder hat schließlich stets raumartigen Charakter.

Für eine geodätische Nullinie kann die Beziehung (38,37), in der $\omega_\alpha = \dfrac{\partial \omega}{\partial x_\alpha}$ ist, als HAMILTON-JACOBIsche Gleichung für eine Wirkungsfunktion ω aufgefaßt werden (vgl. § 36). Auch im allgemeinen Fall kann man die HAMILTON-JACOBIsche Gleichung leicht ableiten. Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, betrachten wir einen Punkt, der sich mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt. Wählen wir als Parameter die Zeit $t = x_0$ und bezeichnen die Differentiation nach t mit einem Punkt, so können wir die LAGRANGE-Funktion unseres Problems[1]) folgendermaßen schreiben:

$$L = +\sqrt{g_{00} + 2 g_{0i}\, \dot{x}_i + g_{ik}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_k}. \tag{38,48}$$

Die verallgemeinerten Impulse lauten dann

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_i = +\frac{1}{L}\,(g_{0i} + g_{ik}\, \dot{x}_k), \tag{38,49}$$

und für die HAMILTON-Funktion findet man nach der bekannten Regel

$$H = \dot{x}_i\, p_i - L = -\frac{1}{L}\,(g_{00} + g_{0k}\, \dot{x}_k). \tag{38,50}$$

Darin sind die Geschwindigkeiten $\dot{x}_k$ mit Hilfe von (38,49) durch die p_i auszudrücken.

Setzen wir

$$p_0 = \frac{1}{L}\,(g_{00} + g_{0k}\, \dot{x}_k) \tag{38,51}$$

und beachten, daß gilt

$$L\,dt = ds, \tag{38,52}$$

wobei s die Bogenlänge ist, so können wir die vier Größen p_i, p_0 in der einheitlichen Form

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\, \frac{d x_\beta}{d s} \tag{38,53}$$

schreiben. Aus der Identität

$$g_{\alpha\beta}\, \frac{d x_\alpha}{d s}\, \frac{d x_\beta}{d s} = 1 \tag{38,54}$$

[1]) Wir verwenden hier die LAGRANGE-Funktion mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie in der Mechanik, so daß die Energie gleich dem Negativen der HAMILTON-Funktion H ist.

ergibt sich dann die Beziehung

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 1\,, \tag{38,55}$$

die als Ergebnis der Elimination der drei Geschwindigkeiten $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ aus den vier Gleichungen (38,49) und (38,51) aufgefaßt werden kann. Die HAMILTON-Funktion $H = -p_0$ erhält man dann, indem man die Gleichung (38,55) nach p_0 auflöst. Nach der allgemeinen Regel findet man die HAMILTON-JACOBIsche Gleichung, wenn man die Größen H, p_1, p_2, p_3 durch die partiellen Ableitungen einer Wirkungsfunktion S nach der Zeit und nach den Koordinaten in der Form

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}\,; \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k} \tag{38,56}$$

ausdrückt. Dafür kann man auch schreiben

$$p_\nu = \frac{\partial S}{\partial x_\nu}\,. \tag{38,57}$$

Die Gleichungen der geodätischen Linie lauten also in der HAMILTON-JACOBIschen Form

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x_\mu} \frac{\partial S}{\partial x_\nu} = 1\,. \tag{38,58}$$

Kennt man ein vollständiges Integral der HAMILTON-JACOBIschen Gleichung

$$S = S(x_0, x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) + c_0\,, \tag{38,59}$$

welches drei willkürliche Konstanten c_1, c_2, c_3 (abgesehen von der additiven Konstante c_0) enthält, so sind, wie in der Mechanik bewiesen wird, die Ableitungen von S nach diesen Konstanten ebenfalls konstant:

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = b_k \qquad (k = 1, 2, 3)\,. \tag{38,60}$$

Die Konstanten b_k werden dann aus den Bedingungen des Problems bestimmt.

Wie man durch Vergleich von (38,48) mit (38,37) erkennt, ergibt sich die Gleichung der geodätischen Nullinie, wenn man die rechte Seite von (38,58) durch Null ersetzt. Bei einer raumartigen geodätischen Linie ist die rechte Seite der HAMILTON-JACOBIschen Gleichung eine negative Konstante, die man gleich -1 setzen kann.

§ 39 Die Parallelübertragung eines Vektors

Im euklidischen Raum läßt sich die Gleichheit und Parallelität zweier Vektoren, die sich auf verschiedene Punkte beziehen, sehr einfach kennzeichnen: Zwei Vektoren sind gleich und parallel, wenn ihre kartesischen Komponenten gleich sind. Dieselbe Definition gilt offenbar für Vektoren in einer Ebene. Sie läßt sich unmittelbar auch für eine gekrümmte Fläche verallgemeinern, die auf

eine Ebene abwickelbar ist. Handelt es sich dagegen um eine beliebige (nicht abwickelbare) Fläche, so kann die Parallelität zweier in ihr liegender Vektoren nur dann definiert werden, wenn die Bezugspunkte dieser Vektoren infinitesimal benachbart sind. Einen Vektor in einer Fläche können wir als einen Raumvektor ansehen, der diese Fläche in seinem Bezugspunkt tangiert. Ist ein Flächenvektor im Punkt P gegeben, so läßt sich ein dazu (im Sinne der Flächengeometrie) paralleler Vektor in dem infinitesimal benachbarten Punkt Q folgendermaßen konstruieren: Den gegebenen Vektor in P betrachten wir als einen Raumvektor und konstruieren im Punkt Q einen dazu im üblichen Sinn parallelen Raumvektor, den wir dann auf diejenige Ebene projizieren, welche die Fläche im Punkt Q tangiert. Diesen Tangentenvektor in Q sehen wir als parallel zum gegebenen Vektor in P an.

Analytisch läßt sich diese Konstruktion folgendermaßen durchführen. Es seien y_1, y_2, y_3 die kartesischen Koordinaten im euklidischen Raum und x_1, x_2 die GAUSSschen Flächenparameter. Dann lautet die Parametersdarstellung der Fläche

$$y_1 = y_1(x_1, x_2); \quad y_2 = y_2(x_1, x_2); \quad y_3 = y_3(x_1, x_2), \tag{39,01}$$

und das Quadrat des Bogenelements auf der Fläche ist gleich

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2. \tag{39,02}$$

Dabei gilt

$$g_{ik} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}. \tag{39,03}$$

Nun seien A_1, A_2 die kovarianten und A^1, A^2 die kontravarianten Komponenten eines Flächenvektors im Punkt P (x_1, x_2). Diesen können wir auch als Raumvektor mit den rechtwinkligen Komponenten

$$Y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} A^1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} A^2 \qquad (n = 1, 2, 3) \tag{39,04}$$

auffassen, wobei gilt

$$A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \frac{\partial y_n}{\partial x_l} \qquad (l = 1, 2). \tag{39,05}$$

Wenn wir nun zu dem Punkt $Q(x_1 + dx_1, \; x_2 + dx_2)$ übergehen und dabei die rechtwinkligen Komponenten Y_n nicht ändern, so erhalten wir einen Raumvektor, der die Fläche nicht mehr tangiert. Seine Tangentialkomponenten bestimmen aber in der Fläche den Vektor

$$A_l + \delta A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k\,\partial x_l}\,\delta x_k\right), \tag{39,06}$$

den wir definitionsgemäß als das Ergebnis der Parallelübertragung (im Sinne der Flächengeometrie) des Vektors A_l zum Punkt Q betrachten. Die Normalkom-

ponente von Y_n hat offenbar auf den Wert des Ausdruckes (39,06) keinen Einfluß.

In der Formel (39,06) gibt das Zusatzglied zu $\frac{\partial y_n}{\partial x_l}$ die Änderung dieser Größe beim Übergang von P nach Q an. Dieses Zusatzglied bewirkt es, daß die Komponente A_l den Zuwachs

$$\delta A_l = \sum_{n=1}^{3} Y_n \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} \delta x_k \tag{39,07}$$

erfährt. Setzen wir darin für Y_n den Ausdruck (39,04) ein, so erhalten wir

$$\delta A_l = \sum_{i,k=1}^{2} A^i \delta x_k \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l}. \tag{39,08}$$

Mit Hilfe des Ausdrucks (39,03) für g_{ik} findet man leicht für die Summe über n in (39,08) den Wert

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} \right) \tag{39,09}$$

oder, unter Benutzung der Bezeichnung (38,30) für die CHRISTOFFEL-Symbole,

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} = \Gamma_{i,kl}. \tag{39,10}$$

Der Zuwachs der Komponenten eines Vektors bei einer Parallelübertragung beträgt also

$$\delta A_l = \sum_{i,k=1}^{2} \Gamma_{i,kl} A^i \delta x_k. \tag{39,11}$$

Dabei ist wesentlich, daß dieser Zuwachs nur von den inneren Eigenschaften der Fläche abhängt, die durch den Ausdruck (39,02) für ds^2 festgelegt werden.

Die Theorie der Parallelübertragung von Vektoren, die in den Arbeiten von LEVI-CIVITA [16] und seinen Schülern entwickelt wurde, läßt sich nahezu ungeändert auch in einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum formulieren.

Die Koeffizienten der quadratischen Form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{39,12}$$

lassen sich immer folgendermaßen darstellen

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial y_n}{\partial x_\beta}. \tag{39,13}$$

Dabei sind die Zahlen e_n gleich ± 1, und die

$$y_n = y_n(x_0, x_1, x_2, x_3) \tag{39,14}$$

sind gewisse Funktionen. In der gewöhnlichen Relativitätstheorie ergeben sich die Größen $g_{\alpha\beta}$ aus der quadratischen Form (35,09) und lassen sich in der Form (35,15) darstellen, was dem Fall $N = 4$ entspricht. Im allgemeinsten Fall hat man 10 Größen $g_{\alpha\beta}$; zu deren Darstellung in der Form (39,13) benötigt man höchstens 10 Funktionen y_n (was sich auch streng beweisen läßt). Da die quadratische Form (39,12) die Signatur $(+ - - -)$ besitzt, müssen sich unter den Zahlen e_n mindestens eine positive und nicht weniger als drei negative befinden.

Die Größen y_n können wir formal als kartesische Koordinaten in einem mehrdimensionalen, pseudoeuklidischen Raum auffassen, dessen Metrik durch den Ausdruck

$$d\eta^2 = \sum_{n=1}^{N} e_n \, d y_n^2 \tag{39,15}$$

definiert ist; unsere Raum-Zeit wäre dann eine Hyperfläche in diesem mehrdimensionalen Raum.

Einem kontravarianten Vektor A^α in der Raum-Zeit entspricht in dem mehrdimensionalen Raum ein Vektor, der die Hyperfläche (39,14) tangiert und dessen kartesische Komponenten lauten

$$Y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} A^\alpha \tag{39,16}$$

(hier erstreckt sich die Summation über griechische Indizes von 0 bis 3). Daraus erhalten wir auf Grund von (39,13) folgende Ausdrücke für die kovarianten Komponenten des Vektors A_α:

$$A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n \, Y_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha}. \tag{39,17}$$

Die Komponenten des Vektors A_α nach seiner Parallelübertragung in einen infinitesimal benachbarten Punkt können wir analog zu (39,06) durch den Ausdruck

$$A_\alpha + \delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n \, Y_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \delta x_\beta \right) \tag{39,18}$$

bestimmen. Daraus folgt

$$\delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n \, Y_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \delta x_\beta \tag{39,19}$$

und, wenn wir für Y_n den Ausdruck (39,16) einsetzen,

$$\delta A_\alpha = \sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} A^\gamma \delta x_\beta. \tag{39,20}$$

Aus (39,13) ergibt sich aber, analog zu (39,10),

$$\sum_{n=1}^{N} e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta}, \tag{39,21}$$

wobei die $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$ die gewöhnlichen CHRISTOFFEL-Symbole

$$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right) \tag{39,22}$$

sind. Wir erhalten somit den folgenden Ausdruck für den Zuwachs der Vektorkomponenten bei einer Parallelübertragung

$$\delta A_\alpha = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} A^\gamma \delta x_\beta. \tag{39,23}$$

Dieser Ausdruck ist derselbe wie bei einer gewöhnlichen Fläche im euklidischen Raum.

Die Formel (39,23) enthält sowohl kovariante als auch kontravariante Vektorkomponenten; es ist aber nicht schwierig, beide Seiten dieser Gleichung durch Komponenten einer Art auszudrücken. Wir haben

$$A^\gamma = g^{\nu\gamma} A_\nu, \tag{39,24}$$

$$g^{\nu\gamma}\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{39,25}$$

Infolgedessen ist

$$\delta A_\alpha = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A_\nu \delta x_\beta. \tag{39,26}$$

Darin kommen nur kovariante Komponenten vor. Andererseits gilt

$$\delta A_\alpha = g_{\alpha\gamma}\delta A^\gamma + A^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}\delta x_\beta = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} A^\gamma \delta x_\beta \tag{39,27}$$

und, wie man leicht nachprüft,

$$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}. \tag{39,28}$$

Daraus folgt

$$g_{\alpha\gamma}\delta A^\gamma = -\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} A^\gamma \delta x_\beta. \tag{39,29}$$

Die Formel für die kontravarianten Komponenten lautet also

$$\delta A^\nu = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x_\beta. \tag{39,30}$$

Wir betrachten nun die Änderung des Skalarprodukts zweier Vektoren bei einer Parallelübertragung. Es ist

$$\delta(A^\nu B_\nu) = B_\nu \delta A^\nu + A^\alpha \delta B_\alpha. \tag{39,31}$$

Setzen wir hierin für δA^ν den Ausdruck (39,30) ein und schreiben, gemäß (39,26), δB_α in der Form

$$\delta B_\alpha = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} B_\nu \delta x_\beta, \tag{39,32}$$

so sehen wir, daß sich die beiden Terme in (39,31) gegeneinander aufheben, und man erhält

$$\delta(A^\nu B_\nu) = 0. \tag{39,33}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ändert sich also bei einer Parallelübertragung nicht. Insbesondere bleibt dabei auch der Absolutbetrag eines Vektors ungeändert.

Bisher haben wir infinitesimale Übertragungen, d. h. Verschiebungen betrachtet. Indem wir sie aufsummieren, können wir aber auch eine Parallelübertragung längs einer beliebig vorgegebenen Kurve definieren. Die Koordinaten der Punkte auf der Kurve seien als Funktionen eines Parameters p vorgegeben:

$$x_\beta = x_\beta(p). \tag{39,34}$$

Die Größen $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ (die Funktionen der Koordinaten sind) sind dann auch bekannte Funktionen von p. Zur Bestimmung des Vektors A^ν als Funktion von p haben wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dA^\nu}{dp} = - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{dx_\beta}{dp}. \tag{39,35}$$

Sind die Werte von A^ν in dem Anfangspunkt der Kurve vorgegeben, so erhalten wir durch Integration der Gleichungen (39,35) die Werte von A^ν auch in dem Endpunkt der Kurve. Damit haben wir die Parallelübertragung des Vektors A^ν aus dem Anfangs- nach dem Endpunkt durchgeführt. Das Ergebnis hängt offensichtlich von der Gestalt der Kurve ab, längs deren die Übertragung erfolgt.

Wir vergleichen nun die Gleichungen (39,35) für die Parallelübertragung mit denen für die geodätische Linie

$$\frac{d^2 x_\nu}{dp^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{dp} \frac{dx_\beta}{dp} = 0. \tag{38,32}$$

Beide Gleichungen stimmen überein, wenn wir setzen

$$A^\nu = \frac{dx_\nu}{dp}. \tag{39,36}$$

Ist die geodätische Linie zeitartig (d. h. entspricht sie der Bewegung eines Punktes mit Unterlichtgeschwindigkeit), so kann man als Parameter p die Eigenzeit τ verwenden, und der Vektor A^ν stimmt dann mit der Vierergeschwindigkeit überein. In diesem Fall kann man also die Gleichungen der geodätischen Linie als Gleichungen für die Parallelübertragung des Geschwindigkeitsvektors in der durch ihn selbst gegebenen Richtung (im vierdimensionalen Sinn) deuten.

Aus den Gleichungen für die Parallelübertragung eines Vektors erhält man leicht die entsprechenden Gleichungen für einen Tensor beliebiger Stufe. Als Beispiel betrachten wir den Fall eines kovarianten Tensors zweiter Stufe $T_{\mu\nu}$. Wir gehen von der Forderung aus, daß sich die Invariante

$$I = T_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \tag{39,37}$$

bei einer Parallelübertragung nicht ändern soll, unabhängig von der Wahl der Vektoren A^μ und B^ν. Die Größe δI läßt sich, wenn man die Bezeichnung der Indizes in einigen Termen ändert, folgendermaßen schreiben:

$$\delta I = A^\mu B^\nu (\delta T_{\mu\nu} - T_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \delta x_\beta - T_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \delta x_\beta). \tag{39,38}$$

Da dieser Ausdruck für alle A^μ und B^ν verschwinden muß, so muß gelten

$$\delta T_{\mu\nu} = T_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \delta x_\beta + T_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \delta x_\beta. \tag{39,39}$$

Das ist die gesuchte Verallgemeinerung der Gleichungen für die Parallelübertragung.

§ 40 Die kovariante Differentiation

Im Falle konstanter $g_{\mu\nu}$ konnte man die Differentiation nach einer Koordinate in gewissem Sinne als Multiplikation mit einem Vektor auffassen. Ist A_ν ein Vektor, der in einem bestimmten Gebiet als Ortsfunktion vorgegeben ist, so ist bei konstanten $g_{\mu\nu}$ der Ausdruck $\nabla_\mu A_\nu = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$ ein Tensor mit den gleichen Transformationseigenschaften wie das Produkt der Vektoren ∇_μ und A_ν. In diesem Fall unterscheidet sich daher die Tensoranalysis in formaler Hinsicht nicht von der Tensoralgebra.

Sind dagegen die $g_{\mu\nu}$ variabel, so ist das nicht mehr der Fall. Die Ableitung eines Vektors nach einer Koordinate ist dann kein Tensor mehr. Aber auch dann kann man Linearkombinationen aus den Komponenten des Vektors und deren Ableitungen derart bilden, daß sie sich wie Tensorkomponenten transformieren.

Wir betrachten einen Vektor A_ν, der in einem bestimmten Gebiet als Ortsfunktion vorgegeben ist. Seine Komponenten sind Funktionen der Koordinaten. Beim Übergang vom Punkt $P(x_\beta)$ zu dem infinitesimal benachbarten Punkt $Q\,(x_\beta + \delta x_\beta)$ ändert sich dieser Vektor um

$$(A_\nu)_Q - (A_\nu)_P = \delta_1 A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta} \delta x_\beta. \tag{40,01}$$

Wir können aber den Wert $(A_\nu)_Q$ des Vektors A_ν im Punkt Q statt mit seinem Wert im Punkt P auch mit dem Ergebnis $(A_\nu)''_Q$ seiner Parallelübertragung von P nach Q vergleichen. Nach (39,26) beträgt die Änderung des Vektors bei der Parallelübertragung

$$(A_\nu)''_Q - (A_\nu)_P = \delta_2 A_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\beta} A_\mu \delta x_\beta. \tag{40,02}$$

Subtrahieren wir diesen Ausdruck vom vorhergehenden, bilden wir also die Differenz

$$(A_\nu)_Q - (A_\nu)''_Q = \delta A_\nu = \delta_1 A_\nu - \delta_2 A_\nu, \tag{40,03}$$

so erhalten wir

$$\delta A_\nu = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\mu_{\nu\beta} A_\mu\right) \delta x_\beta. \tag{40,04}$$

Die Größe δA_ν ist die Differenz zwischen der tatsächlichen Änderung des Vektors A_ν und derjenigen, welche er bei einer Parallelübertragung erleiden würde. Andererseits ist diese Größe aber auch die Differenz zweier Vektoren $(A_\nu)_Q$ und $(A_\nu)''_Q$, die sich auf den gleichen Punkt Q beziehen. Deshalb ist δA_ν ein Vektor. Bei beliebigen δx_β kann dies aber nur dann der Fall sein, wenn die Größe

$$\nabla_\beta A_\alpha \equiv \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A_\nu \tag{40,05}$$

ein kovarianter Tensor zweiter Stufe ist.[1]) Diese Größe bezeichnet man als tensorielle oder kovariante Ableitung. Sie bildet die gesuchte Verallgemeinerung der gewöhnlichen Ableitung eines Vektors auf den Fall variabler $g_{\mu\nu}$.

Durch analoge Überlegungen findet man den Ausdruck für die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors. Er hat die Form

$$\nabla_\beta A^\nu \equiv \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\beta} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\alpha. \tag{40,06}$$

Die Formeln für die kovarianten Ableitungen lassen sich leicht für einen beliebigen Tensor verallgemeinern. Zunächst betrachten wir den Tensor zweiter Stufe $T_{\mu\nu}$. Nach (39,39) beträgt die Änderung seiner Komponenten bei einer Parallelübertragung von P nach Q

$$\delta_2 T_{\mu\nu} = \left(\Gamma^\alpha_{\mu\beta} T_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} T_{\mu\alpha}\right) \delta x_\beta. \tag{40,07}$$

Wenn die Komponenten $T_{\mu\nu}$ Funktionen der Koordinaten sind, so beträgt ihre Änderung beim Übergang von P nach Q

$$\delta_1 T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \delta x_\beta. \tag{40,08}$$

Die Differenz

$$\delta T_{\mu\nu} = \delta_1 T_{\mu\nu} - \delta_2 T_{\mu\nu}, \tag{40,09}$$

welche den Wert

$$\delta T_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \Gamma^\varrho_{\mu\beta} T_{\varrho\nu} - \Gamma^\varrho_{\nu\beta} T_{\mu\varrho}\right) \delta x_\beta \tag{40,10}$$

hat, ist bei beliebigen Werten der Verschiebungen δx_β ein Tensor. Infolgedessen müssen auch die Größen

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \Gamma^\varrho_{\mu\beta} T_{\varrho\nu} - \Gamma^\varrho_{\nu\beta} T_{\mu\varrho} \tag{40,11}$$

einen Tensor bilden.

---

[1]) Der Tensorcharakter von (40,05) läßt sich auch ohne den Begriff der Parallelübertragung beweisen. Zu diesem Zweck prüft man zunächst durch direkte Rechnung, ausgehend von (37,06), das Transformationsgesetz (42,04) für die CHRISTOFFEL-Symbole nach. Dann transformiert man den Ausdruck (40,05) auf neue Variable, wobei man die Transformationsgesetze für die Vektorkomponenten und für die CHRISTOFFEL-Symbole benutzt.

Analog beweist man den Tensorcharakter der Größen

$$\nabla_\beta T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \Gamma^\mu_{\varrho\beta} T^{\varrho\nu} + \Gamma^\nu_{\varrho\beta} T^{\mu\varrho}, \tag{40,12}$$

wobei $T^{\mu\nu}$ ein kontravarianter Tensor ist, sowie der Größen

$$\nabla_\beta T^\mu_\nu = \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\varrho_{\beta\nu} T^\mu_\varrho + \Gamma^\mu_{\varrho\beta} T^\varrho_\nu, \tag{40,13}$$

wobei T^μ_ν ein gemischter Tensor ist.

Wenn man die Bildungsregel für die kovariante Ableitung auf die kovarianten oder kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors anwendet, so findet man für die Ausdrücke (40,11) und (40,12) den Wert Null. Das Verschwinden der kovarianten Ableitung des Fundamentaltensors bezeichnet man als den Hilfssatz von RICCI. Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes wollen wir die entsprechenden Formeln genauer betrachten.

Für $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ ist die Größe (40,11) gleich

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - g_{\varrho\nu} \Gamma^\varrho_{\mu\beta} - g_{\mu\varrho} \Gamma^\varrho_{\nu\beta} = 0. \tag{40,14}$$

Schreibt man diese Formel nämlich in der Form

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} = \Gamma_{\nu,\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\nu\beta}, \tag{40,15}$$

so erkennt man mit Hilfe der Definition (39,22) für die Größen $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$, daß sie eine Identität darstellt [die Formel (40,15) stimmt mit (39,28) überein]. Setzen wir in (40,12) $T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, so ergibt sich

$$\nabla_\beta g^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\varrho\nu} \Gamma^\mu_{\varrho\beta} + g^{\mu\varrho} \Gamma^\nu_{\varrho\beta} = 0. \tag{40,16}$$

Zur Nachprüfung dieser Beziehung genügt es, den expliziten Ausdruck (38,31) für $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ zu benutzen. Dann reduziert sich (40,16) auf

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{40,17}$$

Diese Gleichung ist aber mit

$$g_{\nu\alpha} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} (g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha}) = 0 \tag{40,18}$$

äquivalent. Für $T^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ schließlich verschwindet der Ausdruck (40,13) wegen der Symmetrie der Größen $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ in den unteren Indizes.

Die kovariante Differentiation eines Produkts zweier Tensoren gehorcht den gleichen Regeln wie die gewöhnliche Differentiation. Das folgt unmittelbar aus unserer Herleitung des Ausdrucks für die kovariante Ableitung: Dieser Ausdruck ergibt sich nämlich aus dem für einen infinitesimalen Zuwachs; für den letzten gilt aber dieselbe Regel wie für das Differential.

Wir wollen nun die Differentiationsregel für ein Produkt am Beispiel eines Produkts zweier Vektoren nachprüfen. Setzen wir in der Formel (40,11)

$$T_{\mu\nu} = U_\mu V_\nu, \tag{40,19}$$

so erhalten wir

$$\nabla_\beta (U_\mu V_\nu) = \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\varrho_{\mu\beta} U_\varrho\right) V_\nu + U_\mu \left(\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\varrho_{\nu\beta} V_\varrho\right) \tag{40,20}$$

und wegen (40,05)

$$\nabla_\beta (U_\mu V_\nu) = (\nabla_\beta U_\mu) \cdot V_\nu + U_\mu (\nabla_\beta V_\nu). \tag{40,21}$$

Wendet man die Differentiationsregel für ein Produkt auf den Ausdruck

$$U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu \tag{40,22}$$

an und benutzt die Tatsache, daß die kovariante Ableitung des Fundamentaltensors verschwindet, so erhält man

$$\nabla_\beta U_\mu = g_{\mu\nu} \nabla_\beta U^\nu. \tag{40,23}$$

Bei der kovarianten Differentiation verhalten sich also die Größen $g_{\mu\nu}$ wie Konstanten und können daher vor das Zeichen der kovarianten Ableitung gezogen werden. Mit anderen Worten, es ist bei der kovarianten Differentiation gleichgültig, ob die Indizes vor oder nach Bildung der Ableitung gesenkt (oder gehoben) werden.

Wir haben oben die Ausdrücke für die kovariante Ableitung eines Vektors und eines Tensors zweiter Stufe explizite hingeschrieben. Die kovariante Ableitung eines Skalars Φ stimmt mit der gewöhnlichen Ableitung überein:

$$\nabla_\beta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\beta}. \tag{40,24}$$

Sie bildet, wie wir wissen, einen kovarianten Vektor.

Der Vollständigkeit halber wollen wir auch den allgemeinen Ausdruck für die kovariante Ableitung eines Tensors beliebiger Stufe

$$U^{(\mu)}_{(\nu)} = U^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_k} \tag{40,25}$$

mit m kontravarianten und k kovarianten Indizes aufschreiben. Wir haben

$$\begin{aligned} \nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(U^{(\mu)}_{(\nu)}\right) + \Gamma^{\mu_1}_{\varrho\beta} U^{\varrho\mu_2\ldots\mu_m}_{(\nu)} + \ldots + \Gamma^{\mu_m}_{\varrho\beta} U^{\mu_1\ldots\mu_{m-1}\varrho}_{(\nu)} - \\ - \Gamma^\varrho_{\beta\nu_1} U^{(\mu)}_{\varrho\nu_2\ldots\nu_k} - \cdots - \Gamma^\varrho_{\beta\nu_k} U^{(\mu)}_{\nu_1\ldots\nu_{k-1}\varrho}. \end{aligned} \tag{40,26}$$

Hierbei geht in jedem Summanden einer der Indizes des differenzierten Tensors in einen Index vom gleichen Varianzcharakter des Koeffizienten Γ über, und in dem Tensor selbst wird er durch einen Summationsindex ersetzt, der auch als Index von Γ, aber mit dem entgegengesetzten Varianzcharakter auftritt. Einer der unteren Indizes von Γ gibt stets die Nummer der Koordinate an, nach der differenziert wird. Hierbei treten diejenigen Glieder, in denen sich ein oberer Tensorindex ändert, mit dem Plus-Zeichen, die Glieder, in denen sich ein unterer Tensorindex ändert, mit dem Minus-Zeichen auf.

Manchmal ist es zweckmäßig, eine besondere Bezeichnung für die Operation der kovarianten Differentiation, die mit einer Hebung des entsprechenden Indexes verbunden ist, einzuführen. Die Operation

$$\nabla^\alpha = g^{\alpha\beta}\, \nabla_\beta \tag{40,27}$$

bezeichnet man als kontravariante Differentiation.

§ 41 Beispiele für die Bildung kovarianter Ableitungen

Wir wollen nun die gewonnenen Regeln für die kovariante Differentiation auf einige Spezialfälle anwenden.

Zunächst bilden wir die Divergenz eines Vektors. Nach (40,06) ist der Ausdruck

$$\nabla_\mu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} A^\alpha \tag{41,01}$$

ein gemischter Tensor zweiter Stufe. Verjüngen wir ihn nach den Indizes μ und ν, so erhalten wir den Skalar

$$\operatorname{Div} A \equiv \nabla_\nu A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\nu} A^\alpha, \tag{41,02}$$

der die Verallgemeinerung des Ausdrucks (21,24) für die Viererdivergenz darstellt. Diesen Ausdruck kann man noch vereinfachen. Es gilt

$$\Gamma^\nu_{\alpha\nu} = g^{\mu\nu}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}\right) = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41,03}$$

Nun ist g die aus den $g_{\mu\nu}$ gebildete Determinante und $g g^{\mu\nu}$ die zu dem Element $g_{\mu\nu}$ gehörige Unterdeterminante von g; dann gilt nach der Differentiationsregel für Determinanten

$$dg = g g^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu}. \tag{41,04}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = g^{\mu\nu}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41,05}$$

Wegen (40,18) können wir dafür auch schreiben

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}. \tag{41,06}$$

Es ist also

$$\Gamma^\nu_{\alpha\nu} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\lg\sqrt{-g}\,. \tag{41,07}$$

Setzen wir dies in (41,02) ein, so ergibt sich

$$\nabla_\nu A^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,A^\nu). \tag{41,08}$$

Die mit $\sqrt{-g}$ multiplizierte Divergenz eines Vektors A ist also der Summe der partiellen Ableitungen nach den Koordinaten seiner mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten kontravarianten Komponenten gleich.

Wählen wir als Vektor A den Gradienten eines Skalars φ, d. h. setzen wir

$$A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \tag{41,09}$$

und folglich

$$A^\nu = g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}, \tag{41,10}$$

so liefert die Divergenz dieses Vektors den invarianten Ausdruck

$$\Box\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right), \tag{41,11}$$

der eine Verallgemeinerung des D'ALEMBERT-Operators (21,27) darstellt.

Andererseits können wir die Divergenz dieses Vektors auch folgendermaßen berechnen. Zunächst bilden wir die kovariante Ableitung des Gradienten von φ. Nach der allgemeinen Regel (40,05) erhalten wir den Ausdruck

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}, \tag{41,12}$$

der in den Indizes μ und ν symmetrisch ist. Man kann ihn als die zweite kovariante Ableitung des Skalars φ bezeichnen. Wir bilden nun die Invariante

$$\Box\varphi = g^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} \tag{41,13}$$

und erhalten

$$\Box\varphi = g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}, \tag{41,14}$$

wobei wir zur Abkürzung gesetzt haben

$$\Gamma^{\alpha} = g^{\mu\nu}\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{41,15}$$

Da die beiden Ausdrücke (41,11) und (41,14) die Divergenz des gleichen Vektors darstellen, müssen sie übereinstimmen. Die Übereinstimmung der Koeffizienten der zweiten Ableitungen von φ ist unmittelbar einzusehen. Setzen wir auch die Koeffizienten der ersten Ableitungen einander gleich, so erhalten wir die Identität

$$\Gamma^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\right), \tag{41,16}$$

die man auch unmittelbar beweisen kann.

Es sei noch bemerkt, daß $\Gamma^{\alpha} = 0$ wird, falls wir als Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 vier Lösungen der Gleichung $\Box\varphi = 0$ einführen. Solche Koordinaten, die außerdem noch gewissen Bedingungen im Unendlichen genügen müssen, von denen im nächsten Kapitel die Rede sein soll, bezeichnen wir als harmonisch. In der gewöhnlichen Relativitätstheorie sind die kartesischen Koordinaten und die Zeit harmonische Koordinaten.

Ist ein Vektor A_{μ} der Gradient eines Skalars, so verschwindet für ihn die Differenz der kovarianten Ableitungen $\nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}$. Im allgemeinen Fall jedoch verschwindet diese Differenz nicht, und man kann sie als vierdimensionale Verallgemeinerung der Rotation eines gegebenen Vektors auffassen. Wir setzen [1])

$$(\mathrm{Rot}\, A)_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}. \tag{41,17}$$

Dieser Ausdruck ist definitionsgemäß ein antisymmetrischer, kovarianter Tensor zweiter Stufe. Mit Hilfe der Formel (40,05) erkennt man leicht, daß sich bei der Bildung der Differenz (41,17) die Glieder, durch welche sich die kovariante Ableitung von der gewöhnlichen unterscheidet, gerade wegheben. Wir erhalten

$$(\mathrm{Rot}\, A)_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}, \tag{41,18}$$

d. h. einen Ausdruck, der mit dem für die gewöhnliche Rotation übereinstimmt; letzterer ist also auch für beliebige Koordinaten gültig.

Es sei $A_{\mu\nu}$ der symmetrische Anteil der kovarianten Ableitung des Vektors A_{μ}. Wir haben

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\nu} A_{\mu} + \nabla_{\mu} A_{\nu}\right) \tag{41,19}$$

oder, nach Anwendung von (40,05),

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} A_{\alpha}. \tag{41,20}$$

[1]) Das Symbol Rot verwenden wir im Sinne einer vierdimensionalen Verallgemeinerung der gewöhnlichen, dreidimensionalen Rotation, für welche wir das Symbol rot beibehalten.

Mit Hilfe des symmetrischen Tensors $A_{\mu\nu}$ können wir die zweite kovariante Ableitung des Vektors A_μ in symmetrischer Weise definieren, indem wir setzen

$$\nabla_{\mu\nu} A_\sigma = \nabla_\nu A_{\mu\sigma} + \nabla_\mu A_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma A_{\mu\nu}. \tag{41,21}$$

Berechnen wir hier mit Hilfe von (40,11) die Ausdrücke für die tensoriellen Ableitungen, so erhalten wir

$$\nabla_{\mu\nu} A_\sigma = \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - 2\Gamma^\varrho_{\mu\nu} A_{\varrho\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\Gamma^\varrho_{\mu\nu} A_\varrho) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\Gamma^\varrho_{\mu\sigma} A_\varrho) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\Gamma^\varrho_{\nu\sigma} A_\varrho). \tag{41,22}$$

Für die symmetrische zweite tensorielle Ableitung eines kontravarianten Vektors findet man durch Heben des Indexes σ in (41,22)

$$g^{\varrho\sigma} \nabla_{\mu\nu} A_\sigma = \nabla_{\mu\nu} A^\varrho = \frac{\partial^2 A^\varrho}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \Gamma^\varrho_{\mu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\nu} + \\ + \Gamma^\varrho_{\nu\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial A^\varrho}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} A^\alpha. \tag{41,23}$$

Wir betrachten nun die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe, den wir in der kontravarianten Form schreiben wollen. Nach (40,12) gilt

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\varrho\nu} T^{\varrho\nu} + \Gamma^\nu_{\varrho\nu} T^{\mu\varrho}. \tag{41,24}$$

Wenn wir den dritten Term mit Hilfe von (41,07) umformen, so können wir schreiben

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}. \tag{41,25}$$

Setzt man darin $T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ und beachtet, daß die tensorielle Ableitung des Fundamentaltensors gleich Null ist, so erhält man wieder die Identität (41,16). Ist der Tensor $T^{\mu\nu}$ antisymmetrisch, so verschwindet in der Formel (41,25) der letzte Term. Die Divergenz eines antisymmetrischen Tensors reduziert sich also, ebenso wie die eines Vektors, auf eine Summe von Ableitungen nach den Koordinaten. Für einen beliebigen Tensor dagegen ist eine solche Darstellung nicht möglich.

Wir wollen jetzt den Ausdruck für die tensorielle Ableitung eines kovarianten Tensors und die beiden anderen Ausdrücke aufschreiben, die sich daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\sigma F_{\mu\nu} &= \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \Gamma^\varrho_{\mu\sigma} F_{\varrho\nu} - \Gamma^\varrho_{\nu\sigma} F_{\mu\varrho}, \\ \nabla_\mu F_{\nu\sigma} &= \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \Gamma^\varrho_{\nu\mu} F_{\varrho\sigma} - \Gamma^\varrho_{\sigma\mu} F_{\nu\varrho}, \\ \nabla_\nu F_{\sigma\mu} &= \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\varrho_{\sigma\nu} F_{\varrho\mu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu} F_{\sigma\varrho}. \end{aligned}\right| \tag{41,26}$$

Nun nehmen wir an, daß der Tensor $F_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \tag{41,27}$$

Dann gilt

$$\nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{41,28}$$

während die anderen Terme, die keine Ableitungen enthalten, einander paarweise wegheben. Der in allen drei Indizes antisymmetrische Ausdruck

$$F_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} \tag{41,29}$$

bildet also einen Tensor. Diesen antisymmetrischen Tensor dritter Stufe $F_{\mu\nu\sigma}$ nennt man den ***Zyklus*** des gegebenen antisymmetrischen Tensors $F_{\mu\nu}$. Ein ähnlicher Ausdruck ist schon im § 24 aufgetreten.

Der Zyklus eines gegebenen antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe hängt mit der Divergenz des dazu dualen antisymmetrischen Pseudotensors zusammen. Nach (37,67) läßt sich der duale Pseudotensor $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$ durch die Formel

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \tag{41,30}$$

einführen; die explizite Form dieser Gleichung lautet

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{10} &= F_{23}; \quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{20} = F_{31}; \quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{30} = F_{12}, \\ \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{23} &= F_{10}; \quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{31} = F_{20}; \quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{12} = F_{30}. \end{aligned}\right\} \tag{41,31}$$

Weiter läßt sich nach (37,68) auch der zu $F_{\mu\nu\sigma}$ duale Pseudovektor einführen:

$$\overset{*}{F}{}^{\varrho} = \frac{1}{6} E^{\varrho\mu\nu\sigma} F_{\mu\nu\sigma} \tag{41,32}$$

oder explizite

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{0} &= -F_{123}, \\ \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{1} = F_{230}; \quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{2} &= F_{310}; \quad \sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{3} = F_{120}. \end{aligned}\right\} \tag{41,33}$$

Ist nun der Tensor $F_{\mu\nu\sigma}$ der Zyklus von $F_{\mu\nu}$, so gilt

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}\right)}{\partial x_\beta} = \overset{*}{F}{}^{\alpha}, \tag{41,34}$$

d. h. der Pseudovektor $\overset{*}{F}{}^{\alpha}$ ist die Divergenz des Pseudotensors $\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$. Dieses Ergebnis läßt sich auch ohne Übergang zu den Zahlenwerten der Indizes leicht gewinnen, indem man den Umstand benutzt, daß die nach der allgemeinen Regel gebildete tensorielle Ableitung von $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (und ebenso die von $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$) identisch verschwindet.

§ 42 Das Transformationsgesetz für die CHRISTOFFEL-Symbole und das lokal-geodätische Koordinatensystem. Die Bedingung für die Reduzierbarkeit der quadratischen Grundform auf eine solche mit konstanten Koeffizienten

Die tensoriellen Ableitungen unterscheiden sich von den gewöhnlichen durch Terme, die die CHRISTOFFEL-Symbole

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right) \tag{42,01}$$

enthalten. Verschwinden in einem Punkt $x_\varrho = x_\varrho^0$ sämtliche CHRISTOFFEL-Symbole, so stimmen die Ausdrücke für die tensoriellen Ableitungen mit denen für die gewöhnlichen überein. Wir werden zeigen, daß man in der Umgebung jedes Punktes ein Koordinatensystem derart einführen kann, daß in diesem Punkt alle Größen $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ verschwinden. Auf Grund der Relationen (40,14) und (40,16) verschwinden dann in diesem Punkt auch sämtliche Ableitungen des Fundamentaltensors nach den Koordinaten.

Zunächst wollen wir das Transformationsgesetz für die CHRISTOFFEL-Symbole beim Übergang von einem gegebenen Koordinatensystem (x_0, x_1, x_2, x_3) zu einem gewissen anderen System (x_0', x_1', x_2', x_3') aufstellen. Dieses Gesetz könnte man unmittelbar aus der Definition (42,01) der Größen $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ herleiten, indem man das Transformationsgesetz für den Fundamentaltensor benutzt. Einfacher kommt man aber durch folgende Überlegung zum Ziel. Wie wir wissen, bilden die Größen

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \tag{42,02}$$

einen Tensor. Das bedeutet, daß für jede Funktion φ und für jede Koordinatentransformation die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho} = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} - (\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta})' \frac{\partial \varphi}{\partial x_\sigma'} \right\} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} \tag{42,03}$$

gelten, wobei $(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta})'$ die in dem gestrichenen Koordinatensystem gebildeten CHRISTOFFEL-Symbole sind. Setzen wir darin $\varphi = x_\sigma'$, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 x_\sigma'}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\varrho} = -(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta})' \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu}. \tag{42,04}$$

Diese Formel liefert das gesuchte Transformationsgesetz. Das Auftreten des Termes mit der zweiten Ableitung zeigt, daß $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$ kein Tensor ist. Wenn aber die betrachtete Transformation linear ist, so fällt dieser Term fort; folglich verhalten sich die Größen $\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$ gegenüber linearen Transformationen wie ein Tensor.

In einem bestimmten Punkt mögen die Größen $\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$ die Werte $(\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu})_0$ haben. Die Größen $(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta})'$ des gestrichenen Systems werden in diesem Punkt verschwinden, falls die Transformationsformeln für die Koordinaten folgenden Gleichungen genügen:

$$\left(\frac{\partial^2 x_\sigma'}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right)_0 - (\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu})_0 \left(\frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\varrho} \right)_0 = 0. \tag{42,05}$$

Diese Gleichungen werden offensichtlich durch

$$x'_\sigma = x_\sigma - x^0_\sigma + \frac{1}{2} (\Gamma^\sigma_{\mu\nu})_0 (x_\mu - x^0_\mu)(x_\nu - x^0_\nu) \tag{42,06}$$

erfüllt. Für diese Transformation wird

$$\left(\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\varrho}\right)_0 = \delta^\sigma_\varrho . \tag{42,07}$$

Die Komponenten eines beliebigen Tensors haben daher in dem betrachteten Punkt im gestrichenen und im ungestrichenen Koordinatensystem denselben Wert. Insbesondere ändert sich auch der Fundamentaltensor nicht, während seine ersten Ableitungen in dem betreffenden Punkt verschwinden. Diesen Umstand kann man zur Vereinfachung der Rechnung mit Tensoren ausnutzen. Ist nämlich von irgendeinem Ausdruck bekannt, daß er ein Tensor ist und unter der Bedingung $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = 0$ verschwindet, so kann man behaupten, daß der betreffende Ausdruck auch ohne diese Bedingungen gleich Null ist.

Man kann zeigen, daß es möglich ist, durch geeignete Wahl des Koordinatensystems die Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ nicht nur in einem gegebenen Punkt, sondern sogar längs einer gegebenen Kurve zum Verschwinden zu bringen [16].

Ein Koordinatensystem, in dem die Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ in einen gegebenen Punkt verschwinden, nennt man lokal-geodätisch. Diese Bezeichnung hat ihren Grund darin, daß in einem solchen Koordinatensystem die Gleichungen der geodätischen Linie in dem gegebenen Punkt das Verschwinden der zweiten Ableitungen der Koordinaten nach dem Parameter p besagen (in der Umgebung dieses Punktes sind die zweiten Ableitungen kleine Größen von erster Ordnung). Die Koordinaten sind dort also, bis auf Glieder dritter Ordnung, lineare Funktionen des Parameters.

Wir fragen nun, unter welchen Bedingungen ein Koordinatensystem (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) existiert, in dem die CHRISTOFFEL-Symbole nicht nur in einem gegebenen Punkt oder längs einer gegebenen Kurve, sondern in einem endlichen Gebiet verschwinden. Wenn es ein solches Koordinatensystem gibt, muß eine Lösung der Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho} = 0 \tag{42,08}$$

existieren, denn ihnen genügen die Funktionen

$$\varphi = x'_0; \quad \varphi = x'_1; \quad \varphi = x'_2; \quad \varphi = x'_3 . \tag{42,09}$$

Für die Verträglichkeit der Gleichungen (42,08) ist offenbar notwendig, daß die aus den verschiedenen Gleichungen des Systems berechneten Ausdrücke für die dritten Ableitungen übereinstimmen. Wir haben

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\Gamma^\varrho_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\Gamma^\varrho_{\mu\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho}\right). \end{aligned}\right\} \tag{42,10}$$

Da die linken Seiten übereinstimmen, muß dies auch für die rechten Seiten gelten. Setzt man letztere gleich, führt die Differentiation durch und drückt die zweiten Ableitungen durch die ersten aus, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\nu}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho} = 0. \tag{42,11}$$

Diese Gleichungen müssen für $\varphi = x_0'$, $\varphi = x_1'$, $\varphi = x_2'$, $\varphi = x_3'$ erfüllt sein. Da die Determinante

$$D = \frac{\partial\,(x_0', x_1', x_2', x_3')}{\partial\,(x_0, x_1, x_2, x_3)} \tag{42,12}$$

von Null verschieden ist, müssen alle Koeffizienten der $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho}$ in (42,11), d. h. alle Ausdrücke

$$R^{\varrho}_{\mu,\,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\nu}, \tag{42,13}$$

verschwinden.

Wir wollen nun zeigen, daß die Bedingung

$$R^{\varrho}_{\mu,\,\nu\alpha} = 0 \tag{42,14}$$

für die Existenz einer Lösung des Gleichungssystems (42,08) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\varphi_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \tag{42,15}$$

und schreiben das Gleichungssystem (42,08) in der Form

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\,\varphi_\varrho\,. \tag{42,16}$$

Die Werte φ_ν seien nun in dem Punkt mit den Koordinaten x^0_α vorgegeben. Um sie auch in einem beliebigen Punkt x_α zu erhalten, verbinden wir beide Punkte durch irgendeine Kurve

$$x_\alpha = \xi^\alpha\,(p), \tag{42,17}$$

wobei p ein Parameter ist, und betrachten die φ_ν (und auch die $\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$) als Funktionen von p. Zur Bestimmung der φ_ν haben wir dann ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi_\nu}{dp} = \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\,\dot{\xi}^\mu\,\varphi_\varrho\,, \tag{42,18}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach dem Parameter p bedeutet.

Dieses System legt die Werte von φ_ν für den Endpunkt der Kurve eindeutig fest. Nun muß noch gezeigt werden, daß die auf diese Weise gewonnenen Werte

φ_ν nicht von der Form der Kurve zwischen Anfangs- und Endpunkt abhängen. Dazu verbinden wir die beiden Punkte durch eine weitere, der ersten infinitesimal benachbarte Kurve

$$x_\alpha = \xi^\alpha(p) + \delta\xi^\alpha(p), \tag{42,19}$$

wobei $\delta\xi^\alpha$ ein infinitesimaler Vektor ist, der im Anfangs- und im Endpunkt verschwindet. Die Werte der φ_ν auf der abgeänderten Kurve bezeichnen wir mit $\varphi_\nu + \delta\varphi_\nu$. Diese Größen müssen offenbar den folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{d}{dp}(\varphi_\nu + \delta\varphi_\nu) = \left(\Gamma^\varrho_{\mu\nu} + \frac{\partial\Gamma^\varrho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\delta\xi^\alpha\right)(\dot\xi^\mu + \delta\dot\xi^\mu)(\varphi_\varrho + \delta\varphi_\varrho). \tag{42,20}$$

Subtrahieren wir davon die Gleichungen (42,18) und vernachlässigen infinitesimale Größen höherer Ordnung, so ergibt sich

$$\frac{d}{dp}(\delta\varphi_\nu) = \frac{\partial\Gamma^\varrho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\dot\xi^\mu\varphi_\varrho\,\delta\xi^\alpha + \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\dot\xi^\mu\,\delta\varphi_\varrho + \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\varphi_\varrho\,\delta\dot\xi^\mu. \tag{42,21}$$

Benutzen wir nun nochmals (42,18) und führen die Bezeichnung (42,13) ein, so können wir diese Gleichungen schreiben

$$\frac{d}{dp}\left(\delta\varphi_\nu - \Gamma^\varrho_{\alpha\nu}\varphi_\varrho\,\delta\xi^\alpha\right) = R^\varrho_{\nu,\mu\alpha}\varphi_\varrho\,\dot\xi^\mu\,\delta\xi^\alpha + \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\dot\xi^\mu\left(\delta\varphi_\varrho - \Gamma^\sigma_{\alpha\varrho}\varphi_\sigma\,\delta\xi^\alpha\right). \tag{42,22}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\eta_\nu = \delta\varphi_\nu - \Gamma^\varrho_{\alpha\nu}\varphi_\varrho\,\delta\xi^\alpha. \tag{42,23}$$

Unter der Bedingung (42,14) lauten dann die Gleichungen (42,22)

$$\frac{d\eta_\nu}{dp} = \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\dot\xi^\mu\eta_\varrho. \tag{42,24}$$

Die Gleichungen für η_ν haben also dieselbe Form wie die Gleichungen (42,18) für φ_ν (beide beschreiben die Parallelübertragung eines Vektors längs der betrachteten Kurve). Ebenso wie φ_ν sind also die Größen η_ν durch ihre Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt. Nun sind aber die Anfangswerte der η_ν gleich Null. Die Koordinaten des Anfangspunktes sind nämlich festgelegt, so daß dort $\delta\xi^\alpha = 0$ ist. Außerdem liegen aber im Anfangspunkt die Werte φ_ν fest, so daß dort auch $\delta\varphi_\nu = 0$ ist. Im Anfangspunkt ist also wirklich $\eta_\nu = 0$. Unter diesen Anfangsbedingungen muß aber längs der ganzen Kurve gelten

$$\eta_\nu = 0 \tag{42,25}$$

und folglich

$$\delta\varphi_\nu = \Gamma^\varrho_{\alpha\nu}\varphi_\varrho\,\delta\xi^\alpha. \tag{42,26}$$

Betrachten wir nun den Endpunkt der Kurve. Dessen Koordinaten liegen ebenfalls fest; daher gilt für ihn $\delta\xi^\alpha = 0$ und, wegen (42,26), auch $\delta\varphi_\nu = 0$. Das bedeutet aber, daß die Funktion φ_ν im Endpunkt immer mit dem gleichen Wert

ankommt, unabhängig davon, ob die ursprüngliche oder die abgeänderte, infinitesimal benachbarte Kurve benutzt wird. Durch stetige Deformation der Kurve können wir dieses Ergebnis auf zwei beliebige Kurven (die nicht mehr infinitesimal benachbart zu sein brauchen) zwischen den gegebenen Anfangs- und Endpunkten verallgemeinern. Es folgt daraus, daß in jedem einfach-zusammenhängenden Gebiet die Größen φ_ν eindeutige Ortsfunktionen sind, die durch ihre Werte in irgendeinem (Anfangs-) Punkt bestimmt werden.

Auf Grund der Differentialgleichungen (42,16) gilt

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{42,27}$$

da die Größen $\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$ in den unteren Indizes symmetrisch sind. Daraus folgt, daß der Ausdruck

$$d\varphi = \varphi_\nu \, dx_\nu \tag{42,28}$$

ein totales Differential ist. Integrieren wir ihn und legen die Konstante durch den aus dem im Anfangspunkt gegebenen Wert von φ fest, so ist damit die Bestimmung der Funktion φ durchgeführt.

Wir haben bewiesen, daß für die Existenz einer Lösung der Gleichungen (42,08) das Verschwinden des Ausdrucks (42,13) notwendig und hinreichend ist. Dabei ist die Funktion φ durch die für irgendeinen Punkt vorgeschriebenen Werte ihrer partiellen Ableitungen nach den Koordinaten bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt.

Hat man zwei Lösungen der Gleichungen (42,08), φ und ψ (die identisch sein können), so bleibt der Ausdruck

$$\varphi_\nu \psi^\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \tag{42,29}$$

auf Grund dieser Gleichungen konstant. Zum Beweis braucht man nur die kovariante Ableitung des Skalars (42,29) zu bilden und sich zu überzeugen, daß sie gleich Null ist. (Wir erinnern daran, daß die Gleichung (42,16) gerade das Verschwinden der kovarianten Ableitung von φ_ν ausdrückt.)

Es seien x_0', x_1', x_2', x_3' vier Lösungen der Gleichungen (42,08), die so gewählt sind, daß im Anfangspunkt gilt

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} = e_\alpha \, \delta_{\alpha\beta} \tag{42,30}$$

(über α wird hier nicht summiert!). Dann gilt die Gleichung (42,30) auch für alle anderen Punkte, d. h. für beliebige Werte der Koordinaten. Rein algebraisch folgt daraus

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial x_k'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_k'}{\partial x_\beta}, \tag{42,31}$$

d. h. eine Darstellung der $g_{\alpha\beta}$ in der Form (35,15). Damit nimmt ds^2 die Gestalt (35,09) an.

Wir haben also folgendes bewiesen: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die quadratische Form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{42,32}$$

in die Gestalt

$$ds^2 = (dx_0')^2 - (dx_1')^2 - (dx_2')^2 - (dx_3')^2 \tag{42,33}$$

überführen läßt, ist das Verschwinden des mit den zur quadratischen Form (42,32) gehörigen CHRISTOFFEL-Symbolen gebildeten Ausdruckes

$$R^\varrho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\varrho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\varrho_{\sigma\nu}. \tag{42,13}$$

§ 43 Der Krümmungstensor

Der im vorigen Paragraphen eingeführte Ausdruck

$$R^\varrho_{\mu,\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\varrho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\tau_{\mu\alpha}\Gamma^\varrho_{\sigma\nu} \tag{43,01}$$

spielt in der allgemeinen Tensoranalysis und in der Gravitationstheorie eine große Rolle. Wir wollen deshalb seine Eigenschaften eingehend untersuchen.

Zunächst wollen wir zeigen, daß dieser Ausdruck ein Tensor ist. Diesen Beweis kann man auf verschiedene Art führen. Am direktesten kommt man zum Ziel, wenn man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 x_\sigma'}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\varrho} = -(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu}, \tag{43,02}$$

die nach (42,04) das Transformationsgesetz für die CHRISTOFFEL-Symbole ausdrückt, differenziert. Das Ergebnis der Differentiation von (43,02) nach x_λ läßt sich schreiben

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x_\sigma'}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\nu} &+ (\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})'\left(\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\lambda}\frac{\partial^2 x_\beta'}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu}\frac{\partial^2 x_\beta'}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} + \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\nu}\frac{\partial^2 x_\beta'}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right) = \\ = \left(\frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\Gamma^\varrho_{\tau\lambda}\right)\frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\varrho} &- \left(\frac{\partial (\Gamma^\sigma_{\beta\gamma})'}{\partial x_\alpha'} + (\Gamma^\tau_{\beta\gamma})'(\Gamma^\sigma_{\tau\alpha})'\right)\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_\nu}.\end{aligned} \tag{43,03}$$

Hier ist die linke Seite symmetrisch in den Indizes λ, μ und ν; das muß also auch für die rechte Seite der Fall sein. Vertauschen wir auf der rechten Seite die Indizes λ und ν und setzen das Ergebnis der rechten Seite in ihrer ursprünglichen Form gleich, so erhalten wir eine Formel, die man unter Benutzung der Bezeichnungen (43,01) folgendermaßen schreiben kann:

$$R^\varrho_{\mu,\nu\lambda}\frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\varrho} = (R^\sigma_{\beta,\gamma\alpha})'\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_\nu}. \tag{43,04}$$

Diese Formel besagt gerade, daß $R^{\varrho}_{\mu,\nu\lambda}$ ein Tensor vierter Stufe ist, der in den Indizes μ, ν, λ kovariant und in dem Index ϱ kontravariant ist. Man bezeichnet diesen Tensor als Krümmungstensor.

Mit Hilfe des Krümmungstensors kann man die Änderung eines Vektors bei der Parallelübertragung längs eines infinitesimalen geschlossenen Weges ausdrücken. Der Wert des Vektors A_ϱ im Anfangspunkt x^0_α sei $(A_\varrho)_0$. Verschiebt man ihn in einen infinitesimal benachbarten Punkt, so nehmen seine Komponenten, bis auf Größen zweiter Ordnung[1]) hinsichtlich der Verschiebung $x_\alpha - x^0_\alpha$, die Werte

$$A_\varrho = (A_\varrho)_0 + (\Gamma^\sigma_{\alpha\varrho})_0 (A_\sigma)_0 (x_\alpha - x^0_\alpha) \tag{43,05}$$

an. Offenbar ist die Änderung ΔA_μ des Vektors A_μ bei einem Umlauf auf dem infinitesimalen geschlossenen Weg mindestens von zweiter Ordnung hinsichtlich der größten Verschiebungswerte. Diese Änderung wird durch das Kurvenintegral

$$\Delta A_\mu = \int \Gamma^\varrho_{\mu\nu} A_\varrho \, dx_\nu \tag{43,06}$$

über den betrachteten Weg ausgedrückt. Bei einem infinitesimalen Weg kann man unter dem Integral die Größe A_ϱ durch den Ausdruck (43,05) und die Größe $\Gamma^\varrho_{\mu\nu}$ durch den Ausdruck

$$\Gamma^\varrho_{\mu\nu} = (\Gamma^\varrho_{\mu\nu})_0 + \left(\frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)_0 (x_\alpha - x^0_\alpha) \tag{43,07}$$

ersetzen. Gehen wir mit (43,05) und (43,07) in (43,06) ein und beachten, daß das über einen geschlossenen Weg genommene Integral eines totalen Differentials verschwindet, so erhalten wir

$$\Delta A_\mu = \left[\frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\varrho_{\sigma\alpha}\right]_0 (A_\varrho)_0 \int (x_\alpha - x^0_\alpha) \, dx_\nu. \tag{43,08}$$

Die Größen

$$Q^{\nu\alpha} = \int (x_\alpha - x^0_\alpha) \, dx_\nu = \frac{1}{2} \int [(x_\alpha - x^0_\alpha) \, dx_\nu - (x_\nu - x^0_\nu) \, dx_\alpha] \tag{43,09}$$

lassen sich als Projektionen der von dem Weg umspannten Fläche auf die Koordinaten-„Ebenen" deuten. Wie man leicht sieht, stellen sie einen kontravarianten, antisymmetrischen Tensor dar. Wegen der Antisymmetrie des Tensors $Q^{\nu\alpha}$ kann man die Formel (43,08) folgendermaßen schreiben:

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} R^\varrho_{\mu,\nu\alpha} A_\varrho Q^{\nu\alpha} \tag{43,10}$$

(den auf den Anfangspunkt bezüglichen Index 0 haben wir weggelassen).

---

[1]) Diese Größen zweiter Ordnung hängen auch von der Form der Kurve ab, längs der die Verschiebung erfolgt (der Vektor A_ϱ ist keine Ortsfunktion).

Durch analoge Überlegungen ergibt sich für die Änderung der kontravarianten Vektorkomponenten die Formel

$$\Delta A^\sigma = -\frac{1}{2} R^\sigma_{\varrho,\nu\alpha} A^\varrho Q^{\nu\alpha}. \tag{43,11}$$

Wir wissen bereits, daß $R^\varrho_{\mu,\nu\alpha}$ ein Tensor ist; zu diesem Schluß könnte man auch auf Grund der Formeln (43,10) oder (43,11) kommen. ΔA_μ ist nämlich die Differenz zweier Vektoren, die sich auf den gleichen Punkt beziehen, also selbst ein Vektor. Fügt man andererseits zu dem antisymmetrischen Tensor $Q^{\nu\alpha}$ einen beliebigen symmetrischen Anteil hinzu, so bleibt die Gleichung (43,10) in Kraft. Die rechte Seite von (43,10) ist also immer ein Vektor, wie auch der Tensor $Q^{\nu\alpha}$ und der Vektor A_ϱ beschaffen sein mögen; das ist aber nur möglich, wenn $R^\varrho_{\mu,\nu\alpha}$ ein Tensor ist.

In § 40 haben wir die Operation der kovarianten Differentiation eingeführt. Im allgemeinen Fall sind diese Operationen nicht kommutativ: Die zweite kovariante Ableitung eines Vektors oder Tensors, die zunächst nach x_β und dann nach x_α gebildet wird, ist von der zweiten Ableitung, die erst nach x_α und dann nach x_β gebildet wird, verschieden. Betrachten wir die Differenz dieser zweiten Ableitungen für einen Vektor. Nach (40,05) ist

$$\nabla_\beta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\beta} - \Gamma^\nu_{\mu\beta} A_\nu. \tag{43,12}$$

Wir berechnen nun $\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu$ in einem lokal-geodätischen Koordinatensystem (in dem die ersten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ in dem betrachteten Punkt verschwinden). Wir haben dann

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} A_\nu. \tag{43,13}$$

Daraus folgt

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha A_\mu = \left(\frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha}\right) A_\nu. \tag{43,14}$$

In einem lokal-geodätischen System unterscheidet sich der Faktor der Größe A_ν auf der rechten Seite nicht von dem Ausdruck

$$R^\nu_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \Gamma^\nu_{\sigma\beta} - \Gamma^\tau_{\mu\beta} \Gamma^\nu_{\sigma\alpha} \tag{43,15}$$

für den Krümmungstensor. Deshalb gilt in einem lokal-geodätischen System die Gleichung

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A_\mu = R^\nu_{\mu,\alpha\beta} A_\nu. \tag{43,16}$$

Beide Seiten dieser Gleichung stellen aber einen Tensor dar. Besteht also die Gleichung (43,16) in *einem* Koordinatensystem, so muß sie in *jedem* Koordinatensystem gelten. Die Formel (43,16) liefert somit den allgemeinen Ausdruck für die Differenz der zweiten kovarianten Ableitungen eines Vektors.

Analog ergibt sich für einen kontravarianten Vektor die Formel

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A^\nu = - R^\nu_{\mu,\alpha\beta} A^\mu. \tag{43,17}$$

Das hier benutzte Verfahren der Herleitung einer Tensorgleichung im lokalgeodätischen Koordinatensystem mit der anschließenden Folgerung, daß diese Gleichung auch im allgemeinen Fall gelten muß, kann die Rechnungen wesentlich vereinfachen. Zwar sind die Gleichungen (43,16) und (43,17) so einfach, daß sie sich auch ohne Anwendung dieses Verfahrens leicht ableiten lassen, jedoch kann in anderen Fällen die Vereinfachung wesentlich sein.

Wir untersuchen als Beispiel den Ausdruck für die Differenz der zweiten kovarianten Ableitungen des Tensors beliebiger Stufe

$$U^{(\mu)}_{(\nu)} = U^{\mu_1 \cdots, \mu_m}_{\nu_1 \cdots, \nu_k}. \tag{43,18}$$

Die Formel (40,26) für die erste Ableitung läßt sich schreiben

$$\nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} (U^{(\mu)}_{(\nu)}) + \sum_{i=1}^{m} \Gamma^{\mu_i}_{\varrho\beta} U^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \varrho \mu_{i+1} \cdots \mu_m}_{(\nu)} - \\ - \sum_{j=1}^{k} \Gamma^{\varrho}_{\beta\nu_j} U^{(\mu)}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \varrho \nu_{j+1} \cdots \nu_k}. \tag{43,19}$$

Bilden wir in einem geodätischen Koordinatensystem die zweite Ableitung, so ergibt sich

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta U^{(\mu)}_{(\nu)} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (U^{(\mu)}_{(\nu)}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Gamma^{\mu_i}_{\varrho\beta}}{\partial x_\alpha} U^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \varrho \mu_{i+1} \cdots \mu_m}_{(\nu)} - \\ - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\beta\nu_j}}{\partial x_\alpha} U^{(\mu)}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \varrho \nu_{j+1} \cdots \nu_k}. \tag{43,20}$$

Die Differenz der zweiten Ableitungen wird also durch einen Ausdruck gegeben, der im geodätischen System mit dem folgenden Ausdruck zusammenfällt:

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) U^{(\mu)}_{(\nu)} = - \sum_{i=1}^{m} R^{\mu_i}_{\varrho,\alpha\beta} U^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \varrho \mu_{i+1} \cdots \mu_m}_{(\nu)} + \\ + \sum_{j=1}^{k} R^{\varrho}_{\nu_j,\alpha\beta} U^{(\mu)}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \varrho \nu_{j+1} \cdots \nu_k}. \tag{43,21}$$

Da aber beide Seiten dieser Gleichung Tensoren sind, gilt sie auch in einem beliebigen Koordinatensystem.

§ 44 Die wichtigsten Eigenschaften des Krümmungstensors

Neben dem gemischten Krümmungstensor

$$R^\sigma_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\varrho_{\mu\alpha} \Gamma^\sigma_{\varrho\beta} - \Gamma^\varrho_{\mu\beta} \Gamma^\sigma_{\varrho\alpha} \tag{44,01}$$

betrachten wir den kovarianten Tensor

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = g_{\nu\sigma}\, R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta}\,. \tag{44,02}$$

Nach dieser Definition ergibt sich der gemischte Tensor $R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta}$ aus $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$, indem man den *zweiten* kovarianten Index hebt. Ausführlicher geschrieben würde er also lauten

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = R_{\mu,}{}^{\cdot\,\sigma\,\cdot\,\cdot}_{\;\;\alpha\beta} = g^{\sigma\nu}\, R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}\,. \tag{44,03}$$

In der älteren Literatur sind übrigens für den kovarianten und den gemischten Tensor folgende Bezeichnungen gebräuchlich

$$R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = (\mu\nu\,,\,\alpha\beta)\,, \tag{44,04}$$

$$R^{\sigma}_{\mu,\,\alpha\beta} = \{\mu\sigma\,,\,\alpha\beta\}\,. \tag{44,05}$$

Man nennt sie RIEMANNsche Vierindizessymbole erster und zweiter Art.

Berechnen wir den kovarianten Krümmungstensor gemäß Formel (44,02), so erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = {} & \frac{\partial}{\partial x_\beta}\,[\mu\alpha\,,\,\nu] - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,[\mu\beta\,,\,\nu] + \\ & + \Gamma^{\varrho}_{\mu\alpha}\left([\varrho\beta\,,\,\nu] - \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta}\right) - \Gamma^{\varrho}_{\mu\beta}\left([\varrho\alpha\,,\,\nu] - \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\alpha}\right) \end{aligned} \tag{44,06}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\beta}\right) - \\ & - \Gamma^{\varrho}_{\mu\alpha}\,[\nu\beta\,,\,\varrho] + \Gamma^{\varrho}_{\mu\beta}\,[\nu\alpha\,,\,\varrho]\,. \end{aligned} \tag{44,07}$$

Drückt man die letzten beiden Glieder durch die Größen $\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$ aus, so kann man auch schreiben

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\beta}\right) - \\ & - g_{\varrho\sigma}\,\Gamma^{\varrho}_{\mu\alpha}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} + g_{\varrho\sigma}\,\Gamma^{\varrho}_{\mu\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}\,. \end{aligned} \tag{44,08}$$

An diesem Ausdruck erkennt man leicht folgende Symmetrieeigenschaften des kovarianten Krümmungstensors:

1. Antisymmetrie in den ersten beiden Indizes

$$R_{\nu\mu,\,\alpha\beta} = -\,R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}\,, \tag{44,09}$$

2. Antisymmetrie in den letzten beiden Indizes

$$R_{\mu\nu,\beta\alpha} = -R_{\mu\nu,\alpha\beta}, \tag{44,10}$$

3. zyklische Symmetrie

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} + R_{\mu\alpha,\beta\nu} + R_{\mu\beta,\nu\alpha} = 0. \tag{44,11}$$

Die ersten beiden Eigenschaften sind ohne weiteres einzusehen; um die dritte zu beweisen, braucht man nur die linke Seite von (44,11) in einen lokal-geodätischen System zu bilden und nachzuprüfen, daß sich die 12 zweiten Ableitungen paarweise wegheben.

Aus den drei genannten Eigenschaften ergibt sich weiter, daß das erste Indexpaar mit dem letzten vertauscht werden kann (wobei aber die Reihenfolge innerhalb jedes Paares erhalten bleiben muß):

$$R_{\alpha\beta,\mu\nu} = R_{\mu\nu,\alpha\beta}. \tag{44,12}$$

Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition (44,08). Um zu zeigen, daß sie nicht unabhängig, sondern eine Folge der drei ersten Eigenschaften ist, braucht man nur die Summe von (44,11) und der drei anderen Gleichungen zu bilden, die sich daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes (μ, ν, α, β) ergeben. Beachtet man die Antisymmetrieeigenschaften 1. und 2., so heben sich von den 12 Gliedern dieser Summe 8 paarweise weg, und die übrigen 4 liefern

$$-2R_{\mu\alpha,\nu\beta} + 2R_{\nu\beta,\mu\alpha} = 0, \tag{44,13}$$

was sich von (44,12) nur durch die Bezeichnung der Indizes unterscheidet.

Wir wollen nun die Anzahl unabhängiger Komponenten des Krümmungstensors bestimmen, und zwar unter der Voraussetzung, daß jeder Index n Werte annehmen kann (tatsächlich ist $n = 4$). Offenbar dürfen nicht alle vier Indizes übereinstimmen. Die von Null verschiedenen Komponenten mit *zwei* verschiedenen Indizes lassen sich auf $R_{\alpha\beta,\alpha\beta}$ zurückführen. Ihre Anzahl ist der der Paare verschiedener Indizes gleich, d. h. gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$. Sind *drei* Indizes α, β, γ verschieden $\left(\text{es gibt } \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \text{ solcher Tripel}\right)$, so kann man daraus die nicht verschwindenden Komponenten $R_{\alpha\beta,\alpha\gamma}$, $R_{\beta\alpha,\beta\gamma}$, $R_{\gamma\alpha,\gamma\beta}$ bilden, in denen entweder die erste oder die zweite oder die dritte der Zahlen α, β, γ zweimal auftritt. Die Anzahl dieser Komponenten ist also gleich dem Dreifachen der möglichen Zahlentripel, d. h. gleich $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$. Schließlich gibt es noch $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Kombinationen von *vier* verschiedenen Zahlen α, β, γ, δ. Für jede dieser Kombinationen kann man die Komponenten $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$, $R_{\alpha\delta,\beta\gamma}$, $R_{\alpha\gamma,\delta\beta}$ bilden; alle übrigen Indexkombinationen lassen sich darauf zurückführen. Diese drei Komponenten sind aber durch die Bedingung der zyklischen Symmetrie verknüpft, so daß nur zwei von ihnen unabhängig sind. Folglich ist die Anzahl der unabhängigen Komponenten mit vier verschiedenen Indizes doppelt so groß wie die Anzahl der möglichen Zahlenquadrupel, d. h.

gleich $\frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3)$. Die Gesamtzahl der unabhängigen Komponenten ist somit

$$\frac{1}{2} n(n-1) + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) + \\ + \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{12} n^2(n^2-1). \qquad (44,14)$$

In dem uns interessierenden Fall $n = 4$ ergibt das

$$6 + 12 + 2 = 20. \qquad (44,15)$$

Im dreidimensionalen Raum ($n = 3$) hat der Krümmungstensor 6 unabhängige Komponenten, d. h. genau so viele wie ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Tatsächlich läßt sich für $n = 3$ der Krümmungstensor durch einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe darstellen (vgl. Anhang E). Der Krümmungstensor einer zweidimensionalen Fläche ($n = 2$) schließlich hat nur eine Komponente, die GAUSSsche Krümmung.

Wir erinnern daran, daß wir es schon in § 31 mit Größen mit den gleichen Symmetrieeigenschaften wie der kovariante Krümmungstensor zu tun hatten und daß wir dort den Zusammenhang dieser Größen mit dem symmetrischen Tensor von KRUTKOW erwähnten.

Wir haben bisher die Symmetrieeigenschaften des kovarianten Krümmungstensors untersucht. Der gemischte Krümmungstensor hat analoge Eigenschaften

$$R^{\sigma}_{\mu,\beta\alpha} = -R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta}, \qquad (44,16)$$

$$R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta} + R^{\sigma}_{\alpha,\beta\mu} + R^{\sigma}_{\beta,\mu\alpha} = 0, \qquad (44,17)$$

die (44,10) und (44,11) entsprechen. Das Analogon zu (44,09) ist etwas komplizierter, nämlich

$$g_{\sigma\nu} g^{\varrho\mu} R^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta} = -R^{\varrho}_{\nu,\alpha\beta} \qquad (44,18)$$

(beim Heben des ersten unteren und Senken des oberen Indexes ändert die Komponente ihr Vorzeichen). Diese Eigenschaft läßt sich auch unabhängig von (44,09) leicht ableiten, z. B. durch Vergleich von (43,10) mit (43,11) oder von (43,16) mit (43,17) oder schließlich aus der Gleichung

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) g_{\mu\nu} = R^{\varrho}_{\mu,\alpha\beta} g_{\varrho\nu} + R^{\varrho}_{\nu,\alpha\beta} g_{\varrho\mu} = 0, \qquad (44,19)$$

die sich aus der allgemeinen Formel (43,21) ergibt.

Neben den soeben betrachteten algebraischen Relationen bestehen zwischen den Komponenten des Krümmungstensors noch Differentialbeziehungen, die man BIANCHIsche Identitäten nennt und die man folgendermaßen schreiben kann:

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu,\alpha\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda,\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu,\alpha\beta} = 0. \qquad (44,20)$$

Zum Beweis führen wir ein lokal-geodätisches Koordinatensystem ein, in welchem die tensoriellen Ableitungen mit den gewöhnlichen übereinstimmen. Die Rechnung wird dadurch erleichtert, daß in dem Ausdruck (44,08) für $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$ die letzten beiden Terme (welche die zweiten Ableitungen nicht enthalten) in den $\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$ quadratisch sind, so daß in einem lokal-geodätischen System nicht nur diese Terme selbst, sondern auch ihre ersten Ableitungen verschwinden. Die linke Seite von (44,20) lautet in diesem System

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} R_{\nu\lambda,\,\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} R_{\lambda\mu,\,\alpha\beta} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda \partial x_\alpha} + \frac{\partial^3 g_{\lambda\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\beta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 g_{\nu\beta}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^3 g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda \partial x_\beta} + \frac{\partial^3 g_{\lambda\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{2}(\ldots). \qquad (44,21)$$

Hier bedeuten die eingeklammerten Punkte Terme von derselben Form, in denen aber die Indizes α und β vertauscht sind. Die erste Klammer ist nun aber in α und β symmetrisch, so daß sie der zweiten Klammer gleich ist, die Differenz also verschwindet. Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (44,20) in einem lokal-geodätischen Koordinatensystem erfüllt ist; wegen ihres Tensorcharakters gilt diese Gleichung dann auch allgemein.

Aus dem Krümmungstensor vierter Stufe kann man durch Verjüngung nach zwei Indizes einen Tensor zweiter Stufe bilden. Die Verjüngung nach den beiden ersten oder den beiden letzten Indizes ergibt offenbar Null, während die Verjüngung nach einem der übrigen Indexpaare bis auf das Vorzeichen immer dasselbe liefert. Den so gewonnenen Tensor

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} = R^{\beta}_{\mu,\,\beta\nu} \qquad (44,22)$$

bezeichnet man als Krümmungstensor zweiter Stufe oder als RIEMANNschen Tensor. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Tensor symmetrisch ist. Unter Benutzung von (44,09), (44,10) und (44,12) erhalten wir nämlich

$$g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\nu,\,\mu\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\nu\beta,\,\alpha\mu} = g^{\alpha\beta} R_{\nu\alpha,\,\beta\mu} \qquad (44,23)$$

oder

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \qquad (44,24)$$

Neben dem kovarianten RIEMANNschen Tensor betrachtet man auch den gemischten Tensor

$$R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\varrho} R_{\varrho\nu} \qquad (44,25)$$

und den kontravarianten Tensor

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} R_{\varrho\sigma}. \qquad (44,26)$$

Eine weitere Verjüngung nach den Indizes μ und ν ergibt den Skalar

$$R = R^{\nu}_{\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\,\beta\nu}, \qquad (44,27)$$

den man den Krümmungsskalar nennt.

Wir wollen nun die Divergenz des RIEMANNschen Tensors

$$Y_\nu = \nabla_\lambda R^\lambda_\nu = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda R_{\mu\nu} \tag{44,28}$$

berechnen. Führen wir für $R_{\mu\nu}$ den Ausdruck (44,22) ein, so wird

$$Y_\nu = g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\lambda R_{\mu\alpha,\,\beta\nu}\,. \tag{44,29}$$

Wir benutzten nun die BIANCHIschen Identitäten in der Form

$$\nabla_\lambda R_{\mu\alpha,\,\beta\nu} + \nabla_\beta R_{\mu\alpha,\,\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\mu\alpha,\,\lambda\beta} = 0\,, \tag{44,30}$$

die sich aus (44,20) mit Hilfe von (44,12) ergibt. Die in (44,29) auftretende tensorielle Ableitung ersetzen wir durch die beiden anderen Terme in (44,30) und erhalten

$$Y_\nu = -\,g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta R_{\mu\alpha,\,\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} \nabla_\nu R_{\mu\alpha,\,\lambda\beta}\,. \tag{44,31}$$

Diese Relation läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$Y_\nu = -\,Y_\nu + \nabla_\nu R\,. \tag{44,32}$$

Wenn man nämlich in der ersten Summe der Formel (44,31) die Summationsindizes λ und β sowie μ und α vertauscht (umbenennt), so wird diese Summe mit dem Ausdruck (44,29) identisch. Im letzten Term von (44,31) kann man die Summation vor der kovarianten Differentiation ausführen, was einfach $\nabla_\nu R$ ergibt. Wir haben also

$$Y_\nu = \frac{1}{2} \nabla_\nu R = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_\nu}, \tag{44,33}$$

denn die tensorielle Ableitung eines Skalars reduziert sich auf die gewöhnliche Ableitung. Der Vergleich von (44,28) mit (44,33) zeigt, daß die Divergenz des Tensors

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{44,34}$$

identisch verschwindet. Der Tensor $G_{\mu\nu}$ wird deshalb als konservativer Tensor bezeichnet. Wegen seiner großen Rolle in der EINSTEINschen Gravitationstheorie nennt man ihn auch EINSTEIN-Tensor.

Weitere Umformungen des Krümmungstensors werden im Kapitel V betrachtet, das der Gravitationstheorie gewidmet ist.

KAPITEL IV

FORMULIERUNG DER RELATIVITÄTSTHEORIE IN BELIEBIGEN KOORDINATEN

§ 45 Die Eigenschaften der Raum-Zeit und die Wahl der Koordinaten

Die Form der Gleichungen, die den Ablauf eines physikalischen Prozesses in Raum und Zeit bestimmen, hängt selbstverständlich von der Art des Prozesses ab, aber außerdem noch von zwei Umständen, nämlich von den Eigenschaften der Raum-Zeit und von der Wahl der Koordinaten, in denen der Prozeß beschrieben wird. Die Eigenschaften der Raum-Zeit sind objektiv, durch die Natur selbst bedingt und unabhängig von unserer Willkür. Die Wahl der Koordinaten dagegen liegt fast ausschließlich in unserer Hand. Allerdings sind auch dabei der Willkür gewisse Grenzen gesetzt, in dem Sinne, daß die Existenz bestimmter ausgezeichneter Koordinatensysteme (GALILEIscher Koordinaten) nur auf Grund der objektiven Eigenschaften der realen Raum-Zeit möglich ist. Solche Koordinatensysteme würde es nicht geben, wenn diese Eigenschaften andere wären. Man kann jedoch stets durch eine mathematische Transformation von einem ausgezeichneten Koordinatensystem zu jedem anderen übergehen; die Regeln für einen solchen Übergang haben wir im vorigen Kapitel kennengelernt.

Um nicht an die Art des betrachteten Prozesses gebunden zu sein, muß man Gleichungen betrachten, die möglichst allgemein sind und die Eigenschaften der Raum-Zeit möglichst unmittelbar charakterisieren. Diesen Forderungen entspricht die Gleichung, welche das Gesetz der Ausbreitung einer Wellenfront mit einer Grenzgeschwindigkeit ausdrückt. Nach diesem Gesetz breitet sich vor allem die Front einer Licht- (elektromagnetischen) Welle im Vakuum aus. Wie wir bereits betont haben, ist aber dieses Gesetz nicht als ein speziell nur für das Licht gültiges Gesetz aufzufassen, sondern als ein allgemeines Gesetz, das die Ausbreitung jeder Art von Störung, die mit einer Grenzgeschwindigkeit fortschreitet, beherrscht. Die Gleichung für die Ausbreitung einer Wellenfront im Vakuum kennzeichnet nicht nur die Eigenschaften der sich ausbreitenden Materieform (etwa des elektromagnetischen Feldes), sondern auch die des Raum-Zeit-Kontinuums. (Wir wiesen schon mehrfach darauf hin, daß auch die praktische Ausführung der Messung großer Abstände auf Triangulation oder Funkortung, d. h. auf Anwendungen des Gesetzes für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen basiert.) Die geometrischen Begriffe und der Zeitbegriff sind daher aufs engste mit dem Gesetz für die Ausbreitung einer Wellenfront im Vakuum verbunden.

In GALILEIschen Koordinaten

$$x'_0 = ct; \quad x'_1 = x; \quad x'_2 = y; \quad x'_3 = z \tag{45,01}$$

wird dieses Gesetz durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x'_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'_3}\right)^2 = 0. \tag{45,02}$$

Dabei ist $\omega = \text{const}$ die Gleichung der sich bewegenden Wellenfläche (Wellenfront). Die Gleichung (45,02) ist der mathematische Ausdruck dafür, daß sich die Wellenfläche in Richtung ihrer Normalen mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Identifiziert man die Normale zur Wellenfläche mit einem Strahl und betrachtet den Schnittpunkt des Strahles mit der Wellenfront, so kann man auf Grund der Gleichung (45,02) sagen, daß sich dieser Punkt längs des Strahls geradlinig und gleichförmig mit Lichtgeschwindigkeit bewegt (in GALILEIschen Koordinaten).

Neben der Ausbreitung einer Wellenfront können wir einen einfachen Prozeß betrachten, bei dem die Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit erfolgt, etwa die Bewegung eines freien Massenpunktes. In der HAMILTON-JACOBIschen Form haben die Bewegungsgleichungen eine zu (45,02) analoge Gestalt, nämlich

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0'}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1'}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2'}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_3'}\right)^2 = 1. \tag{45,03}$$

Dabei ist ω der Wirkungsfunktion proportional. Tatsächlich lautet das vollständige Integral der Gleichung (45,03)

$$\omega = a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' - \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot x_0'. \tag{45,04}$$

Setzen wir die Ableitungen von ω nach a_1, a_2, a_3 konstant, so erhalten wir eine geradlinige und gleichförmige Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Wir können also die Gleichungen (45,02) und (45,03) als Grundgleichungen auffassen, in denen sich die Eigenschaften des Raum-Zeit Kontinuums unmittelbar ausdrücken. Die Form des darin auftretenden Operators

$$(\nabla \omega)^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0'}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1'}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2'}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_3'}\right)^2 \tag{45,05}$$

kennzeichnet sowohl die Eigenschaften des Raum-Zeit Kontinuums als auch die physikalische Bedeutung der Koordinaten.

Würden wir die genaue Bedeutung der unabhängigen Variablen (x_0', x_1', x_2', x_3') nicht kennen, sondern wüßten nur, daß sie irgendwie mit dem Raum und der Zeit zusammenhängen (oder, mathematisch ausgedrückt, daß sie der Arithmetisierung von Raum und Zeit dienen), so könnten wir ihre physikalische Bedeutung durch bloße Betrachtung der durch die Gleichungen (45,02) und (45,03) beschriebenen Prozesse finden. Beim Aufbau der Relativitätstheorie sind wir auch tatsächlich so vorgegangen. Wir haben die physikalische Bedeutung der Variablen (45,01) sozusagen in zwei Schritten bestimmt. Zunächst haben wir diejenigen (nicht ganz exakten) Vorstellungen von den Koordinaten und der Zeit benutzt, die in der klassischen, vorrelativistischen Physik gebräuchlich waren. Die vorläufige Definition der Zeit verknüpfte die Variable t mit dem Gang von Uhren (oder irgendeinem periodischen Prozeß), während die Definition der räumlichen Koordinaten die Variablen x, y, z mit Abständen verband, die mit Hilfe starrer Körper nach den Gesetzen der euklidischen Geometrie gemessen wurden (Koordinatennetz). Wir haben aber gleich betont, daß diese Definitionen einer Präzisierung bedürfen. Denn die Benutzung von Uhren, die

sich an verschiedenen Punkten des Raumes befinden, setzt voraus, daß das Problem ihrer Synchronisierung gelöst ist; außerdem ist die Benutzung starrer Maßstäbe zur Messung großer Entfernungen nicht nur praktisch unmöglich, sondern sie gibt auch zu prinzipiellen Bedenken Anlaß.

Die Definitionen physikalischer Größen sind nun niemals willkürlich, sondern sie entsprechen mehr oder weniger genau der Natur. Deshalb ist eine Präzisierung der Definitionen nur auf Grund einer tieferen Einsicht in die Naturgesetze möglich. In dem uns interessierenden Fall (Definition der Zeit und der Koordinaten) können wir uns neben dem schon von NEWTON benutzten Gesetz der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung eines freien Körpers auf das sehr gut gesicherte Gesetz für die Ausbreitung einer Lichtwellenfront im Vakuum, d. h. auf die Gleichungen (45,02) und (45,03), stützen. So sind wir auch beim Aufbau der Relativitätstheorie, die im wesentlichen eine Theorie des Raumes und der Zeit ist, vorgegangen. (Die Bezeichnung „Relativitätstheorie" hat historische Gründe und gibt von dem Inhalt der Theorie nur eine sehr einseitige Vorstellung.) In der Tat: Die für die Relativitätstheorie grundlegende LORENTZ-Transformation, die die Eigenschaften von Raum und Zeit wiedergibt und die Bedeutung der Variablen x, y, z, t näher festlegt, wird erst aus dem Gesetz für die Ausbreitung einer Wellenfront (in Verbindung mit der Forderung der Erhaltung von Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit der Bewegung), und nicht etwa a priori vor Aufstellung dieses Gesetzes gewonnen.

Wir dürfen also sagen: Sowohl die Eigenschaften der Raum-Zeit als auch die Bedeutung der GALILEIschen Koordinaten (45,01) werden auf Grund der Gleichungen (45,02) und (45,03) festgelegt.

Nun können die Gleichung für die Wellenfront und die HAMILTON-JACOBIsche Gleichung für den freien Massenpunkt in der allgemeineren Form

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 0, \tag{45,06}$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 1 \tag{45,07}$$

geschrieben werden. Die obige Behauptung bezieht sich auch auf die allgemeineren Gleichungen: Sowohl die Eigenschaften der Raum-Zeit als auch die Bedeutung der Koordinaten (x_0, x_1, x_2, x_3) werden auf Grund dieser Gleichungen festgelegt.

Wir wollen zunächst voraussetzen, daß die Größen $g^{\mu\nu}$ als Funktionen ihrer Variablen gegeben sind. Welche Eigenschaften dieser Funktionen entsprechen dann den Eigenschaften der Raum-Zeit selbst und welche sind nur durch die Wahl der Koordinaten bedingt?

Nimmt man an, daß die objektiven Eigenschaften der Raum-Zeit von der gewöhnlichen Relativitätstheorie richtig beschrieben werden, so lassen sie sich durch die folgende Behauptung ausdrücken: Es gibt GALILEIsche Koordinaten, in denen die Gleichungen (45,06) und (45,07) die Form (45,02) und (45,03) annehmen. Diese Behauptung besagt, daß eine Substitution

$$x'_\alpha = f_\alpha (x_0, x_1, x_2, x_3) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{45,08}$$

existiert, durch die der Ausdruck

$$(\nabla \omega)^2 = g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} \tag{45,09}$$

auf die Form

$$(\nabla \omega)^2 = \sum_{k=0}^{3} e_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'_k}\right)^2 \tag{45,10}$$

gebracht wird.

Aus der allgemeinen Tensoranalysis kennen wir als notwendige und hinreichende Bedingung für die Transformierbarkeit der quadratischen Form (45,09) auf eine solche mit konstanten Koeffizienten das Verschwinden des Krümmungstensors vierter Stufe, der aus den Koeffizienten $g^{\mu\nu}$ (und den entsprechenden $g_{\mu\nu}$) gebildet ist. Damit die transformierte quadratische Form ein Plus- und drei Minuszeichen (vor den Quadraten der Ableitungen) enthält, ist noch notwendig, daß die Größen $g^{\mu\nu}$ die in § 35 aufgestellten Ungleichungen erfüllen. Die Gleichungen, denen die Größen $g^{\mu\nu}$ genügen müssen, haben also die Form

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0, \tag{45,11}$$

$$g^{00} > 0; \quad \sum_{i,k=1}^{3} g^{ik} \xi_i \xi_k < 0, \tag{45,12}$$

wobei ξ_1, ξ_2, ξ_3 beliebige Zahlen sind.

Diese Gleichungen drücken (mit der Genauigkeit, mit der die gewöhnliche Relativitätstheorie gilt) die von der Wahl der Koordinaten unabhängigen Eigenschaften der Raum-Zeit aus. Sind diese Gleichungen erfüllt, so ist die gesuchte Transformation (45,08) bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig festgelegt. Die Größen $x'_\alpha = f_\alpha$ sind dann als GALILEIsche Koordinaten aufzufassen. Man erhält damit auch eine Deutung der Variablen (x_0, x_1, x_2, x_3), in denen die Gleichungen ursprünglich geschrieben wurden.

Bei diesen Überlegungen haben wir vorausgesetzt, daß die Größen $g^{\mu\nu}$ gegebene Funktionen der Koordinaten sind. Wir können uns aber auch auf einen anderen Standpunkt stellen und die Größen $g^{\mu\nu}$ als unbekannte Funktionen betrachten, die den Gleichungen (45,11) und (45,12) genügen, welche ihrerseits die Eigenschaften der Raum-Zeit ausdrücken.

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert für die kovarianten Komponenten des Fundamentaltensors die Ausdrücke

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{3} e_k \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_k}{\partial x_\beta}, \tag{45,13}$$

die vier willkürliche Funktionen f_k enthalten. Das Auftreten von willkürlichen Funktionen in der Lösung resultiert aus der Kovarianz der Gleichungen für die $g_{\alpha\beta}$ gegenüber einer beliebigen Koordinatentransformation.

Die Wahl der willkürlichen Funktionen f_k ist ohne Einfluß auf die physikalischen Folgerungen aus der Theorie, denn die Willkür läuft auf eine rein mathematische Transformation der Gleichungen auf neue unabhängige Variablen hinaus. Es ist jedoch zweckmäßig, die Wahl dieser willkürlichen Funktionen

durch die Forderung zu beschränken, daß die zugelassenen Transformationen eine möglichst enge Gruppe bilden und die Grundgleichungen der Theorie eine möglichst einfache Form annehmen sollen. Ist eine solche Einschränkung möglich (und das hängt von den objektiven Eigenschaften der Raum-Zeit ab), so sind die auf diese Weise gewonnenen ausgezeichneten Koordinatensysteme unmittelbar mit diesen Eigenschaften verknüpft und lassen eine direktere physikalische Deutung zu. In dem hier betrachteten Fall ist ein solches ausgezeichnetes Koordinatensystem das GALILEIsche System, das wir erhalten, wenn wir in der allgemeinen Lösung (45,13) $f_k = x_k$ setzen. Man kann aber auch die Funktionen f_k unbestimmt lassen und die Gleichungen für die physikalischen Prozesse formulieren, ohne die Wahl der unabhängigen Variablen von vornherein zu fixieren. So wird dann zum Beispiel das Gesetz für die Ausbreitung einer Wellenfront durch das Gleichungssystem (45,06), (45,11), (45,12) für die unbekannten Funktionen ω und $g^{\mu\nu}$ ausgedrückt. Analog lautet auch das Gesetz für die Bewegung eines freien Massenpunktes. Andere Beispiele dieser allgemeinkovarianten Formulierung geben wir im nächsten Paragraphen.

§ 46 Die Gleichungen der mathematischen Physik in beliebigen Koordinaten

Ist für ein System von Differentialgleichungen der mathematischen Physik die tensorielle Form in GALILEIschen Koordinaten bekannt, so erhält man daraus diese Gleichungen in beliebigen Koordinaten, indem man einfach die gewöhnlichen Ableitungen durch die kovarianten ersetzt. Diese Regel gilt auch für Gleichungen, die zweite und höhere Ableitungen enthalten, denn nach der allgemeinen Formel (43,21) ist die kovariante Differentiation eines beliebigen Vektors oder Tensors unter der Bedingung $R_{\mu\nu,\,\alpha\beta} = 0$ kommutativ.

Wir betrachten zunächst die Gleichungen der Elektrodynamik. Da die lineare Differentialform (24,04)

$$\delta\varphi = A_\nu dx_\nu \tag{46,01}$$

eine Invariante ist, bilden die darin eingehenden Potentiale auch bei allgemeinen Koordinatentransformationen einen kovarianten Vektor. Die Differentialbeziehung (24,05) für die Potentiale läßt sich in der Form

$$\nabla_\nu A^\nu = 0 \tag{46,02}$$

schreiben. Dabei sind die A^ν die kontravarianten Komponenten

$$A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu . \tag{46,03}$$

Nach (41,08) lautet die Gleichung (46,02) explizite

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g}\, A^\nu\right) = 0. \tag{46,04}$$

Den Zusammenhang zwischen den Potentialen und dem Feld geben die Formeln

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu . \tag{46,05}$$

Wie bereits in § 41 festgestellt, heben sich aber bei der Bildung der Differenz (46,05) die Terme, durch die sich die kovarianten Ableitungen von den gewöhnlichen unterscheiden, gegeneinander auf, so daß wir für den antisymmetrischen Feldtensor den Ausdruck

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{46,06}$$

erhalten, der mit (24,10) übereinstimmt.

Die erste Gruppe der MAXWELL-LORENTZschen Gleichungen, die in gewöhnlichen Vektorbezeichnungen lautet

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0; \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{46,07}$$

läßt sich jetzt nach (24,17) in der Form

$$F_{\mu\nu\sigma} = 0 \tag{46,08}$$

schreiben. Dabei ist $F_{\mu\nu\sigma}$ ein völlig antisymmetrischer Tensor[1]) dritter Stufe, der sich durch $F_{\mu\nu}$ nach der Formel

$$F_{\mu\nu\sigma} = \nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} \tag{46,09}$$

ausdrücken läßt, die eine Verallgemeinerung von (24,12) darstellt. Nach (41,28) ist dieser Ausdruck aber gleich

$$F_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}, \tag{46,10}$$

da der Tensor $F_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist. Die Formel (24,12) bleibt also unverändert.

Wir wollen nun auch die zweite Gruppe der MAXWELL-LORENTZschen Gleichungen in beliebigen Koordinaten aufschreiben. In der gewöhnlichen Form lauten sie

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho; \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{j}. \tag{46,11}$$

Nach (24,20) stellen die linken Seiten dieser Gleichungen die kontravariante Divergenz des Feldtensors dar, die nach (41,25) in allgemeinen Koordinaten folgende Gestalt hat:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}\right) \tag{46,12}$$

(da der Feldtensor antisymmetrisch ist). Auf den rechten Seiten von (46,11) steht der mit $4\pi/c$ multiplizierte, kontravariante Stromvektor, d.h. der Vektor

$$s^\mu = \frac{4\pi}{c}\varrho^* u^\mu. \tag{46,13}$$

---

[1]) D. h. ein in allen Indizes antisymmetrischer Tensor.

Dabei ist ϱ^* die invariante Dichte und u^μ die kontravariante Geschwindigkeit der Ladung. In allgemeinen Koordinaten lauten die Gleichungen (46,11) also

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}) = s^\mu = \frac{4\pi}{c} \varrho^* u^\mu. \tag{46,14}$$

Daraus ergibt sich der Erhaltungssatz für die Ladung in der Form

$$\nabla_\mu s^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\sqrt{-g}\, s^\mu) = 0. \tag{46,15}$$

Zur Aufstellung der allgemein-kovarianten Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt in einem äußeren Feld braucht man nur noch den Ausdruck für den Beschleunigungsvektor zu finden. Ist τ die Eigenzeit, so ist

$$u^\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau} \tag{46,16}$$

die Vierergeschwindigkeit. Dabei gilt

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2. \tag{46,17}$$

Der Beschleunigungsvektor w^ν stimmt dann mit der linken Seite des Ausdrucks (38,34) überein. Wir müssen also setzen

$$w^\nu = \frac{d^2 x_\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{d\tau} \frac{dx_\beta}{d\tau}. \tag{46,18}$$

In der Tat ist dieser Ausdruck ein Vektor und geht in GALILEIschen Koordinaten in die gewöhnliche Formel über. Was die LORENTZ-Kraft betrifft, so haben wir den entsprechenden Ausdruck schon in § 25 in kovarianter Form aufgeschrieben. Somit lauten die Bewegungsgleichungen

$$w_\mu = -\frac{e}{mc} u^\nu F_{\mu\nu}, \tag{46,19}$$

wo

$$w_\mu = g_{\mu\nu} w^\nu \tag{46,20}$$

die kovarianten Komponenten der Beschleunigung sind.

In § 33 haben wir den Energietensor des elektromagnetischen Feldes betrachtet und die Dichte der LORENTZ-Kraft als Divergenz dieses Tensors (mit dem entgegengesetzten Vorzeichen) dargestellt. Die entsprechenden Formeln lassen sich leicht in allgemein-kovarianter Form schreiben. Als Verallgemeinerung der Formel (33,16) für den Energietensor des elektromagnetischen Feldes sind die Ausdrücke

$$U_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \frac{1}{16\pi} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \tag{46,21}$$

$$U^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{46,22}$$

zu betrachten. Unter Benutzung der MAXWELL-LORENTZschen Gleichungen (46,08) und (46,14) erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\nabla_\nu U^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} g^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} s^\alpha. \tag{46,23}$$

Darin steht rechts die Dichte der LORENTZ-Kraft (mit dem Minus-Zeichen).

Die allgemein-kovarianten Bewegungsgleichungen für eine kontinuierliche Ladungsverteilung können, analog zu (33,09), in der Form

$$\mu^* w^\varrho = -\frac{1}{4\pi} g^{\varrho\sigma} F_{\sigma\alpha} s^\alpha \tag{46,24}$$

geschrieben werden. Dabei ist μ^* die invariante Dichte der Ruhmasse, welche der folgenden Gleichung genügt:

$$\nabla_\sigma(\mu^* u^\sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (\sqrt{-g}\,\mu^* u^\sigma) = 0. \tag{46,25}$$

Was die Beschleunigung w^ϱ anbelangt, so läßt sie sich nach (46,18) in der Form

$$w^\varrho = \frac{d u^\varrho}{d\tau} + \Gamma^\varrho_{\sigma\alpha} u^\sigma u^\alpha \tag{46,26}$$

oder

$$w^\varrho = u^\sigma \frac{\partial u^\varrho}{\partial x_\sigma} + \Gamma^\varrho_{\sigma\alpha} u^\sigma u^\alpha \tag{46,27}$$

schreiben. Der letzte Ausdruck ist gleich

$$w^\varrho = u^\sigma \nabla_\sigma u^\varrho, \tag{46,28}$$

wo $\nabla_\sigma u^\varrho$ die kovariante Ableitung ist.

Führen wir nun, analog zu (32,01), den Massentensor der geladenen Teilchen

$$\Theta^{\varrho\sigma} = \frac{1}{c^2} \mu^* u^\varrho u^\sigma \tag{46,29}$$

ein und benutzen den Erhaltungssatz für die Ruhmasse (46,25), so können wir schreiben

$$\mu^* w^\varrho = c^2 \nabla_\sigma \Theta^{\varrho\sigma}. \tag{46,30}$$

Drückt man dann in den Bewegungsgleichungen (46,24) die linke Seite in der Form (46,30) aus und verwendet für die rechte den Ausdruck (46,23), so erhält man

$$\nabla_\sigma T^{\varrho\sigma} = 0, \tag{46,31}$$

wo

$$c^2 T^{\varrho\sigma} = \mu^* u^\varrho u^\sigma + U^{\varrho\sigma} \tag{46,32}$$

der mit c^2 multiplizierte Massentensor des aus den Teilchen und dem Feld bestehenden Systems ist.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die allgemein-kovarianten Bewegungsgleichungen eines kontinuierlichen Mediums vom Typus einer idealen Flüssigkeit aufstellen. Bezeichnen wir mit μ^* die invariante Dichte der Ruhmasse (einschließlich des Anteils, der sich infolge einer Änderung der Kompressionsenergie verändert), so erhalten wir, in Analogie zu (32,17), für den vollständigen Energietensor (d. h. für den mit c^2 multiplizierten Massentensor) den Ausdruck

$$c^2 T^{\varrho\sigma} = \left(\mu^* + \frac{p}{c^2}\right) u^\varrho u^\sigma - p g^{\varrho\sigma}, \tag{46,33}$$

der ebenfalls dem Erhaltungssatz (46,31) genügt. Man beachte jedoch, daß jetzt die Gleichung (46,25) nicht mehr erfüllt ist. Es gilt nur eine analoge Gleichung für die Größe ϱ^*, die mit μ^* durch die Beziehung (32,25) zusammenhängt und die invariante Dichte desjenigen Teils der Ruhmasse darstellt, der erhalten bleibt.

In § 31 haben wir eine allgemeine Regel aufgestellt, nach der der Massentensor eine Zustandsfunktion des Systems sein muß und nicht explizite von den Koordinaten abhängen darf. Diese Regel bezog sich auf GALILEIsche Koordinaten, in denen die Größen $g^{\mu\nu}$ vorgegebene konstante Werte haben. Wir können aber diese Regel auch im Fall beliebiger Koordinaten aufrechterhalten, wenn wir die Größen $g^{\mu\nu}$ (deren tensorielle Ableitungen verschwinden) mit zu den Zustandsfunktionen zählen. In allen hier behandelten Beispielen befolgt der Massentensor unsere verallgemeinerte Regel. So sind in der Formel (46,33) folgende Größen (die aber nicht alle voneinander unabhängig sind) Zustandsfunktionen: die Geschwindigkeitskomponenten u^ϱ, der Druck p, die invariante Dichte μ^* und die Komponenten des Fundamentaltensors $g^{\mu\nu}$. Im Energietensor des elektromagnetischen Feldes sind die Feldkomponenten $F_{\alpha\beta}$ und die Größen $g^{\mu\nu}$ Zustandsfunktionen.

§ 47 Das Variationsprinzip für das MAXWELL-LORENTZsche Gleichungssystem

Viele Gleichungen der mathematischen Physik lassen sich als Extremalbedingung für ein Integral, das Wirkungsintegral, formulieren. Ein sehr einfaches Beispiel dafür sind die in § 38 behandelten Gleichungen der geodätischen Linie. Jetzt wollen wir einen komplizierteren Fall betrachten, nämlich das MAXWELL-LORENTZsche Gleichungssystem, welches die Bewegung eines geladenen, kontinuierlichen Mediums beschreibt, dessen Elemente durch das elektromagnetische Feld miteinander wechselwirken.

Die MAXWELL-LORENTZschen Gleichungen für die Feldkomponenten $F_{\mu\nu}$, die Komponenten der Vierergeschwindigkeit des Mediums u^ν, die invariante Dichte der Ruhmasse μ^* und die invariante Ladungsdichte ϱ^* lauten

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0, \tag{47,01}$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \varrho^* u^\mu, \tag{47,02}$$

$$\mu^* w_\alpha + \frac{\varrho^*}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta = 0. \tag{47,03}$$

Dabei sind w_α die kovarianten Komponenten des Beschleunigungsvektors, dessen kontravariante Komponenten

$$w^\alpha = u^\nu \nabla_\nu u^\alpha \tag{47,04}$$

sind. Die invarianten Dichten μ^* und ϱ^* genügen den Gleichungen

$$\nabla_\alpha(\mu^* u^\alpha) = 0, \tag{47,05}$$

$$\nabla_\alpha(\varrho^* u^\alpha) = 0, \tag{47,06}$$

von denen die zweite aus (47,02) folgt.

Wir müssen nun das Wirkungsintegral so wählen, daß die Variation nach den darin auftretenden Funktionen die obigen Gleichungen liefert. Diese Aufgabe wird wesentlich erleichtert, wenn wir Hilfsfunktionen derart einführen, daß einige der Gleichungen identisch erfüllt sind. Die Variation muß dann nur noch die restlichen Gleichungen liefern.

Zu diesem Zweck führen wir Potentiale und die endlichen Verschiebungen der Teilchen des Mediums ein und drücken durch diese Funktionen alle übrigen aus. Durch den Ansatz

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{47,07}$$

werden die Gleichungen (47,01) identisch erfüllt. Als die zu variierenden Funktionen werden wir fortan die Potentiale A_ν betrachten.

Zur Beschreibung der Bewegung des Mediums führen wir die LAGRANGEschen Koordinaten a_1, a_2, a_3 und $a_0 = p$ ein; dabei kann man für a_1, a_2, a_3 zum Beispiel die Anfangskoordinaten eines Teilchens des Mediums wählen; p ist ein Parameter vom Charakter einer Zeit. Variiert werden die Funktionen

$$x_\alpha = f_\alpha(p, a_1, a_2, a_3), \tag{47,08}$$

die bei konstanten a_1, a_2, a_3 und variablem p die Bewegung eines bestimmten Flüssigkeitsteilchens beschreiben. Die Variation dieser Funktionen (d. h. die Variation der endlichen Verschiebungen) nennen wir Verschiebungen schlechthin und bezeichnen sie mit ξ^α:

$$\xi^\alpha = \delta x_\alpha = \delta f_\alpha(p, a_1, a_2, a_3). \tag{47,09}$$

Eine solche Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, daß diese Variationen einen infinitesimalen, kontravarianten Vektor bilden. Die Größen ξ^α werden wir im allgemeinen nicht als Funktionen der LAGRANGEschen Variablen (p, a_1, a_2, a_3), sondern als Funktionen der Koordinaten (x_0, x_1, x_2, x_3) ansehen, die mit den LAGRANGEschen Variablen durch die Beziehungen (47,08) zusammenhängen.

Die Komponenten der Vierergeschwindigkeit lassen sich folgendermaßen durch die LAGRANGEschen Variablen ausdrücken:

$$u^\alpha = c \frac{\partial f_\alpha}{\partial p} \Big/ \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial f_\mu}{\partial p} \frac{\partial f_\nu}{\partial p}}; \tag{47,10}$$

dabei ist die Beziehung

$$u_\alpha u^\alpha = c^2 \qquad (47,11)$$

identisch erfüllt. In (47,10) treten die $x_\alpha = f_\alpha$ auch als Argumente der Größen $g_{\mu\nu}$ auf, so daß bei der Variation der u_α auch die Änderung der $g_{\mu\nu}$ berücksichtigt werden muß.

Die Einführung der LAGRANGEschen Variablen gestattet es, die Kontinuitätsgleichung (47,05) identisch zu erfüllen, und zwar durch die Ausdrücke (47,10) für die Geschwindigkeit und den Ausdruck für die invariante Dichte, der sich aus der Gleichung

$$\mu^* \sqrt{-g} \cdot I = F(a_1, a_2, a_3) \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial f_\mu}{\partial p} \frac{\partial f_\nu}{\partial p}} \qquad (47,12)$$

ergibt; dabei ist I der Absolutbetrag der JACOBIschen Determinante

$$I = \frac{D(x_0, x_1, x_2, x_3)}{D(p, a_1, a_2, a_3)}. \qquad (47,13)$$

Wir bezeichnen mit $\delta_1 u^\alpha$ und $\delta_1 \mu^*$ die Variationen, die einer Änderung der Form der Funktion f_α entsprechen. Die Größe $u^\alpha + \delta_1 u^\alpha$ ist dann die Geschwindigkeit der geänderten Bewegung, genommen im Punkt $x_\alpha + \xi^\alpha$. Ihr Wert im Punkt x_α beträgt

$$u^\alpha + \delta u^\alpha = u^\alpha - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma} \xi^\sigma + \delta_1 u^\alpha. \qquad (47,14)$$

Somit lautet diejenige Variation δu^α, die einer Änderung der Form des Geschwindigkeitsfeldes entspricht,

$$\delta u^\alpha = \delta_1 u^\alpha - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma} \xi^\sigma. \qquad (47,15)$$

Man beachte, daß die Variation $\delta_1 u^\alpha$ die Differenz zweier Vektoren ist, die sich auf verschiedene Punkte beziehen; diese Variation ist also selbst kein Vektor. Dagegen ist die Variation δu^α die Differenz zweier Vektoren im gleichen Punkt und damit selbst ein Vektor. Entsprechend kann man auch die Variationen $\delta_1 \mu^*$ und $\delta \mu^*$ für die invariante Dichte einführen. Diese beiden Variationen hängen folgendermaßen zusammen:

$$\delta \mu^* = \delta_1 \mu^* - \frac{\partial \mu^*}{x^\sigma \partial} \xi^\sigma. \qquad (47,16)$$

Zur Berechnung der Variation $\delta_1 \mu^*$ haben wir die Variation δ_1 beider Seiten der Gleichung (47,12) zu bestimmen. Wir haben

$$\delta_1 \left(\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\partial f_\mu}{\partial p} \frac{\partial f_\nu}{\partial p}} \right) = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p} \frac{\partial f_\beta}{\partial p}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \xi^\sigma \frac{\partial f_\mu}{\partial p} \frac{\partial f_\nu}{\partial p} + g_{\mu\sigma} \frac{\partial f_\mu}{\partial p} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial p} \right). \qquad (47,17)$$

Führt man hierin

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial p} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial p} \tag{47,18}$$

ein und benutzt den Ausdruck (47,10) für die Geschwindigkeit, so erhält man

$$\delta_1\left(\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}\right) = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}} \cdot \frac{1}{c^2}\, u^\mu u^\nu \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\xi^\sigma + g_{\mu\sigma}\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x_\nu}\right). \tag{47,19}$$

Unter Verwendung der Formel

$$\nabla_\nu \xi^\sigma = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x_\nu} + \Gamma^\sigma_{\nu\varrho}\xi^\varrho \tag{47,20}$$

für die kovariante Ableitung können wir dafür schreiben

$$\delta_1\left(\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}}\right) = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}} \cdot \frac{1}{c^2}\, u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47,21}$$

Die Variation der rechten Seite von (47,12) ist diesem Ausdruck proportional. Der variierte Wert der JACOBIschen Determinante ist gleich

$$I + \delta_1 I = \frac{D(x_0+\xi^0, x_1+\xi^1, x_2+\xi^2, x_3+\xi^3)}{D(p, a_1, a_2, a_3)} =$$

$$= \frac{D(x_0+\xi^0, \ldots)}{D(x_0, \ldots)}\, I = \left(1 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha}\right) I. \tag{47,22}$$

Daraus folgt

$$\delta_1 I = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\alpha}\, I. \tag{47,23}$$

Weiter haben wir

$$\delta_1(\sqrt{-g}) = \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}\xi^\alpha \tag{47,24}$$

und folglich

$$\delta_1(\sqrt{-g}\, I) = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\xi^\alpha)}{\partial x_\alpha}\, I \tag{47,25}$$

oder

$$\delta_1(\sqrt{-g}\, I) = \nabla_\alpha \xi^\alpha \sqrt{-g}\, I. \tag{47,26}$$

Unter Benutzung der Formeln (47,21) und (47,26) können wir die Variation δ_1 des Logarithmus beider Seiten von (47,12) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\delta_1 \mu^*}{\mu^*} + \nabla_\sigma \xi^\sigma = \frac{1}{c^2}\, u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47,27}$$

Daraus folgt

$$\delta_1 \mu^* = -\mu^* \nabla_\sigma \xi^\sigma + \frac{\mu^*}{c^2}\, u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma \tag{47,28}$$

und, nach Formel (47,16),

$$\delta\mu^* = -\nabla_\sigma(\mu^* \xi^\sigma) + \frac{\mu^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47,29}$$

Bei der Berechnung der Variation δ_1 des Ausdrucks (47,10) für u^α können wir das Ergebnis (47,21) benutzen. Wir erhalten

$$\delta_1 u^\alpha = u^\nu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\nu} - u^\alpha \frac{1}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma \tag{47,30}$$

und, nach Formel (47,15),

$$\delta u^\alpha = u^\sigma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma} \xi^\sigma - \frac{1}{c^2} u^\alpha u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47,31}$$

Den letzten Ausdruck kann man in der Form

$$\delta u^\alpha = u^\sigma \nabla_\sigma \xi^\alpha - \xi^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha - \frac{1}{c^2} u^\alpha u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma \tag{47,32}$$

schreiben, die zeigt, daß δu^α ein Vektor ist. Dabei gilt

$$u_\alpha \delta u^\alpha = 0, \tag{47,33}$$

in Übereinstimmung mit (47,11).

Da die Ladungsdichte ϱ^* einer Kontinuitätsgleichung von derselben Form (47,06) genügt wie die Massendichte μ^*, hat auch ihre Variation eine zu (47,29) analoge Form, nämlich

$$\delta\varrho^* = -\nabla_\sigma(\varrho^* \xi^\sigma) + \frac{\varrho^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma. \tag{47,34}$$

Kombiniert man die Formeln (47,32) und (47,34), so bekommt man mit Hilfe von

$$\delta(\varrho^* u^\alpha) = \nabla_\sigma(\varrho^* u^\sigma \xi^\alpha - \varrho^* u^\alpha \xi^\sigma) \tag{47,35}$$

oder

$$\delta(\varrho^* u^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} [\sqrt{-g}\, \varrho^* (u^\sigma \xi^\alpha - u^\alpha \xi^\sigma)]. \tag{47,36}$$

Daraus folgt, daß auch der variierte Stromverkehr der Kontinuitätsgleichung genügt, wie zu erwarten war.

Sind die Verschiebungen ξ^α der Geschwindigkeit proportional, d. h. gilt $\xi^\alpha = \tau u^\alpha$, wo τ eine beliebige Funktion der Koordinaten ist, so unterscheidet sich das variierte Geschwindigkeitsfeld nicht vom ursprünglichen. Ebenso unterscheidet sich dann die variierte Dichte nicht von der ursprünglichen. Man prüft dies leicht durch direkte Rechnung; setzt man nämlich $\xi^\alpha = \tau u^\alpha$ in obige Formeln ein, so erhält man $\delta u^\alpha = 0$, $\delta\mu^* = 0$ und $\delta\varrho^* = 0$.

Sobald für die verschiedenen Größen die Variationen, die den Verschiebungen ξ^α entsprechen, berechnet sind, ist es nicht schwer, nachzuprüfen, daß die Feld-

gleichungen (47,02) und die Bewegungsgleichungen (47,03) mit den Extremalbedingungen für das Integral

$$S = \int \left(c^2 \mu^* - \frac{\varrho^*}{c} u^\alpha A_\alpha + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g}\,(dx) \tag{47,37}$$

übereinstimmen. Hierbei haben wir zur Abkürzung

$$(dx) = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \tag{47,38}$$

gesetzt. Das Integral (47,37) wird über ein vierdimensionales Gebiet erstreckt, an dessen Grenzen die Variationen ξ^α und δA_α verschwinden.

Wir berechnen zunächst die Variation des letzten Termes in (47,37). Wie man leicht einsieht, gilt

$$\delta (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = 2 F^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta}. \tag{47,39}$$

Wir haben daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \delta \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) &= \frac{1}{8\pi} \int F^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int F^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \delta A_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \sqrt{-g}\,(dx). \end{aligned} \tag{47,40}$$

Da der Tensor $F^{\alpha\beta}$ antisymmetrisch ist, liefern die beiden Terme in der Klammer das gleiche Ergebnis, so daß wir nach partieller Integration erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \delta \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) &= -\frac{1}{4\pi} \int F^{\alpha\beta} \frac{\partial \delta A_\alpha}{\partial x_\beta} \sqrt{-g}\,(dx) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \right) \delta A_\alpha (dx). \end{aligned} \tag{47,41}$$

Die Variation des zweiten Termes in (47,37) ist wegen (47,36) gleich

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \delta \int \varrho^* u^\alpha A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx) &= -\frac{1}{c} \int \varrho^* u^\alpha \delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx) - \\ &- \frac{1}{c} \int A_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\sigma} [\sqrt{-g}\, \varrho^* (u^\sigma \xi^\alpha - u^\alpha \xi^\sigma)]\,(dx). \end{aligned} \tag{47,42}$$

Durch partielle Integration findet man für das letzte Integral in (47,42) den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int \varrho^* (u^\sigma \xi^\alpha - u^\alpha \xi^\sigma) \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\sigma} \sqrt{-g}\,(dx) &= -\frac{1}{c} \int \varrho^* u^\alpha \xi^\sigma \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\alpha} \right) \sqrt{-g}\,(dx) = \\ &= -\frac{1}{c} \int \varrho^* u^\alpha F_{\sigma\alpha} \xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx). \end{aligned} \tag{47,43}$$

Der zweite Term liefert also

$$-\frac{1}{c}\delta\int \varrho^* u^\alpha A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx) = -\frac{1}{c}\int \varrho^* u^\alpha (\delta A_\alpha + F_{\sigma\alpha}\xi^\sigma)\sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47{,}44)$$

Die Variation des ersten Termes in (47,37) schließlich lautet wegen (47,29)

$$\delta\int c^2\mu^* \sqrt{-g}\,(dx) = \int[-c^2\nabla_\sigma(\mu^*\xi^\sigma) + \mu^* u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma]\sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47{,}45)$$

Nach einer partiellen Integration verschwindet hier der zu c^2 proportionale Term auf der rechten Seite, während der übrigbleibende Term ergibt

$$\delta\int c^2\mu^* \sqrt{-g}\,(dx) = -\int \mu^*(u^\nu\nabla_\nu u_\sigma)\xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47{,}46)$$

Denn wegen der Kontinuitätsgleichung (47,05) gilt

$$\mu^* u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma = \nabla_\nu(\mu^* u_\sigma u^\nu \xi^\sigma) - \mu^*(u^\nu \nabla_\nu u_\sigma)\xi^\sigma, \qquad (47{,}47)$$

und das Integral über den ersten Term dieses Ausdrucks verschwindet. Mit der (47,04) entsprechenden Bezeichnung für die Beschleunigung

$$w_\sigma = u^\nu \nabla_\nu u_\sigma \qquad (47{,}48)$$

erhalten wir

$$\delta\int c^2\mu^* \sqrt{-g}\,(dx) = -\int \mu^* w_\sigma \xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47{,}49)$$

Fassen wir die Formeln (47,41), (47,44) und (47,49) zusammen, so erhalten wir für die Variation des Wirkungsintegrals (47,37) den folgenden endgültigen Ausdruck

$$\delta S = -\int\left(\mu^* w_\sigma + \frac{\varrho^*}{c}F_{\sigma\alpha}u^\alpha\right)\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx) + $$
$$+\int\left(-\frac{\varrho^*}{c}u^\alpha + \frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right)\delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx). \qquad (47{,}50)$$

Darin verschwinden die Koeffizienten von ξ^σ und von δA_α auf Grund der Bewegungsgleichungen (47,03) und der Feldgleichungen (47,02). Damit ist nachgewiesen, daß

$$\delta S = 0 \qquad (47{,}51)$$

ist. Umgekehrt kann man von der Forderung ausgehen, daß das Wirkungsintegral

$$S = \int\left(c^2\mu^* - \frac{\varrho^*}{c}u^\alpha A_\alpha + \frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\,(dx) \qquad (47{,}37)$$

ein Extremum sein soll. Dann folgt wegen der Willkür der Variationen ξ^σ und δA_α, daß die Bewegungsgleichungen und die Feldgleichungen gelten müssen.

Der Umstand, daß eine Variation von der Form $\xi^\alpha = \tau u^\alpha$ das Geschwindigkeitsfeld nicht ändert, äußert sich darin, daß die Beziehung

$$u^\sigma\left(\mu^* w_\sigma + \frac{\varrho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right) = 0 \tag{47,52}$$

besteht, und zwar identisch, d. h. unabhängig von der Gültigkeit der Bewegungsgleichungen. Diese Beziehung zeigt, daß von den vier Bewegungsgleichungen nur drei unabhängig sind. Daß weiterhin eine Variation von der Form $\delta A_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ das elektromagnetische Feld ungeändert läßt, äußert sich darin, daß die Beziehung

$$\nabla_\alpha\left(-\frac{\varrho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi} \nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right) = 0 \tag{47,53}$$

besteht, und zwar ebenfalls identisch, d. h. unabhängig von der Gültigkeit der Feldgleichungen. Diese Beziehung zeigt, daß die vier Feldgleichungen nicht unabhängig voneinander sind, sondern durch die Differentialbeziehung (47,53) verknüpft werden.

§ 48 Das Variationsprinzip und der Energietensor

Wie schon in § 45 angedeutet, sind bei der Formulierung der Relativitätstheorie in beliebigen Koordinaten zwei Standpunkte möglich. Von dem einen Standpunkt aus sieht man die Größen $g_{\mu\nu}$ als gegebene Funktionen der Koordinaten an (die man aus den GALILEIschen Werten durch Transformation der Variablen erhält). Vom zweiten Standpunkt aus dagegen faßt man die Größen $g_{\mu\nu}$ als unbekannte Funktionen auf, die den Gleichungen

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0 \tag{48,01}$$

sowie den schon mehrmals formulierten Ungleichungen genügen. Bei der Berechnung der Variation des Wirkungsintegrals haben wir uns auf den ersten dieser beiden Standpunkte gestellt. Dementsprechend wurden auch die Funktionen $g_{\mu\nu}$ nicht variiert. Wir können aber auch den zweiten Standpunkt wählen und die $g_{\mu\nu}$ ebenfalls variieren. Dann tritt in dem Ausdruck (47,50) für δS zu den beiden bereits gefundenen Termen, die den Variationen ξ^σ und δA_α entsprechen, noch ein dritter Term hinzu, der von der Variation der $g_{\mu\nu}$ herrührt. Diesen Term wollen wir jetzt berechnen.

Die Variationen der einzelnen Größen, die von der Variation der $g_{\mu\nu}$ herrühren, bezeichnen wir mit dem Symbol δ_g. In dem Ausdruck (47,12) gehen die Größen $g_{\mu\nu}$ weder in die JACOBIsche Determinante I noch in die Funktion F ein; deshalb ist

$$\frac{\delta_g(\mu^* \sqrt{-g})}{\mu^* \sqrt{-g}} = \frac{\frac{\partial f_\mu}{\partial p}\frac{\partial f_\nu}{\partial p}\delta g_{\mu\nu}}{2 g_{\alpha\beta}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\frac{\partial f_\beta}{\partial p}} = \frac{1}{2c^2} u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} \tag{48,02}$$

und damit

$$\delta_g(\mu^* \sqrt{-g}) = \frac{\mu^* \sqrt{-g}}{2\,c^2}\, u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu}. \tag{48,03}$$

Schreibt man (47,12) mit ϱ^* statt μ^* und multipliziert mit (47,10), so sieht man leicht ein, daß

$$\delta_g(\varrho^* u^\alpha \sqrt{-g}) = 0 \tag{48,04}$$

und, da jetzt A_α nicht variiert wird, auch

$$\delta_g(\varrho^* u^\alpha A_\alpha \sqrt{-g}) = 0 \tag{48,05}$$

gilt. Ferner ist

$$\delta_g(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta} \delta_g F^{\alpha\beta}, \tag{48,06}$$

denn die $F_{\alpha\beta}$ werden nicht variiert, während die Variation der $F^{\alpha\beta}$ insofern berücksichtigt werden muß, als diese Größen mit den $F_{\alpha\beta}$ durch die Formeln

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} \tag{48,07}$$

zusammenhängen, welche die Größen $g_{\mu\nu}$ enthalten. Die Ausrechnung liefert

$$F_{\alpha\beta}\delta_g F^{\alpha\beta} = 2\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu} g_{\mu\nu}\delta g^{\beta\nu} = -2\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{48,08}$$

Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta_g \sqrt{-g} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{48,09}$$

erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta_g(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) = \left(-\,2\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + \frac{1}{2}\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} = 8\pi\, U^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \tag{48,10}$$

wo $U^{\mu\nu}$ der Ausdruck (46,22) für den Energietensor des elektromagnetischen Feldes ist.

Die Formeln (48,03), (48,05) und (48,10) ergeben für den Zusatzterm in der Variation des Wirkungsintegrals den Ausdruck

$$\delta_g S = \frac{1}{2}\int (\mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu})\,\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx). \tag{48,11}$$

Nach (46,32) ist aber der Ausdruck in der Klammer des Integranden der mit c^2 multiplizierte Massentensor des aus den Teilchen und dem Feld bestehenden Systems

$$c^2\, T^{\mu\nu} = \mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu}. \tag{48,12}$$

Der Ausdruck für den Massentensor ergibt sich somit ganz von selbst aus der Variation des Wirkungsintegrals nach den Komponenten des Fundamentaltensors.

Die vollständige Variation des Wirkungsintegrals nach sämtlichen darin auftretenden Funktionen lautet

$$\delta S = \frac{1}{2}\int (\mu^* u^\mu u^\nu + U^{\mu\nu})\delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx) -$$
$$-\int\left(\mu^* w_\sigma + \frac{\varrho^*}{c} F_{\sigma\alpha} u^\alpha\right)\xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx) +$$
$$+\int\left(-\frac{\varrho^*}{c} u^\alpha + \frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right)\delta A_\alpha \sqrt{-g}\,(dx). \tag{48,13}$$

Die Variationen ξ^σ und δA_α waren dabei völlig willkürlich; setzen wir die Koeffizienten dieser Ausdrücke gleich Null, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen und die Feldgleichungen. Dagegen sind die Variationen $\delta g_{\mu\nu}$ nicht willkürlich, da die Größen $g_{\mu\nu}$ den Gleichungen

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0 \tag{48,01}$$

genügen müssen. Wir wollen deshalb die Variationen $\delta g_{\mu\nu}$ durch unabhängige, willkürliche Größen ausdrücken.

Die allgemeinste Form der Funktionen $g_{\mu\nu}$, die den Gleichungen (48,01) genügen, ergibt sich durch eine Koordinatentransformation aus den GALILEIschen Werten dieser Funktionen. Folglich gehen alle zulässigen, d. h. mit den Gleichungen (48,01) zu vereinbarenden Formen der Funktionen $g_{\mu\nu}$ durch Koordinatentransformationen auseinander hervor. Die zulässigen infinitesimalen Variationen dieser Funktionen müssen also einer infinitesimalen Koordinatentransformation entsprechen.

Die infinitesimale Koordinatentransformation schreiben wir in der Form

$$x'_\alpha = x_\alpha + \eta^\alpha, \tag{48,14}$$

wo η^α ein beliebiger infinitesimaler Vektor ist, dessen Komponenten Funktionen der Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 sind. Nach der allgemeinen Transformationsformel für einen Tensor haben wir

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} \tag{48,15}$$

und, bis auf infinitesimale Größen höherer Ordnung,

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\alpha}\frac{\partial\eta^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial\eta^\mu}{\partial x_\alpha}. \tag{48,16}$$

Um die Variation, d. h. die Änderung der Form der Funktion $g^{\mu\nu}$ zu erhalten, müssen wir $g'^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ für gleiche Werte der Argumente vergleichen. Wegen

$$g'^{\mu\nu}(x') = g'^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\eta^\sigma \tag{48,17}$$

(in dem Korrekturglied kann man $g^{\mu\nu}$ statt $g'^{\mu\nu}$ schreiben) erhalten wir

$$g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) = \delta g^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\alpha}\frac{\partial\eta^\mu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial\eta^\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\eta^\sigma. \tag{48,18}$$

Diese Formel kann man auch folgendermaßen schreiben:

$$\delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\eta^\nu + g^{\nu\alpha}\nabla_\alpha\eta^\mu, \tag{48,19}$$

oder kürzer

$$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^\mu\eta^\nu + \nabla^\nu\eta^\mu. \tag{48,20}$$

Die entsprechende Formel

$$\delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu\eta_\nu - \nabla_\nu\eta_\mu \tag{48,21}$$

läßt sich entweder unabhängig (auf analogem Wege) oder aus der Beziehung $g_{\mu\alpha}g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\alpha$ herleiten.

Schreiben wir die Formel (48,11) in der Form

$$\delta_g S = \frac{c^2}{2}\int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) \tag{48,22}$$

und setzen darin (48,21) ein, so erhalten wir

$$\delta_g S = -\frac{c^2}{2}\int T^{\mu\nu}(\nabla_\mu\eta_\nu + \nabla_\nu\eta_\mu)\sqrt{-g}\,(dx) = -c^2\int T^{\mu\nu}\nabla_\nu\eta_\mu\sqrt{-g}\,(dx), \tag{48,23}$$

denn der Tensor $T^{\mu\nu}$ ist symmetrisch. Durch partielle Integration ergibt sich

$$\delta_g S = c^2\int(\nabla_\nu T^{\mu\nu})\eta_\mu\sqrt{-g}\,(dx). \tag{48,24}$$

Setzt man nun als bekannt voraus, daß die Divergenz des Massentensors verschwindet, so kann man aus der Formel (48,24) schließen, daß das Wirkungsintegral auch hinsichtlich der zulässigen Variationen der Größen $g_{\mu\nu}$ ein Extremum ist. Man kann aber die Schlußweise auch umkehren und aus den Eigenschaften des Wirkungsintegrals die Gleichung

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{48,25}$$

ableiten; dabei ist $T^{\mu\nu}$ der Tensor, der in dem Ausdruck für die vollständige Variation des Wirkungsintegrals als Koeffizient von $\delta g_{\mu\nu}$ auftritt. Das Wirkungsintegral ist nämlich eine Invariante (Skalar) und bleibt deshalb bei einer beliebigen, also auch bei einer infinitesimalen Koordinatentransformation ungeändert. Der Ausdruck für die vollständige Variation

$$\begin{aligned}\delta S = c^2\int(\nabla_\nu T^{\mu\nu})\eta_\mu\sqrt{-g}\,(dx) &- \\ -\int\left(\mu^* w_\sigma + \frac{\varrho^*}{c}F_{\sigma\alpha}u^\alpha\right)\xi^\sigma\sqrt{-g}\,(dx) &+ \\ +\int\left(-\frac{\varrho^*}{c}u^\alpha + \frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta}\right)\delta A_\alpha\sqrt{-g}\,(dx)&\end{aligned} \tag{48,26}$$

ist daher trivialerweise gleich Null, wenn die Variationen ξ^σ und δA_α von einer infinitesimalen Transformation η_μ herrühren. (Das folgt schon allein aus der Invarianzeigenschaft und hängt nicht davon ab, ob S das Wirkungsintegral oder irgendein anderes invariantes Integral ist.) Ist nun S das Wirkungsintegral, so sind in dem Ausdruck für δS die Koeffizienten von ξ^σ und δA_α für sich gleich Null. Folglich müssen dann im Ausdruck für δS auch die übrigen Glieder verschwinden und wir haben

$$\delta_g S = c^2 \int (\nabla_\nu T^{\mu\nu}) \eta_\mu \sqrt{-g}\,(dx) = 0, \tag{48,27}$$

und zwar für beliebige Größen η_μ. Daraus folgt dann die Gleichung (48,25).

Daß der als Koeffizient von $\delta g_{\mu\nu}$ definierte Tensor $T^{\mu\nu}$ der Massentensor (oder diesem proportional) ist, folgt aus dem in § 31 formulierten Satz über die Eindeutigkeit des Massentensors; dieser Satz gilt unter der Bedingung, daß die Komponenten des Massentensors Zustandsfunktionen des Systems sind (zu den Zustandsfunktionen gehören hier auch die $g_{\mu\nu}$). Im soeben betrachteten Fall der MAXWELL-LORENTZschen Gleichungen haben wir letzteres durch explizite Berechnung bestätigt [Formel (48,12)].

Die obigen Überlegungen wollen wir an einem weiteren Beispiel veranschaulichen und betrachten dazu die Gleichungen der Hydrodynamik. Für diese lautet das Wirkungsintegral

$$S = \int (\varrho^* c^2 + \varrho^* \Pi) \sqrt{-g}\,(dx). \tag{48,28}$$

Hier ist ϱ^* die invariante Dichte desjenigen Teiles der Ruhmasse, der sich während der Bewegung nicht ändert und dem Erhaltungssatz

$$\nabla_\nu (\varrho^* u^\nu) = 0 \tag{48,29}$$

genügt (vgl. § 32). Π ist die auf die Masseneinheit bezogene potentielle Energie der elastischen Kompression der Flüssigkeit

$$\Pi = \int_0^p \frac{dp}{\varrho^*} - \frac{p}{\varrho^*}; \qquad d\Pi = \frac{p\,d\varrho^*}{\varrho^{*2}}, \tag{48,30}$$

wobei p der Druck ist.

Die Variation des Integrals S läßt sich unter Benutzung der oben gefundenen Ausdrücke für die Variation der Dichte leicht berechnen. Auf Grund der Formeln (47,29), (48,03) und (48,09), in denen wir jetzt ϱ^* statt μ^* schreiben, erhalten wir für die vollständige Variation

$$\delta\varrho^* = -\nabla_\sigma(\varrho^* \xi^\sigma) + \frac{\varrho^*}{c^2} u_\sigma u^\nu \nabla_\nu \xi^\sigma + \frac{\varrho^*}{2}\left(\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} - g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \tag{48,31}$$

und wie oben

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \tag{48,32}$$

Setzen wir

$$F(\varrho^*) = \varrho^* c^2 + \varrho^* \Pi, \tag{48,33}$$

so ergibt sich

$$\delta S = \delta \int F(\varrho^*) \sqrt{-g}\,(dx) = \\ = \int \left[F'(\varrho^*)\,\delta\varrho^* + F(\varrho^*) \frac{\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right] \sqrt{-g}\,(dx). \tag{48,34}$$

Setzt man hierin die Ausdrücke (48,31) und (48,32) ein, so bekommt man nach partieller Integration

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \left[(F - \varrho^* F')\, g^{\mu\nu} + \varrho^* F' \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right] \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx) + \\ + \int \left[\varrho^* F'' \left(\frac{\partial \varrho^*}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2} \frac{\partial \varrho^*}{\partial x_\nu} \right) - \frac{1}{c^2} \varrho^* F' w_\sigma \right] \xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx), \tag{48,35}$$

wobei w_σ die Beschleunigung (47,48) ist. Unter Benutzung der aus (48,30) und (48,33) folgenden Formeln

$$\varrho^* F' - F = p; \qquad \varrho^* F''\, d\varrho^* = dp, \tag{48,36}$$

können wir statt (48,35) schreiben

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \left\{ -p\, g^{\mu\nu} + \left[\varrho^* + \frac{1}{c^2} (\varrho^* \Pi + p) \right] u^\mu u^\nu \right\} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx) + \\ + \int \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x_\nu} - \left[\varrho^* + \frac{1}{c^2} (\varrho^* \Pi + p) \right] w_\sigma \right\} \xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx). \tag{48,37}$$

Daraus ersieht man, daß die Bewegungsgleichungen folgende Gestalt haben

$$\left[\varrho^* + \frac{1}{c^2} (\varrho^* \Pi + p) \right] w_\sigma = \frac{\partial p}{\partial x_\sigma} - \frac{u_\sigma u^\nu}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x_\nu}, \tag{48,38}$$

und daß der Energietensor lautet

$$c^2 T^{\mu\nu} = \left[\varrho^* + \frac{1}{c^2} (\varrho^* \Pi + p) \right] u^\mu u^\nu - p\, g^{\mu\nu}. \tag{48,39}$$

Dabei ist die Divergenz dieses Tensors gleich Null.

Diese Gleichungen sind die Verallgemeinerung der Ausdrücke (32,29) und (32,28) und gehen in GALILEIschen Koordinaten in diese über.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß, mathematisch betrachtet, bei weitem nicht jedes Gleichungssystem aus einem Variationsprinzip ableitbar ist. Der Umstand, daß sich die Grundgleichungen der mathematischen Physik, die konservative Systeme beschreiben, aus Variationsprinzipien ableiten lassen, stellt eine bemerkenswerte Eigenschaft der betreffenden Gleichungssysteme dar.

§ 49 Die Integralform der Erhaltungssätze in beliebigen Koordinaten

Wie wir wissen, genügt der Massentensor $T^{\mu\nu}$ den Gleichungen

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{49,01}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichungen besteht darin, daß sie die Erhaltungssätze für Energie und Impuls und für den Drehimpuls, sowie das Bewegungsgesetz für den Schwerpunkt eines abgeschlossenen, konservativen Systems ausdrücken müssen. Ausführlich geschrieben lauten die Gleichungen (49,01) [vgl. (41,24)]

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\varrho\nu} T^{\varrho\nu} + \Gamma^\nu_{\varrho\nu} T^{\mu\varrho} = 0 \tag{49,02}$$

oder, wenn man den dritten Term mit dem ersten zusammenfaßt,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu})}{\partial x_\nu} + \Gamma^\mu_{\varrho\nu} T^{\varrho\nu} = 0. \tag{49,03}$$

Da hier ein Term außerhalb des Ableitungssymbols stehenbleibt, ist der Übergang von der Differentialform der Erhaltungssätze zur Integralform in beliebigen Koordinaten nicht so einfach wie in GALILEIschen Koordinaten (vgl. § 31). Deshalb wollen wir die Frage nach der Existenz einer Integralform der Erhaltungssätze etwas genauer untersuchen.

Wir führen einen Vektor φ_μ ein und integrieren die Gleichung

$$\nabla_\nu (T^{\mu\nu}\varphi_\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}\varphi_\mu) \tag{49,04}$$

über ein dreidimensionales Volumen, an dessen Grenzen die Größen $T^{\mu\nu}$ verschwinden. Das ergibt

$$\int \nabla_\nu (T^{\mu\nu}\varphi_\mu)\sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{d}{dx_0}\int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{49,05}$$

Ist nun $T^{\mu\nu}$ der Massentensor, so ist er symmetrisch und seine Divergenz ist gleich Null. Für einen solchen Tensor kann man die obige Gleichung schreiben

$$\frac{d}{dx_0}\int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$
$$= \frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}(\nabla_\nu\varphi_\mu + \nabla_\mu\varphi_\nu)\sqrt{-g}\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{49,06}$$

Die Größe

$$I = \int T^{\mu 0}\varphi_\mu \sqrt{-g}\, dx_1 dx_2 dx_3 \tag{49,07}$$

ist konstant (d. h. unabhängig von der Koordinate x_0), falls der Vektor φ_μ den Gleichungen

$$\nabla_\nu \varphi_\mu + \nabla_\mu \varphi_\nu = 0 \tag{49,08}$$

genügt. Diese Gleichungen wollen wir jetzt untersuchen, und zwar für den allgemeinen Fall, daß der Krümmungstensor vierter Stufe nicht notwendig verschwindet.

Wir setzen

$$\Delta_\nu \varphi_\mu = \varphi_{\mu\nu}. \tag{49,09}$$

Wegen (49,08) ist $\varphi_{\mu\nu}$ ein antisymmetrischer Tensor. Wir bilden seine kovariante Ableitung. Unter Benutzung von (49,08) können wir schreiben

$$\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\varphi_\sigma + \frac{1}{2}(\nabla_\sigma \Delta_\nu - \nabla_\nu \nabla_\sigma)\varphi_\mu - \frac{1}{2}(\nabla_\sigma \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\sigma)\varphi_\nu. \tag{49,10}$$

Wenden wir darauf die Formel (43,16) für die Differenz der kovarianten Ableitungen an und benutzen die Symmetrieeigenschaften des Tensors $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$, so erhalten wir

$$\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu} = R^{\varrho}_{\sigma,\mu\nu} \varphi_\varrho. \tag{49,11}$$

Die Gleichungen (49,08) lassen sich also durch das System (49,09) und (49,11) ersetzen, das einem Gleichungssystem in vollständigen Differentialen äquivalent ist.[1]) Man kann zeigen, daß dieses System vollständig integrierbar ist, wenn die Beziehung

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = K(g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}) \tag{49,12}$$

mit einem konstanten K gilt. Ein Raum, dessen Krümmungstensor die Form (49,12) hat, wird als Raum konstanter Krümmung bezeichnet (er stellt die vierdimensionale Verallgemeinerung des LOBATSCHEWSKY-Raumes dar). Die Konstante K nennt man Krümmungskonstante. Sind die Bedingungen für die vollständige Integrierbarkeit erfüllt, so werden die Werte der 10 Funktionen φ_μ und $\varphi_{\mu\nu}$ im ganzen Raum durch die Vorgabe ihrer Werte an einer Stelle festgelegt, so daß die allgemeine Lösung des Systems (49,09), (49,11) gerade 10 willkürliche Konstanten enthält.

Uns interessiert der Fall

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0, \tag{49,13}$$

der sich aus (49,12) für $K = 0$ ergibt. (Ein Raum, für den $R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0$ ist, wird entsprechend als Raum ohne Krümmung oder als ebener Raum bezeichnet.) Für eine ebene Raum-Zeit (mit der wir es in der Relativitätstheorie zu tun haben) können wir die 10 Integrale des Systems (49,08) sofort angeben. Es seien x_0', x_1', x_2', x_3' GALILEIsche Koordinaten. Dann können wir die vier Vektoren

$$\varphi_\mu^{(0)} = \frac{\partial x_0'}{\partial x_\mu}; \quad \varphi_\mu^{(1)} = \frac{\partial x_1'}{\partial x_\mu}; \quad \varphi_\mu^{(2)} = \frac{\partial x_2'}{\partial x_\mu}; \quad \varphi_\mu^{(3)} = \frac{\partial x_3'}{\partial x_\mu} \tag{49,14}$$

---

[1]) Über Systeme in vollständigen Differentialen vgl. z. B. das Buch von LEVI-CIVITA [16].

einführen. (Diese Größen sind bezüglich der ungestrichenen Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 Vektoren; die GALILEIschen Koordinaten selbst werden hier als Skalare aufgefaßt.) Jeder dieser vier Vektoren genügt wegen (42,16) den Gleichungen

$$\nabla_\nu \varphi_\mu^{(\alpha)} = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{49,15}$$

und folglich auch den Gleichungen (49,08). Ferner können wir die 6 Vektoren

$$\varphi_\mu^{(\alpha\beta)} = x'_\alpha \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\mu} - x'_\beta \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \tag{49,16}$$

einführen, deren jeder den Gleichungen

$$\nabla_\nu \varphi_\mu^{(\alpha\beta)} + \nabla_\mu \varphi_\nu^{(\alpha\beta)} = 0, \tag{49,17}$$

d. h. den Gleichungen (49,08) genügt.

Setzen wir in den Ausdruck (49,07) die Vektoren (49,14) ein, so erhalten wir, nach Multiplikation mit c, die konstanten Integrale

$$P'^\alpha = c \int T^{\mu 0} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \sqrt{-g}\, d x_1 d x_2 d x_3. \tag{49,18}$$

Setzen wir in denselben Ausdruck die Vektoren (49,16) ein, so erhalten wir die konstanten Integrale

$$M'^{\alpha\beta} = c \int T^{\mu 0} \left(x'_\alpha \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\mu} - x'_\beta \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \right) \sqrt{-g}\, d x_1 d x_2 d x_3. \tag{49,19}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Integrale erhellt aus deren Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken in GALILEIschen Koordinaten [Formeln (31,02), (31,03) sowie auch (31,08), (31,09)]: Die Größe P'^0 ist die durch c dividierte Energie (oder die mit c multiplizierte Masse) des Systems, die Größen P'^i ($i = 1, 2, 3$) sind die Impulskomponenten, die Größen M'^{0i} sind die Integrale der Schwerpunktsbewegung und die Größen M'^{ik} die Drehimpulsintegrale des Systems.

Die Komponenten P'^α des konstanten Vektors und die Komponenten $M'^{\alpha\beta}$ des konstanten, antisymmetrischen Tensors beziehen sich auf ein GALILEIsches Koordinatensystem. Einem konstanten Vektor oder Tensor in einem GALILEIschen System entspricht aber in einem beliebigen Koordinatensystem ein *freier* Vektor oder Tensor, d. h. ein solcher, dessen kovariante Ableitungen alle gleich Null sind. Wir können also den Bewegungsintegralen in einem beliebigen Koordinatensystem den freien Vektor

$$P_\nu = \sum_{\alpha=0}^{3} e_\alpha P'^\alpha \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\nu} \tag{49,20}$$

und den freien antisymmetrischen Tensor

$$M_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} e_\alpha e_\beta M'^{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} \tag{49,21}$$

zuordnen. Diese Größen sind Funktionen der Koordinaten und der Zeit und genügen folgenden Gleichungen

$$\nabla_\sigma P_\nu = 0; \quad \nabla_\sigma M_{\mu\nu} = 0. \tag{49,22}$$

Die Werte dieser Funktionen in einem beliebigen Punkt sind durch ihre Werte in einem einzigen Punkt festgelegt. Deshalb ist die Zahl der Konstanten, von denen die Funktionen P_ν und $M_{\mu\nu}$ abhängen, gleich der Anzahl dieser Funktionen, d. h. gleich 10. Die Rolle dieser Integrationskonstanten spielen die Bewegungskonstanten P'^α und $M'^{\alpha\beta}$.

Bei den obigen Überlegungen kam den GALILEIschen Koordinaten nur die Bedeutung von Hilfsfunktionen zu, durch welche die Vektoren φ_μ, die den verschiedenen Integralen der Gleichungen (49,08) entsprachen, ausgedrückt wurden. Natürlich wäre es weitaus einfacher, alle Betrachtungen direkt in GALILEIschen Koordinaten durchzuführen (wie wir es in Kapitel II taten). Unsere komplizierteren Überlegungen sollten aber zeigen, daß auch die Integralform der Erhaltungssätze unmittelbar aus den in beliebigen Koordinaten geschriebenen Gleichungen gewonnen werden kann.

Mit Hilfe der in den beiden letzten Abschnitten entwickelten Formeln lassen sich auch die Bedingungen für die Homogenität der Raum-Zeit leicht in allgemeinen Koordinaten formulieren. Das kann in der folgenden Weise geschehen. Wie in der Einleitung erwähnt wurde, ist die Raum-Zeit homogen, wenn eine 10-parametrige Transformationsgruppe existiert, welche die Funktionalform der $g_{\mu\nu}$ unverändert läßt. (Das heißt: Die nach der Tensorregel transformierten Größen $g_{\mu\nu}$ müssen von den neuen Koordinaten in derselben Weise abhängen, wie die ursprünglichen $g_{\mu\nu}$ von den alten Koordinaten.) Für eine infinitesimale Transformation (48,14), die zu dieser Gruppe gehört, haben wir $\delta g_{\mu\nu} = 0$, wo $\delta g_{\mu\nu}$ die Bedeutung (48,21) hat. Nun sind die Gleichungen $\delta g_{\mu\nu} = 0$ für die Funktionen η_ν von genau derselben Form wie die Gleichungen (49,08) für die Funktionen φ_ν, und für die letzteren Gleichungen hat die Bedingung der vollständigen Integrierbarkeit die Form (49,12). Gleichung (49,12) ist somit die notwendige und hinreichende Bedingung für die Homogenität der Raum-Zeit.

Gleichzeitig ist aber (49,12) die Bedingung dafür, daß die Erhaltungssätze für den Massentensor in Integralform geschrieben werden können. Die Existenz der eigentlichen (integrierten) Erhaltungssätze hängt also mit der Homogenität der Raum-Zeit zusammen.

KAPITEL V

GRUNDLAGEN DER GRAVITATIONSTHEORIE

§ 50 Das verallgemeinerte GALILEIsche Gesetz

Eine Eigentümlichkeit des Gravitationsfeldes, die es von allen anderen in der Physik bekannten Feldern unterscheidet, ist die Art seines Einflusses auf die Bewegung eines freien Körpers (Massenpunktes). Bei gleichen Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit) bewegen sich alle freien Körper, unabhängig von ihrer Masse, in einem Gravitationsfeld in der gleichen Weise. Dieses grundlegende Gesetz läßt sich als eine Verallgemeinerung des GALILEIschen Gesetzes auffassen, wonach alle Körper mit der gleichen Geschwindigkeit fallen, wenn sie keinen Widerstand erleiden.

Wir wollen an dieser Stelle an die Definition der trägen und der wägbaren (oder schweren) Masse erinnern. Die träge Masse ist das Maß für die Fähigkeit eines Körpers, sich einer Beschleunigung zu widersetzen: Bei gegebener Kraft ist die Beschleunigung der trägen Masse umgekehrt proportional. Die wägbare oder schwere Masse ist das Maß für die Fähigkeit eines Körpers, ein Gravitationsfeld zu erzeugen oder von einem solchen beeinflußt zu werden: In einem gegebenen Gravitationsfeld ist die Kraft, die ein Körper erfährt, seiner schweren Masse proportional.

Mit Hilfe dieser Definitionen läßt sich das oben formulierte verallgemeinerte GALILEIsche Gesetz auch als das Gesetz der Gleichheit von träger und schwerer Masse ausdrücken.

Nach NEWTON ist das Gravitationsfeld durch das Gravitationspotential $U(x, y, z)$ gekennzeichnet. Das von einer kugelsymmetrischen Masse M erzeugte Potential ist für Punkte außerhalb der Masse gleich

$$U = \frac{\gamma M}{r}, \tag{50,01}$$

wo r der Abstand vom Mittelpunkt der Masse ist. Die Größe γ ist die NEWTONsche Gravitationskonstante, die im CGS-System den Wert

$$\gamma = \frac{1}{15000000} \frac{\text{cm}^3}{\text{g sec}^2} \tag{50,02}$$

hat. Die Größe U hat also die Dimension eines Geschwindigkeitsquadrates. Es sei schon hier bemerkt, daß in allen in der Natur vorkommenden Fällen, selbst an der Oberfläche der Sonne und der überdichten Sterne, die Größe U sehr klein gegen das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist

$$U \ll c^2. \tag{50,03}$$

Im allgemeinen Fall einer beliebigen Massenverteilung mit der Dichte ϱ genügt das von den Massen erzeugte NEWTONsche Potential U der POISSON-Gleichung

$$\Delta U = -4\pi\gamma\varrho. \tag{50,04}$$

Das NEWTONsche Potential U ist durch diese Gleichung, zusammen mit den Stetigkeits- und Randbedingungen, vollständig festgelegt. Diese Bedingungen lauten: Die Funktion U und ihre ersten Ableitungen müssen im ganzen Raum endlich, eindeutig und stetig sein und im Unendlichen verschwinden.

Wir nehmen nun an, daß das NEWTONsche Potential U vorgegeben sei. Die Kraft, die ein Körper (Massenpunkt) mit der schweren Masse $(m)_s$ in dem Gravitationsfeld mit dem Potential U erfährt, beträgt

$$\mathfrak{F} = (m)_s \operatorname{grad} U. \tag{50,05}$$

Andererseits gilt nach den NEWTONschen Bewegungsgleichungen

$$(m)_t\,\mathfrak{w} = \mathfrak{F}. \tag{50,06}$$

Es ist also

$$(m)_t\,\mathfrak{w} = (m)_s \operatorname{grad} U. \tag{50,07}$$

Nach dem verallgemeinerten GALILEIschen Gesetz hängt nun die Bewegung eines Körpers in einem Gravitationsfeld nicht von seiner Masse ab. Deshalb hat das Verhältnis der trägen Masse $(m)_t$ zur schweren Masse $(m)_s$ für alle Körper den gleichen Wert, d. h. es ist eine universelle Konstante, deren Wert nur von der Wahl der Einheiten für die träge und die schwere Masse abhängen kann. Bei der üblichen Wahl der Einheiten gilt einfach

$$(m)_t = (m)_s = m, \tag{50,08}$$

d. h. träge und schwere Masse sind einander gleich.

Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ist eine derart gewohnte Tatsache, daß man sie meist für selbstverständlich hält. So einfach liegen die Dinge jedoch nicht: Diese Gleichheit ist durchaus ein besonderes, und zwar ein sehr wichtiges Naturgesetz, das eng mit dem verallgemeinerten GALILEIschen Gesetz zusammenhängt.

Infolge der Gleichheit von träger und schwerer Masse haben die Bewegungsgleichungen

$$\mathfrak{w} = \operatorname{grad} U \tag{50,09}$$

universelle Bedeutung, und darin drückt sich eben das verallgemeinerte GALILEIsche Gesetz aus.

Wir erwähnen noch, daß sich die Bewegungsgleichungen (50,09) aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v^2 + U\right) dt = 0 \tag{50,10}$$

ableiten lassen. Dies wird uns beim Aufbau der Gravitationstheorie als Hinweis dienen.

§ 51 Das Quadrat des Intervalls in der NEWTONschen Näherung

Das Phänomen der allgemeinen Gravitation erfordert eine Erweiterung derjenigen Theorie von Raum und Zeit, welche wir in den vorangegangenen Kapiteln dargestellt haben. Die Notwendigkeit einer solchen Erweiterung ergibt sich aus folgender Überlegung.

Schreibt man die Gleichung für die Ausbreitung einer Wellenfront in der Form

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]=0, \qquad (51,01)$$

so besagt diese Gleichung, daß sich das Licht geradlinig fortpflanzt. Das Licht besitzt aber Energie; nach dem Satz von der Proportionalität von Masse und Energie kommt also dem Licht auch eine Masse zu. Nach dem Gravitationsgesetz wird nun andererseits jede Masse, die sich in einem Gravitationsfeld befindet, durch dieses Feld beeinflußt; ihre Bewegung kann dann im allgemeinen nicht geradlinig sein. Es ist also zu erwarten, daß auch ein Lichtstrahl im Gravitationsfeld nicht geradlinig bleibt.[1]) Daraus folgt, daß in einem Gravitationsfeld die Gleichung für die Ausbreitung einer Wellenfront von der oben angegebenen Form etwas abweichen muß. Wie wir in den vorangegangenen Kapiteln sahen, ist aber diese Gleichung das grundlegende Charakteristikum der Eigenschaften von Raum und Zeit. Daraus ergibt sich der Schluß, daß ein Gravitationsfeld die Eigenschaften von Raum und Zeit beeinflussen muß. Diese Schlußfolgerung wird in der Gravitationstheorie, die wir jetzt entwickeln wollen, auch wirklich gezogen.

In Kapitel I wurde gezeigt, daß der Gleichung (51,01) für die Ausbreitung einer Wellenfront, unter gewissen Zusatzannahmen, der Ausdruck

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (51,02)$$

für das Quadrat des Intervalls entspricht. Der Einfluß des Gravitationsfeldes auf die Eigenschaften von Raum und Zeit muß sich nun darin äußern, daß die Koeffizienten in der Gleichung für die Ausbreitung einer Wellenfront und in dem Ausdruck für das Quadrat des Intervalls von den konstanten Werten abweichen, die sie in den Formeln (51,01) und (51,02) haben. Wir wollen nun die angenäherte Form des Quadrates des Intervalls in einem Gravitationsfeld mit dem NEWTONschen Potential U bestimmen. Dabei stützen wir uns auf das verallgemeinerte GALILEIsche Gesetz. Die grundlegende Tatsache, daß das Bewegungsgesetz eines freien Körpers im Gravitationsfeld universell ist und nicht von den Eigenschaften des Körpers abhängt, gestattet uns, einen Zusammenhang zwischen diesem Bewegungsgesetz und der Metrik der Raum-Zeit zu finden.

In § 38 haben wir die Gleichungen der geodätischen Linie in einer Raum-Zeit mit gegebener Metrik untersucht. Wir können nun versuchen, die Metrik so zu wählen, daß die Gleichungen der geodätischen Linie näherungsweise mit den NEWTONschen Bewegungsgleichungen eines freien Körpers im vorgegebenen Gravitationsfeld übereinstimmen. Gelingt dies, so könnten wir die Hypothese auf-

---

[1]) Eine Theorie der Ablenkung eines Lichtstrahls im Gravitationsfeld wird im § 59 gegeben.

stellen, daß sich ein freier Körper (Massenpunkt) in einer Raum-Zeit mit gegebener Metrik auf einer geodätischen Linie bewegt, und hätten damit den gesuchten Zusammenhang zwischen dem Bewegungsgesetz und der Metrik gefunden.

Die Gleichungen der geodätischen Linie lassen sich, wie wir wissen, aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int ds = 0 \tag{51,03}$$

ableiten. Hat das Quadrat des Intervalls die Form (51,02), so wird

$$ds = \sqrt{c^2 - v^2}\, dt \tag{51,04}$$

und bei kleinen Geschwindigkeiten

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c}\right) dt. \tag{51,05}$$

Setzen wir die Ausdrücke (51,04) und (51,05) für ds in das Variationsprinzip (51,03) ein, so erhalten wir eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, d. h. die freie Bewegung ohne Gravitationsfeld. Wir nehmen nun an, daß für kleine Geschwindigkeiten und schwache Gravitationsfelder ($U \ll c^2$) der Ausdruck für das Intervall die Form

$$ds = \sqrt{c^2 - 2U - v^2}\, dt \tag{51,06}$$

oder

$$ds = \left[c - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2} v^2 + U\right)\right] dt \tag{51,07}$$

hat. Wegen des Umstandes, daß eine additive Konstante und ein konstanter Faktor in der LAGRANGE-Funktion keine Rolle spielen, liefert das Variationsprinzip (51,03) mit dem Wert (51,07) für ds genau dasselbe wie das am Schluß von § 50 formulierte Variationsprinzip

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v^2 + U\right) dt = 0, \tag{51,08}$$

nämlich die Gleichungen für die freie Bewegung eines Körpers in einem Gravitationsfeld. Wegen des nämlichen Umstandes würde freilich die Gleichung (51,08) aus (51,03) und (51,06) auch für beliebige (genügend große) Werte der Konstanten c folgen. Wir müssen aber fordern, daß bei verschwindendem Gravitationsfeld ($U = 0$) der Ausdruck (51,06) für das Intervall für beliebige v^2 in die Formel (51,04) übergeht, die einer GALILEIschen Metrik entspricht. Hieraus ergibt sich schon, daß die Konstante c in der Formel (51,06) die Lichtgeschwindigkeit sein muß.

Die obigen Überlegungen rechtfertigen die Annahme, daß unter den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} U &\ll c^2 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= v^2 \ll c^2 \end{aligned}\right\} \tag{51,09}$$

das Quadrat des Intervalls nur wenig von dem Ausdruck

$$ds^2 = (c^2 - 2\,U)dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{51,10}$$

abweicht. Die relative Ungenauigkeit im Koeffizienten von $d\,t^2$ ist jedenfalls von höherer Ordnung als das noch berücksichtigte Glied $\frac{2\,U}{c^2}$. Der Koeffizient des rein räumlichen Anteils des Intervalls kann sich von Eins um Größen von der Ordnung $\frac{2\,U}{c^2}$ unterscheiden. Tatsächlich liefert die Gravitationstheorie, die wir in den folgenden Paragraphen entwickeln werden, als einen genaueren Ausdruck

$$ds^2 = (c^2 - 2\,U)dt^2 - \left(1 + \frac{2\,U}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{51,11}$$

Unter den Bedingungen (51,09) bleibt der Unterschied zwischen den Ausdrücken (51,10) und (51,11) unwesentlich, wie es auch sein muß.

Der gefundene Wert des Koeffizienten von dt^2 kann im Prinzip experimentell nachgeprüft werden. Im Punkt (x, y, z), in dem das Gravitationspotential den Wert U_1 habe, befinde sich ein Strahler mit der Eigenperiode T_0. Die von ihm emittierte Welle hängt durch den folgenden Faktor von der Zeit ab

$$\exp\left(i\,2\pi\frac{t}{T_1}\right). \tag{51,12}$$

Dabei ist T_1 von T_0 verschieden und hängt mit dieser Größe ebenso zusammen wie dt mit $d\tau$, dem Differential der Eigenzeit des Strahlers. Betrachten wir der Einfachheit halber den Strahler als ruhend (in dem gegebenen Bezugssystem), so erhalten wir angenähert

$$d\tau = \frac{1}{c}\,ds = \left(1 - \frac{U_1}{c^2}\right)dt \tag{51,13}$$

und folglich

$$T_0 = \left(1 - \frac{U_1}{c^2}\right)T_1. \tag{51,14}$$

Bei diesem Problem kann man von einer Abhängigkeit des Gravitationspotentials U von der Zeit absehen und das Feld als statisch betrachten. Dann behält die vom Strahler ausgehende Welle ihre Zeitabhängigkeit (51,12) im ganzen Raum.

Nun nehmen wir an, daß sich an irgendeiner anderen Stelle (x_2, y_2, z_2), an der das Gravitationspotential den von U_1 verschiedenen Wert U_2 haben möge, ein zweiter, vollkommen gleicher Strahler befindet (etwa ein Atom desselben Elements). Die von diesem emittierte Welle hängt dann im ganzen Raum wie

$$\exp\left(i\,2\pi\frac{t}{T_2}\right) \tag{51,15}$$

von der Zeit ab, wobei gilt

$$T_0 = \left(1 - \frac{U_2}{c^2}\right) T_2. \tag{51,16}$$

Vergleichen wir die Perioden der beiden Wellen, die von gleichartigen Strahlern, aber an Orten mit verschiedenen Werten des Gravitationspotentials emittiert werden, so erhalten wir die Differenz

$$T_2 - T_1 = \frac{U_2 - U_1}{c^2} T_0. \tag{51,17}$$

Ist nun U_2 das Potential auf der Sonne, U_1 das auf der Erde, so gilt $U_2 > U_1$; der Faktor vor T_0 in (51,17) beträgt dann ungefähr

$$\frac{U_2 - U_1}{c^2} = 2 \cdot 10^{-6}. \tag{51,18}$$

Die Wellenlänge der auf der Sonne emittierten Spektrallinien muß also (gegenüber den auf der Erde emittierten) um zwei Millionenstel zum roten Ende des Spektrums hin verschoben sein.

Dazu ist zu bemerken, daß die Linien auf der Sonne unter ganz anderen physikalischen Bedingungen emittiert werden als auf der Erde und daß die aus der Berücksichtigung der verschiedenen Gravitationspotentiale entspringende Korrektion zum Teil durch Korrektionen anderen Ursprungs überdeckt wird. Es gibt aber überdichte Sterne (etwa der Siriusbegleiter), deren Dichte zehntausendmal so groß wie die des Wassers ist. An ihrer Oberfläche ist der Wert des Gravitationspotentials wesentlich größer als an der Sonnenoberfläche (für den Siriusbegleiter etwa 20mal so groß). Für solche Sterne wird die durch den Unterschied der Gravitationspotentiale hervorgerufene Korrektion merklich und läßt sich experimentell feststellen.

Man kann also annehmen, daß der gefundene Wert des Koeffizienten von dt^2 in dem Ausdruck für das Quadrat des Intervalls mit dem Experiment in Einklang ist.

§ 52 Die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen

Der Grundgedanke der EINSTEINschen Gravitationstheorie in ihrer beschränkten (nicht kosmologischen) Problemstellung besteht in folgendem.

Die geometrischen Eigenschaften der realen, physikalischen Raum-Zeit entsprechen nicht der euklidischen, sondern der RIEMANNschen Geometrie, mit deren Grundlagen wir uns im Kapitel III vertraut gemacht haben. Die Abweichungen der geometrischen Eigenschaften von den euklidischen (genauer von den pseudoeuklidischen) äußern sich in der Natur als Gravitationsfeld. Diese Eigenschaften sind untrennbar mit der Verteilung der gravitierenden Massen und deren Bewegung verknüpft. Dieser Zusammenhang ist wechselseitig, indem einerseits die Abweichungen der geometrischen Eigenschaften vom euklidischen Verhalten auf dem Vorhandensein gravitierender Massen beruhen, andererseits aber die Bewegung der Massen im Schwerefeld durch die Abweichungen dieser

Eigenschaften von den euklidischen bestimmt wird. Kürzer kann man sagen, daß die Massen die geometrischen Eigenschaften von Raum und Zeit bestimmen und daß diese Eigenschaften ihrerseits die Bewegung der Massen festlegen.

Wir versuchen nun, diese Gedanken mathematisch zu formulieren.

Im vorigen Paragraphen sahen wir, daß in einem Koordinatensystem, das praktisch mit einem Inertialsystem der NEWTONschen Mechanik übereinstimmt, das NEWTONsche Gravitationspotential U in den Koeffizienten von $d\,t^2$ des Ausdrucks für das Quadrat des Intervalls, d. h. in den Koeffizienten g_{00} des allgemeinen Ausdrucks

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\,x^\mu d\,x^\nu \tag{52,01}$$

eingeht. Andererseits erfüllt das Gravitationspotential U in der NEWTONschen Näherung die POISSON-Gleichung

$$\Delta U = -4\pi\gamma\varrho. \tag{52,02}$$

Die gesuchte Verallgemeinerung der NEWTONschen Gravitationstheorie muß gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen kovariant sein. Wir können daher als Verallgemeinerung des NEWTONschen Potentials nicht etwa einen Summanden im Koeffizienten g_{00} oder diesen Koeffizienten selbst ansehen, sondern wir müssen sämtliche Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ betrachten und annehmen, daß die Verallgemeinerung des NEWTONschen Gravitationspotentials der metrische Fundamentaltensor ist. Dieser Tensor muß einem allgemein-kovarianten System von Gleichungen genügen, von denen in NEWTONscher Näherung eine in die POISSON-Gleichung für das NEWTONsche Potential U übergehen muß. Die Gesamtzahl der Gleichungen muß im allgemeinen (d. h. wenn man von etwaigen Identitäten absieht) mit der Anzahl der unbekannten Funktionen übereinstimmen, also gleich der Anzahl der Komponenten des Tensors $g_{\mu\nu}$, d. h. gleich zehn sein.

Auf der linken Seite der POISSON-Gleichung steht ein Differentialoperator zweiter Ordnung (der LAPLACE-Operator), der auf U angewandt wird. Die einfachste allgemein-kovariante Verallgemeinerung der linken Seite der POISSON-Gleichung ist also ein Tensor, der die zweiten Ableitungen des Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$ linear enthält. Ein solcher Tensor ist der Krümmungstensor (zweiter oder vierter Stufe). Der Krümmungstensor vierter Stufe $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$ scheidet aus, denn seine Komponenten enthalten keine Ausdrücke, die als eine Verallgemeinerung des LAPLACE-Operators betrachtet werden könnten. Außerdem hat $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$ zu viele Komponente (nämlich 20, d. h. doppelt soviel wie unbekannte Funktionen).[1]) Es bleibt also nur der Krümmungstensor zweiter Stufe, der auch genau die benötigte Anzahl von Komponenten besitzt.

Auf der rechten Seite der POISSON-Gleichung steht die Massendichte ϱ. Eine Verallgemeinerung der Massendichte mit dem gewünschten Tensorcharakter ist

---

[1]) Es können zwar auch überzählige Gleichungen für den Tensor $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$ verträglich sein, wie etwa bei einem Raum konstanter Krümmung [Gleichungen (49,12)]. Aber diese Gleichungen ermöglichen dann eine rein lokale Bestimmung der Metrik (d. h. ohne Heranziehung der Randbedingungen) und haben daher einen anderen mathematischen Charakter als die POISSON-Gleichung, bei der Randbedingungen wesentlich sind.

der Massentensor $T^{\mu\nu}$, dessen Invariante gleich der invarianten Massendichte ist. Wir kommen somit zu dem Schluß, daß die gesuchte Verallgemeinerung der POISSON-Gleichung eine Beziehung zwischen dem Krümmungstensor zweiter Stufe $R^{\mu\nu}$ und dem Massentensor $T^{\mu\nu}$ sein muß.

In den früheren Kapiteln sahen wir, daß, falls keine Gravitation vorhanden ist, die Divergenz des Tensors $T^{\mu\nu}$ verschwindet. In diesem Fall haben wir also

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{52,03}$$

Wir wollen annehmen, daß diese Gleichung auch im allgemeinen Fall gültig ist; die Erörterung der damit zusammenhängenden Fragen (Energie des Gravitationsfeldes, integrale Form der Erhaltungssätze u. a.) verschieben wir bis zum Kapitel VII.

Andererseits haben wir am Schluß des Kapitels III die überaus bemerkenswerte Eigenschaft des Tensors

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \tag{52,04}$$

festgestellt, daß nämlich seine Divergenz identisch verschwindet:

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0. \tag{52,05}$$

Setzen wir also

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{52,06}$$

wobei $\varkappa$ eine Konstante ist, so wird die Gleichung (52,03) für den Massentensor eine Folge der Beziehung (52,06).

Bekanntlich genügt auch der Fundamentaltensor $g^{\mu\nu}$ der Gleichung (52,05); wir könnten also, ohne die Gültigkeit von (52,03) zu verletzen, auf der linken Seite von (52,06) einen Term der Form $\lambda g^{\mu\nu}$ hinzufügen, wo λ eine neue Konstante ist. Ein solcher Zusatz würde aber gegen die Forderung verstoßen, daß das Gravitationsfeld verschwinden soll, wenn keine Massen vorhanden sind. Nach unseren grundlegenden Annahmen, die wir zu Beginn dieses Paragraphen auseinandergesetzt haben, ist nämlich das Nichtvorhandensein eines Gravitationsfeldes mit dem Fehlen jeglicher Abweichungen der Raum-Zeit-Geometrie von der euklidischen Geometrie gleichbedeutend, woraus folgt, daß der Krümmungstensor verschwindet. Folglich muß für $T^{\mu\nu} = 0$ auch $R^{\mu\nu} = 0$ (und somit $R = 0$) sein, was nur möglich ist, wenn die linke Seite der Gleichung zwischen $G^{\mu\nu}$ und $T^{\mu\nu}$ keinen Term der Form $\lambda g^{\mu\nu}$ enthält (d. h. nur wenn $\lambda = 0$ ist). Die geeignete Verallgemeinerung der POISSON-Gleichung für das Gravitationspotential bilden also die Gleichungen (52,06).

Es läßt sich zeigen, daß unter den gestellten Bedingungen [Korrespondenz mit der POISSON-Gleichung, allgemeine Kovarianz, Linearität in den zweiten Ableitungen der $g^{\mu\nu}$, identische Erfüllung der Beziehung (52,05) für die linke Seite, Euklidizität bei Nichtvorhandensein von Massen] die gewonnenen Gleichungen die einzigen sind.

Die Gleichungen (52,06) werden die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen genannt; sie spielen in der Gravitationstheorie eine grundlegende Rolle. In den folgenden Paragraphen wollen wir uns näher mit ihnen beschäftigen.

§ 53 Die Charakteristiken der EINSTEINschen Gleichungen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation

Wir beginnen die Untersuchung der EINSTEINschen Gravitationsgleichungen

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = - \varkappa T^{\mu\nu} \tag{53,01}$$

damit, daß wir diejenige Gleichung erster Ordnung aufstellen, welche die Charakteristiken des untersuchten Gleichungssystems liefert. Physikalisch ist die Charakteristikengleichung das Ausbreitungsgesetz für die Front einer Gravitationswelle.

Multiplizieren wir die Gleichungen (53,01) mit $g_{\mu\nu}$ und summieren, so erhalten wir

$$R = \varkappa T. \tag{53,02}$$

Diese Beziehung zwischen den Invarianten des Krümmungstensors und des Massentensors gestattet uns, die Gravitationsgleichungen folgendermaßen zu schreiben

$$R^{\mu\nu} = - \varkappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right). \tag{53,03}$$

Für den kontravarianten Krümmungstensor $R^{\mu\nu}$ wird im Anhang B der Ausdruck

$$R^{\mu\nu} = - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \tag{53,04}$$

abgeleitet. Darin ist $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ eine Größe, die sich aus $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ durch Heben der Indizes ergibt

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\varrho} g^{\beta\sigma} \Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma}. \tag{53,05}$$

Der letzte Term in (53,04) enthält also keine zweiten Ableitungen, sondern ist eine homogene, quadratische Funktion der Größen $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ und damit auch der ersten Ableitungen des Fundamentaltensors.

Die zweiten Ableitungen treten neben dem ersten Term auch in den Größen $\Gamma^{\mu\nu}$ auf. Diese enthalten aber die zweiten Ableitungen nur über die ersten Ableitungen der Größen

$$\Gamma^{\nu} = g^{\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}, \tag{53,06}$$

die wir in § 41 eingeführt haben. Wir erinnern daran, daß der D'ALEMBERT-Operator, angewandt auf eine Funktion ψ, sowohl in der Form

$$\Box \psi = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}, \tag{53,07}$$

als auch in der Form

$$\Box \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right) \tag{53,08}$$

geschrieben werden kann. Daraus folgt

$$\Gamma^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}) \tag{53,09}$$

und weiter

$$\Gamma^\alpha = -\Box x_\alpha . \tag{53,10}$$

Die Größen $\Gamma^{\mu\nu}$ ergeben sich aus Γ^ν nach einer Regel, die formal mit der für die Bildung der halben Summe kontravarianter Ableitungen übereinstimmt, nämlich

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\nabla^\mu \Gamma^\nu + \nabla^\nu \Gamma^\mu) \tag{53,11}$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \Gamma^\alpha\right). \tag{53,12}$$

Da Γ^ν kein Vektor ist, bilden natürlich die Größen $\Gamma^{\mu\nu}$ auch keinen Tensor. Diesen Umstand kann man zur Vereinfachung der EINSTEINschen Gleichungen benutzen.

Die EINSTEINschen Gleichungen sind allgemein-kovariant und lassen folglich Koordinatentransformationen zu, die vier willkürliche Funktionen enthalten. Wir nehmen an, daß die Gleichungen in irgendwelchen (beliebigen) Koordinaten gelöst seien. Dann können wir zu anderen Koordinaten übergehen, wobei wir als unabhängige Variable vier Lösungen der Gleichung $\Box \psi = 0$ verwenden. Diese Lösungen kann man so wählen, daß die im § 35 formulierten Ungleichungen für $g^{\mu\nu}$ sowie einige Zusatzbedingungen erfüllt sind. Wenn aber jede der Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 der Gleichung $\Box x_\alpha = 0$ genügt, so gilt in diesem Koordinatensystem

$$\Gamma^\alpha = 0 \tag{53,13}$$

und folglich auch

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0. \tag{53,14}$$

Ein solches Koordinatensystem nennen wir harmonisch. Das Problem der Eindeutigkeit des harmonischen Koordinatensystems (und der Zusatzbedingungen, durch die diese Eindeutigkeit erreicht wird) interessiert uns jetzt nicht und wird an anderer Stelle behandelt werden (§ 93). Hier ist nur die Feststellung wichtig, daß die Gleichungen (53,13) mit den EINSTEINschen Gleichungen verträglich sind und daß sie deren Lösungen im wesentlichen keine Beschränkungen auferlegen, sondern nur die Klasse der zulässigen Koordinatensysteme einschränken.[1]

---

[1]) Die Bedingungen $\Gamma^\alpha = 0$ wurden zuerst von DE DONDER [18] und LANCZOS [19] eingeführt.

Unter den Bedingungen (53,13) vereinfacht sich der Ausdruck für $R^{\mu\nu}$ zu

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{53,15}$$

Darin kommen nur zweite Ableitungen von derjenigen Komponente des Fundamentaltensors $g^{\mu\nu}$ vor, die die gleichen Indizes wie $R^{\mu\nu}$ hat; und zwar werden diese zweiten Ableitungen in Form eines D'ALEMBERT-Operators zusammengefaßt.

Die Gestalt der Charakteristikengleichung eines Gleichungssystems hängt nur von den darin vorkommenden Termen mit den höchsten Ableitungen ab. In dem System (53,01) und (53,13) sind die Terme mit den höchsten Ableitungen gerade die, welche in Form eines D'ALEMBERT-Operators zusammengefaßt werden können. Deshalb sieht die Charakteristikengleichung für das System der Gravitationsgleichungen genauso aus wie für die D'ALEMBERT-Gleichung

$$\Box \psi = 0. \tag{53,16}$$

Deren Charakteristiken genügen, wie im Anhang C gezeigt wird, der Gleichung

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 0. \tag{53,17}$$

Dabei ist

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = \text{const} \tag{53,18}$$

die Gleichung einer Wellenfront, d. h. die Gleichung einer sich bewegenden Sprungfläche der Feldgrößen.

Die Gleichung (53,17), die das Ausbreitungsgesetz für die Front einer Gravitationswelle darstellt, stimmt mit der Gleichung überein, die der ganzen Theorie von Raum und Zeit zugrunde liegt und die Ausbreitung einer Lichtwellenfront im Vakuum beschreibt.[1]) Man kann also sagen, daß sich die Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Die Tatsache, daß sich die Gravitation nach der EINSTEINschen Theorie mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, ist von grundlegender Bedeutung. Denn danach ist die in dieser Theorie angenommene Form der Grundgleichungen mit den allgemeinen Sätzen der Relativitätstheorie im Einklang, wonach es eine Grenzgeschwindigkeit für die Fortpflanzung jeder Art von Wirkung gibt, nämlich die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Existenz einer endlichen Geschwindigkeit für die Ausbreitung der Gravitation beseitigt weiter die Widersprüche, welche der NEWTONschen Gravitationstheorie anhafteten, die eine momentane Fernwirkung annahm.

---

[1]) Bei der Ableitung dieses Gesetzes aus den MAXWELLschen Gleichungen (§ 3) haben wir angenommen, daß die Raum-Zeit euklidisch ist. Auf Grund der Bemerkung am Schluß von Anhang C ergibt sich aber auch ohne dieser Voraussetzung dasselbe Resultat, wenn man von den allgemein-kovarianten MAXWELLschen Gleichungen (§ 46) ausgeht.

§ 54 Vergleich mit der Problemstellung in der NEWTONschen Theorie. Randbedingungen

In der NEWTONschen Gravitationstheorie erfüllt das Gravitationspotential die Gleichung

$$\Delta U = -4\pi\gamma\varrho \tag{54,01}$$

und verschwindet im Unendlichen derart, daß

$$\lim_{r\to\infty} r U = \gamma M \tag{54,02}$$

gilt. Dabei ist M die Gesamtmasse aller Körper des betrachteten Systems

$$M = \int \varrho \, dx \, dy \, dz. \tag{54,03}$$

Die EINSTEINsche Theorie, die auf den Gravitationsgleichungen

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R^{\mu\nu} = -\varkappa T^{\mu\nu} \tag{54,04}$$

basiert, muß in erster Näherung zu denselben Resultaten führen wie die Theorie von NEWTON. Die NEWTONsche Gravitationstheorie ist nun nur auf solche Massenverteilungen anwendbar, deren Gesamtmasse, die durch das über den ganzen unendlichen Raum erstreckte Integral (54,03) gegeben ist, endlich bleibt. Dieser Bedingung genügt insbesondere eine „inselartige" Massenverteilung. Darunter verstehen wir den Fall, daß alle Massen des betrachteten Systems innerhalb eines endlichen Volumens konzentriert sind, wobei die übrigen, nicht zum System gehörigen Massen sich in sehr großem Abstand von diesem Volumen befinden. Bei hinreichend großer Entfernung der übrigen Massen kann man ihren Einfluß auf das gegebene System vernachlässigen und dieses als isoliert betrachten.

Bei der Formulierung der EINSTEINschen Theorie werden wir ebenfalls von der Voraussetzung ausgehen, daß die Massen inselartig verteilt sind. Diese Annahme ermöglicht es (wie in der NEWTONschen Theorie), gewisse Randbedingungen im Unendlichen aufzustellen, wodurch das Problem zu einem mathematisch bestimmten Problem wird.

Theoretisch sind auch noch andere Voraussetzungen denkbar, etwa eine (im Mittel) gleichmäßige Verteilung der Massen über den ganzen Raum. Dieser Standpunkt setzt jedoch die Betrachtung so riesiger Entfernungen voraus, daß ihnen gegenüber sogar die Abstände zwischen den Galaxien als sehr klein angesehen werden müssen. Über die Massenverteilung in derartig großen Dimensionen wissen wir noch sehr wenig. Deshalb wird eine Theorie so gewaltiger Räume mehr spekulativ und einer experimentellen Nachprüfung weniger zugänglich sein als die Theorie der astronomischen Erscheinungen kleineren Maßstabes.

Der Hauptteil dieses Buches beschäftigt sich mit einer inselartigen Massenverteilung. Die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Massen wird nur in § 94 und § 95 gemacht, wo die Theorie des FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raumes entwickelt wird, die dieser Annahme entspricht.

Wir werden also hier annehmen, daß die Raum-Zeit im Mittel euklidisch (genauer, pseudoeuklidisch oder GALILEIsch) ist, und daß die Abweichungen ihrer Geometrie von der euklidischen durch ein Gravitationsfeld bedingt sind. Dort, wo kein Gravitationsfeld vorhanden ist, muß die Geometrie euklidisch sein. Bei einer inselartigen Massenverteilung verschwindet das Gravitationsfeld im Unendlichen. Deshalb müssen wir fordern, daß in hinreichend großer Entfernung von den Massen die Geometrie der Raum-Zeit in die euklidische Geometrie übergeht. Dann aber gibt es dort GALILEIsche Koordinaten x, y, z, t, in denen das Quadrat des Intervalls die Form

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{54,05}$$

hat. Nun zeigt die Erfahrung, daß die Geometrie im ganzen Raum nur wenig von der euklidischen abweicht. Danach kann man erwarten, daß es Variable gibt, in denen sich der Ausdruck für das Quadrat des Intervalls im ganzen Raum nur wenig von (54,05) unterscheidet. Eine genauere mathematische Definition dieser „quasi-GALILEIschen" Koordinaten werden wir im folgenden geben.

Wir weisen darauf hin, daß sich die NEWTONsche Theorie am einfachsten in GALILEIschen Koordinaten formulieren läßt (Inertialsystem). Ihre Verallgemeinerung, die EINSTEINsche Theorie, vergleicht man daher am besten in solchen Koordinaten mit der NEWTONschen Theorie, die den GALILEIschen möglichst ähnlich sind.

Die NEWTONsche Theorie ist nichtrelativistisch. Damit man von einer relativistischen Theorie zu einer nichtrelativistischen übergehen kann, muß man die Lichtgeschwindigkeit c als einen großen Parameter explizite einführen. Deshalb werden wir die Größe c nicht mit in den Ausdruck für die zeitliche Koordinate hineinnehmen, sondern statt (35,03) einfach setzen

$$x_0 = t; \quad x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z. \tag{54,06}$$

Die Variable x_0 bedeutet also jetzt die Zeit t, und nicht mehr, wie bisher, die Größe ct.

Der Ausdruck (54,05) für das Quadrat des Intervalls lautet dann

$$ds^2 = c^2 dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \tag{54,07}$$

Dieser Ausdruck gilt in hinreichend großer Entfernung von den Massen, wo die Geometrie euklidisch ist. Der Vergleich mit dem allgemeinen Ausdruck

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{54,08}$$

ergibt für die $g_{\mu\nu}$ folgende Grenzwerte im Unendlichen

$$\left.\begin{aligned} (g_{00})_\infty &= c^2; \qquad (g_{0i})_\infty = 0, \\ (g_{ik})_\infty &= -\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{54,09}$$

Die entsprechenden Grenzwerte für die kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors lauten

$$(g^{00})_\infty = \frac{1}{c^2}; \qquad (g^{0i})_\infty = 0; \qquad (g^{ik})_\infty = -\delta_{ik}. \tag{54,10}$$

Diese Formeln kann man als Randbedingungen für den Fundamentaltensor auffassen.

Diese Randbedingungen reichen jedoch für die eindeutige Problemstellung noch nicht aus; es müssen noch weitere Bedingungen hinzukommen, die das asymptotische Verhalten der Differenzen $g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu})_\infty$ in großer Entfernung von den Massen kennzeichnen.

Im vorigen Paragraphen sahen wir, daß die EINSTEINschen Gleichungen (zumindest unter der Bedingung $\Gamma^\nu = 0$) vom Typ der Wellengleichung sind, denn die wesentlichen Terme haben die Form eines D'ALEMBERT-Operators. Außerhalb der Massen verschwindet der Tensor $T^{\mu\nu}$, und die Gleichungen reduzieren sich auf

$$R^{\mu\nu} = 0. \tag{54,11}$$

Dabei hat der Tensor $R^{\mu\nu}$ unter der Bedingung $\Gamma^\nu = 0$ die Form

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\beta}. \tag{54,12}$$

Wir nehmen nun an, daß die Differenzen $g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu})_\infty$ und ihre ersten und zweiten Ableitungen in großen Abständen wie $1/r$ gegen Null gehen, wo $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ist (diese Annahme wird später gerechtfertigt). Dann geht das zweite Glied in (54,12), das eine homogene quadratische Funktion der ersten Ableitungen ist, wie $1/r^2$ gegen Null. In der betrachteten Näherung kann man dieses zweite Glied vernachlässigen und die Koeffizienten des D'ALEMBERT-Operators durch ihre Grenzwerte ersetzen. Danach ergibt sich also

$$R^{\mu\nu} \cong -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_0^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_3^2}\right). \tag{54,13}$$

Eine genaue Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Größen $g^{\mu\nu}$ wird in § 87 durchgeführt. Dabei zeigt sich, daß auch Glieder von der Ordnung $1/r^2$, die in (54,13) vernachlässigt worden sind, einen gewissen Einfluß auf die asymptotische Form der $g^{\mu\nu}$ haben; jedoch verhalten sich die Differenzen $g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_\infty$ qualitativ ebenso wie eine Funktion ψ, die der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0 \tag{54,14}$$

genügt, wo Δ der gewöhnliche (euklidische) LAPLACE-Operator ist.

Uns interessieren Lösungen der Wellengleichung (54,14), die einer auslaufenden Welle entsprechen, die im Unendlichen verschwindet. Diese haben die asymptotische Form

$$\psi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}, \mathfrak{n}\right), \tag{54,15}$$

wo $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor mit den Komponenten

$$n_x = \frac{x}{r}, \qquad n_y = \frac{y}{r}, \qquad n_z = \frac{z}{r} \tag{54,16}$$

und f eine beliebige Funktion ist. Die Funktion f und ihre partiellen Ableitungen nach sämtlichen Argumenten werden als endlich vorausgesetzt. Das Argument $\mathfrak{n}$ liefert die Abhängigkeit der Funktion f von der Richtung, in der sich der Punkt ins Unendliche entfernt.

Andere mathematisch mögliche Lösungen der Wellengleichung müssen wir aus physikalischen Gründen ausschließen. In unserer Problemstellung wird nämlich das System als isoliert betrachtet, und das bedeutet auch, daß keine Wellen von außen einlaufen. Jede Welle muß also einen der Körper des Systems als Quelle haben; und da bei einem inselartigen System alle Körper innerhalb eines endlichen Raumgebietes konzentriert sind, geht jede Welle von diesem Gebiet aus und hat in großer Entfernung davon die asymptotische Form (54,15).

Die Bedingung, daß die Lösung der Wellengleichung im Unendlichen die obige Form haben soll, kann man differentiell folgendermaßen ausdrücken:

$$\lim \left(\frac{\partial (r\psi)}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial (r\psi)}{\partial t} \right) = 0 \tag{54,17}$$

für $r \to \infty$ und solche Werte von t, daß die Größe $t_0 \doteq t + r/c$ in einem willkürlich vorgegebenen endlichen Intervall liegt. Diese Bedingung nennt man Ausstrahlungsbedingung. Sie sichert die Eindeutigkeit der Lösung der Wellengleichung, falls man noch die Forderung hinzufügt, daß die Funktion ψ und ihre ersten Ableitungen nach x, y, z, t überall beschränkt sein und im Unendlichen wie $1/r$ verschwinden sollen (vgl. § 92).

Wir erinnern daran, daß sich die soeben durchgeführten Überlegungen strenggenommen auf die gewöhnliche Wellengleichung (54,14) und nicht auf die EINSTEINschen Gleichungen beziehen. Deshalb wird die asymptotische Form der Differenz

$$g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu})_\infty = \psi \tag{54,18}$$

etwas von (54,15) abweichen. Eine gegenüber der Differentialform (54,17) etwas abgeänderte Ausstrahlungsbedingung gilt jedoch für die Größe (54,18) auch allgemein.

Zusammenfassend kann man sagen, daß der Fundamentaltensor bei unserer Problemstellung der Forderung der Euklidizität im Unendlichen und der Ausstrahlungsbedingung genügen muß.

§ 55 Die Lösung der EINSTEINschen Gravitationsgleichungen in erster Näherung und die Bestimmung der Konstanten

Um die EINSTEINsche Gravitationstheorie mit der von NEWTON vergleichen zu können, müssen wir zunächst die Konstante $\varkappa$ bestimmen, die in den EINSTEINschen Gleichungen

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu} \tag{55,01}$$

auftritt. Den Wert dieser Konstanten erhält man, wenn man den Ausdruck für das Quadrat des Intervalls in der NEWTONschen Näherung (§ 51) mit demjenigen Ausdruck vergleicht, der sich dafür aus der angenäherten Lösung der EINSTEINschen Gleichungen ergibt.

Für den Massentensor auf der rechten Seite von (55,01) können wir als Näherung diejenigen Ausdrücke verwenden, die einer euklidischen Metrik entsprechen und in § 32 behandelt worden sind (dort haben wir den Fall eines elastischen Körpers betrachtet). Bevor wir die genannten Ausdrücke aus § 32 übernehmen, müssen wir aber beachten, daß die Größe x_0 jetzt einfach die Zeit t und nicht wie damals ct bedeutet. Deshalb entspricht der alten Größe T^{00} in der neuen Bezeichnungsweise $c^2 T^{00}$ und dem alten T^{0i} jetzt $c\,T^{0i}$; dagegen bleibt T^{ik} ungeändert. Die Formeln (32,34) lauten also jetzt (d. h. für $x_0 = t$)

$$\left.\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \varrho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho \Pi\right), \\ c^2 T^{0i} &= \varrho v_i + \frac{1}{c^2}\left\{v_i\left(\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho\Pi\right) - \sum_{k=1}^{3} p_{ik} v_k\right\}, \\ c^2 T^{ik} &= \varrho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55,02}$$

In unserer Näherung können wir darin die Terme weglassen, die der Energiedichte und dem Energiestrom (dem Skalar und dem Vektor von UMOW) entsprechen, und einfach schreiben

$$c^2 T^{00} = \varrho; \quad c^2 T^{0i} = \varrho v_i. \tag{55,03}$$

Mit der gleichen Genauigkeit, mit der diese Ausdrücke gelten, können wir die Invariante des Massentensors durch

$$T = \varrho \tag{55,04}$$

ersetzen. Aus den Formeln (55,03) und (55,04) ergeben sich die Näherungsausdrücke für den Tensor auf der rechten Seite der EINSTEINschen Gleichungen, die wir nach (53,03) in der Form

$$R^{\mu\nu} = -\varkappa\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T\right) \tag{55,05}$$

schreiben. Benutzen wir für die $g^{\mu\nu}$ GALILEIsche Werte, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T &= \frac{1}{2c^2}\varrho, \\ T^{0i} - \frac{1}{2} g^{0i} T &= \frac{1}{c^2}\varrho v_i, \\ T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T &= \frac{1}{2}\varrho\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55,06}$$

Andererseits haben wir nach (54,13) in einem harmonischen Koordinatensystem angenähert

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2}, \tag{55,07}$$

wo Δ der gewöhnliche, euklidische LAPLACE-Operator ist. Da uns hier die quasi-statische Lösung interessiert, können wir den Term mit der zweiten zeitlichen Ableitung vernachlässigen. Setzen wir (55,07) und (55,06) in (55,05) ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \Delta g^{00} &= -\frac{\varkappa}{c^2}\,\varrho, \\ \Delta g^{0i} &= -\frac{2\varkappa}{c^2}\,\varrho v_i, \\ \Delta g^{ik} &= -\varkappa\varrho\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55,08}$$

Jetzt benutzen wir den Ausdruck für das Quadrat des Intervalls in der NEWTONschen Näherung. Nach (51,10) gilt dort

$$g_{00} = c^2 - 2U, \tag{55,09}$$

wo U das NEWTONsche Potential ist; die übrigen Komponenten des Fundamentaltensors werden in dieser Näherung durch die GALILEIschen Werte ersetzt. Nun gilt allgemein die Formel

$$g_{00}g^{00} + \sum_{i=1}^{3} g_{0i}g^{i0} = 1. \tag{55,10}$$

Beachten wir, daß die Produkte $g_{0i}\,g^{0i}$ sehr klein gegen Eins[1]) sind, so können wir setzen

$$g_{00}g^{00} = 1. \tag{55,11}$$

Folglich wird

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4}. \tag{55,12}$$

Nun genügt aber das NEWTONsche Potential U der Gleichung

$$\Delta U = -4\pi\gamma\varrho. \tag{55,13}$$

Wir haben daher

$$\Delta g^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\,\varrho. \tag{55,14}$$

Diese Gleichung kann nun mit der ersten Gleichung (55,08) verglichen werden. Beide Gleichungen stimmen überein, wenn zwischen der EINSTEINschen Gravitationskonstanten $\varkappa$ und der NEWTONschen Konstanten γ folgender Zusammenhang besteht:

$$\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}. \tag{55,15}$$

---

[1]) Eine Abschätzung dieser Terme führen wir später durch.

Das NEWTONsche Potential U ist diejenige Lösung der Gleichung (55,13), die den Randbedingungen im Unendlichen genügt. Diese Lösung kann man bekanntlich als Volumenintegral

$$U = \gamma \int \frac{\varrho'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \, dx' \, dy' \, dz' \tag{55,16}$$

darstellen. Neben dem NEWTONschen Potential führen wir noch die Funktionen

$$U_i = \gamma \int \frac{(\varrho v_i)'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \, dx' \, dy' \, dz' \tag{55,17}$$

ein, die den Gleichungen

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\varrho v_i \tag{55,18}$$

und den Bedingungen im Unendlichen genügen. Diese Funktionen kann man in Analogie zu den entsprechenden elektrodynamischen Größen als Vektorpotential der Gravitation bezeichnen. Dann lauten die Lösungen der Gleichungen (55,08) [in denen die Konstante $\varkappa$ durch ihren Wert (55,15) ersetzt ist]

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right), \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^4} U_i, \\ g^{ik} &= -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55,19}$$

Wir bemerken noch, daß U die Dimension des Quadrates, U_i die der dritten Potenz einer Geschwindigkeit hat. Bei einer Abschätzung der Größenordnung kann man U von der Ordnung q^2 und U_i von der Ordnung q^3 annehmen, wo q eine charakteristische Geschwindigkeit bedeutet, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist.

Aus den kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors können wir nun rein algebraisch die kovarianten Komponenten, die Determinante g und andere Größen bestimmen. Zur Vereinfachung dieser algebraischen Rechnungen führen wir folgende Größen ein:

$$a_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}; \qquad a^{ik} = -g^{ik}, \tag{55,20}$$

wo $i, k = 1, 2, 3$ ist. Wie man leicht nachprüft, gilt

$$\sum_{m=1}^{3} a_{im}a^{mk} = \delta_{ik}. \tag{55,21}$$

Die Gesamtheit der Größen a_{ik} kann man als dreidimensionalen (räumlichen) metrischen Tensor auffassen; uns interessieren jedoch hier nur ihre algebraischen Eigenschaften.

Setzen wir

$$a = \text{Det}\, a_{ik} \tag{55,22}$$

und folglich

$$\frac{1}{a} = \text{Det}\, a^{ik}, \tag{55,23}$$

so wird

$$g = -\, a g_{00}. \tag{55,24}$$

Aus der Definition (55,20) folgt unmittelbar

$$g_{00} g^{0k} = \sum_{m=1}^{3} a^{mk} g_{m0} \tag{55,25}$$

und auch

$$g_{i0} = g_{00} \sum_{k=1}^{3} a_{ik} g^{0k}. \tag{55,26}$$

Wenn die Größen $g^{\mu\nu}$ die Werte (55,19) haben, so wird

$$a^{ik} = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ik} \tag{55,27}$$

und folglich

$$a_{ik} = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ik}. \tag{55,28}$$

Unter Beachtung des Wertes von g_{00} erhalten wir

$$g_{00} a_{ik} = c^2 \delta_{ik}, \tag{55,29}$$

wobei hier der relative Fehler von höherer Ordnung als U/c^2 ist. Mit demselben relativen Fehler folgt daraus

$$g_{i0} = c^2 g^{i0}. \tag{55,30}$$

Mit Hilfe dieser Formeln erhalten wir für die kovarianten Komponenten des Fundamentaltensors die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U, \\ g_{0i} &= \frac{4}{c^2} U_i, \\ g_{ik} &= -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55,31}$$

Da wir nun die Näherungswerte für g_{0i} und g^{0i} kennen, können wir prüfen, mit welcher Genauigkeit die von uns bereits benutzte Gleichung (55,11) erfüllt ist. Wir haben angenähert

$$g_{00} g^{00} = 1 - \frac{16}{c^6} \sum_{i=1}^{3} U_i^2. \tag{55,32}$$

Sind die U_i von der Größenordnung q^3, so unterscheidet sich die rechte Seite von Eins nur um eine Größe der Ordnung q^6/c^6. Danach kann man also die Gleichung (55,11) nicht nur in dieser, sondern auch noch in der darauffolgenden Näherung hinsichtlich U/c^2 (oder v^2/c^2) verwenden. Aus der Formel (55,26) folgt übrigens

$$g_{00}g^{00} = 1 - g_{00} \sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik} g^{0i} g^{0k}. \tag{55,33}$$

Hier ist die Größe g_{00} positiv, und die Doppelsumme bildet eine positive Form, so daß stets in Strenge gilt

$$g_{00}\, g^{00} \leqslant 1 \tag{55,34}$$

(freilich weicht die linke Seite nur wenig von Eins ab).

Wir wollen noch die Werte der Determinante g und der mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors, die wir mit

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \tag{55,35}$$

bezeichnen, aufschreiben. Es ist

$$-g = c^2 + 4U \tag{55,36}$$

und folglich

$$\sqrt{-g} = c + \frac{2U}{c}. \tag{55,37}$$

Daraus und aus (55,19) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4}{c^3}\, U_i, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -\, c\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{55,38}$$

Nun müssen wir die in dem Ausdruck für $R^{\mu\nu}$ vernachlässigten, in den ersten Ableitungen quadratischen Terme abschätzen. Diese haben die Form $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\, \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$. Zur angenäherten Berechnung der CHRISTOFFEL-Symbole könnten wir die eben gefundenen Näherungswerte für den Fundamentaltensor benutzen. Diese Rechnungen wollen wir jedoch hier nicht durchführen, denn die quadratischen Terme werden in Kapitel VI bei der Lösung der Gravitationsgleichungen in der nächsten Näherung ausführlich bestimmt. Hier brauchen wir nur die Größenordnung der quadratischen Terme. Diese sind in R^{00} und R^{0i} von sechster, in R^{ik} von vierter Ordnung hinsichtlich $1/c$. In der betrachteten Näherung haben diese Terme also keinen Einfluß auf das Ergebnis.

Wir müssen nun noch nachprüfen, ob die Bedingungen der Harmonizität

$$\Gamma^{\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{55,39}$$

in hinreichender Näherung erfüllt sind. Dazu stellen wir zunächst fest, mit welcher Genauigkeit diese Bedingungen erfüllt sein müssen. Wenn wir in der Formel (53,04) für $R^{\mu\nu}$ die Terme $\Gamma^{\mu\nu}$ nicht weglassen, sondern sie mit einer Genauigkeit hinschreiben, die der Näherung (55,07) für die übrigen Terme entspricht, so erhalten wir statt (55,07)

$$\left.\begin{aligned} R^{00} &= \frac{1}{2}\Delta g^{00} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{00}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Gamma^0}{\partial t}, \\ R^{0i} &= \frac{1}{2}\Delta g^{0i} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{0i}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^0}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Gamma^i}{\partial t}\right), \\ R^{ik} &= \frac{1}{2}\Delta g^{ik} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Gamma^k}{\partial x_i}\right). \end{aligned}\right\} \tag{55,40}$$

Damit darin die nicht berücksichtigten Terme mit Γ^ν tatsächlich gegenüber den berücksichtigten Termen vom Typ $\Delta g^{\mu\nu}$ klein sind, muß die Ordnung von Γ^0 höher als $1/c^4$ und die von Γ^i höher als $1/c^2$ sein. Das ist nun auch wirklich der Fall. Aus (55,38) folgt nämlich sofort, daß Γ^i von vierter Ordnung in $1/c$ ist. In Γ^0 lauten die Glieder vierter Ordnung

$$\Gamma^0 = -\frac{4}{c^4}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right). \tag{55,41}$$

Damit dieser Ausdruck verschwindet, muß also die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \tag{55,42}$$

erfüllt sein. Beachtet man die Definition der Größen U und U_i (durch die Differentialgleichungen mit Randbedingungen oder durch die Volumenintegrale) sowie die Beziehung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\varrho v_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{55,43}$$

die den Erhaltungssatz der Masse in der NEWTONschen Näherung ausdrückt, so sieht man leicht ein, daß die Gleichung (55,42) wirklich erfüllt ist.

Die Ausdrücke, die wir für den Fundamentaltensor erhalten haben, erfüllen also in erster Näherung tatsächlich sowohl die Gravitationsgleichungen als auch die Bedingungen der Harmonizität. Außerdem genügen sie offenbar den Randbedingungen im Unendlichen. Der entsprechende Ausdruck für das Quadrat des Intervalls lautet

$$\begin{aligned} ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \\ + \frac{8}{c^2}(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3)\,dt. \end{aligned} \tag{55,44}$$

Für viele Anwendungen spielen hier die Terme mit den Produkten $dx_i\,dt$ keine merkliche Rolle. Lassen wir sie fort, so erhalten wir den Ausdruck

$$ds^2 = (c^2 - 2\,U)\,dt^2 - \left(1 + \frac{2\,U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \qquad (55{,}45)$$

in den nur noch das NEWTONsche Potential eingeht. Diesen Ausdruck haben wir ohne Beweis schon in § 51 angegeben [Formel (51,11)].

§ 56 Die Gravitationsgleichungen im statischen Fall

Man nennt den Fundamentaltensor statisch, wenn seine Komponenten nicht von der Zeitkoordinate $x_0 = t$ abhängen, so daß wir

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0 \qquad (56{,}01)$$

haben, und wenn außerdem

$$g_{0i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \qquad (56{,}02)$$

ist. Aus physikalischen Gründen ist es offensichtlich, daß sich in einem aus mehreren Massen bestehenden Massensystems die einzelnen Massen bewegen müssen.[1]) Darum kann der Fundamentaltensor nur im Falle einer einzelnen Masse statisch sein. Trotz dieser Begrenztheit seiner physikalischen Anwendung ist aber auch der statische Fall von gewisser Bedeutung: Erstens läßt sich in diesem Fall die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung leicht beantworten, und zweitens kann man im statischen Fall eine strenge, kugelsymmetrische Lösung der EINSTEINschen Gleichungen angeben.

Unter den Bedingungen (56,01) und (56,02) können wir setzen

$$g_{00} = V^2; \quad g_{ik} = -\,a_{ik}. \qquad (56{,}03)$$

Damit erhält man für das Quadrat des Intervalls

$$ds^2 = V^2 dt^2 - \sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \qquad (56{,}04)$$

wobei die Koeffizienten dieser quadratischen Form nicht von t abhängen. Für den räumlichen Teil von ds^2 führen wir die Bezeichnung

$$dl^2 = \sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}\,dx_i\,dx_k \qquad (56{,}05)$$

ein, so daß der Ausdruck (56,04) die Gestalt

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2 \qquad (56{,}06)$$

[1]) Das Problem der Bewegung eines Massensystems wird in Kapitel VI näher untersucht.

annimmt. Neben der vierdimensionalen quadratischen Form (56,04) können wir nun auch die dreidimensionale Form (56,05) betrachten und die Formeln der Tensoranalysis sowohl auf die eine als auch auf die andere Form anwenden. Die durch die Gleichungen (55,21) definierten Größen a^{ik} können als kontravariante Komponenten des räumlichen Fundamentaltensors angesehen werden, der der Form (56,05) entspricht. Wir haben dann

$$g^{00} = \frac{1}{V^2}; \quad g^{0i} = 0; \quad g^{ik} = -a^{ik} \tag{56,07}$$

sowie

$$\sqrt{-g} = V\sqrt{a}. \tag{56,08}$$

Dabei ist nach (55,22)

$$a = \operatorname{Det} a_{ik}$$

gesetzt. Die lateinischen Indizes $i, k, \ldots$ sollen die Werte 1, 2, 3, die griechischen Indizes $\mu, \nu, \ldots$ die Werte 0, 1, 2, 3 durchlaufen.

Wir bezeichnen die vierdimensionalen CHRISTOFFEL-Symbole (für den Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$) mit $(\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu})_g$ und die dreidimensionalen CHRISTOFFEL-Symbole (für den Fundamentaltensor a_{ik}) mit $(\Gamma^{h}_{ik})_a$. Entsprechend versehen wir die Tensorgrößen im vier- bzw. dreidimensionalen Fall mit den Indizes g bzw. a. Außerdem setzen wir

$$V_k = \frac{\partial V}{\partial x_k}; \qquad V^i = a^{ik} V_k \tag{56,09}$$

(in der letzten Formel erstreckt sich die Summation über k von 1 bis 3). Dann gilt

$$(\Gamma^{h}_{ik})_g = (\Gamma^{h}_{ik})_a \tag{56,10}$$

sowie

$$(\Gamma^{i}_{00})_g = V\,V^i; \qquad (\Gamma^{0}_{0i})_g = \frac{V_i}{V} \tag{56,11}$$

und schließlich

$$(\Gamma^{0}_{00})_g = 0; \quad (\Gamma^{0}_{ik})_g = 0; \quad (\Gamma^{k}_{i0})_g = 0. \tag{56,12}$$

Unter Benutzung der allgemeinen Formel

$$R^{\varrho}_{\sigma,\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\varrho}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\varrho}_{\alpha\mu} \tag{56,13}$$

können wir jetzt den vierdimensionalen Krümmungstensor durch den dreidimensionalen ausdrücken. Sind alle Indizes von Null verschieden, so haben wir wegen (56,10)

$$(R^{l}_{i,hk})_g = (R^{l}_{i,hk})_a. \tag{56,14}$$

Wenn nur ein Index gleich Null ist, so haben wir

$$(R^{0}_{i,hk})_g = 0; \quad (R^{l}_{0,hk})_g = 0; \quad (R^{l}_{i,0k})_g = 0. \tag{56,15}$$

Ferner gilt offenbar

$$(R^0_{0,\,hk})_g = 0. \tag{56,16}$$

Betrachten wir die allgemeine Formel (56,13) für den Fall $\sigma = \mu = 0$ und benutzen die Ausdrücke (56,10)—(56,12) für die CHRISTOFFEL-Symbole, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(R^l_{0,\,0k})_g &= \frac{\partial}{\partial x_k}(V\,V^l) + V\,V^i\,(\Gamma^l_{ik})_a - V_k V^l = \\ &= V\left(\frac{\partial V^l}{\partial x_k} + (\Gamma^l_{ik})_a\,V^i\right).\end{aligned} \tag{56,17}$$

Die Größe

$$(V^l)_k = \frac{\partial V^l}{\partial x_k} + (\Gamma^l_{ik})_a\,V^i \tag{56,18}$$

ist aber die nach den Regeln der dreidimensionalen Tensoranalysis gebildete kovariante Ableitung des Vektors V^l. Infolge von (56,09) gilt

$$(V^l)_k = \left(a^{li}\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_k = a^{li} V_{ik}, \tag{56,19}$$

wo

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - (\Gamma^j_{ik})_a\,\frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{56,20}$$

die zweite kovariante Ableitung von V (im dreidimensionalen Sinn) ist. Wegen $V_{ik} = V_{ki}$ ist es gleichgültig, welcher der beiden Indizes von V_{ik} gehoben wird; wir können also statt $(V^l)_k$ einfach V^l_k schreiben, so daß die Formel (56,17) die Gestalt

$$(R^l_{0,\,0k})_g = V\,V^l_k \tag{56,21}$$

annimmt. Analog erhalten wir

$$(R^0_{i,\,0k})_g = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{V_i}{V}\right) + \frac{V_i V_k}{V^2} - (\Gamma^j_{ik})_a\,\frac{V_j}{V} \tag{56,22}$$

und nach einer kleinen Umformung

$$(R^0_{i,\,0k})_g = \frac{V_{ik}}{V}, \tag{56,23}$$

wo V_{ik} die Bedeutung (56,20) hat.

Wir drücken nun den vierdimensionalen RIEMANN-Tensor durch dreidimensionale Größen aus. Nach der allgemeinen Formel (44,22) haben wir

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu,\,\alpha\nu} = R^0_{\mu,\,0\nu} + R^l_{\mu,\,l\nu}. \tag{56,24}$$

Wegen (56,14) und (56,23) folgt daraus

$$(R_{ik})_g = (R_{ik})_a + \frac{V_{ik}}{V}, \tag{56,25}$$

wo $(R_{ik})_a$ der dreidimensionale RIEMANN-Tensor ist. Setzen wir weiter in (56,21) $l = k$ und summieren über k, so erhalten wir

$$(R_{00})_g = - V \Delta V. \tag{56,26}$$

Dabei ist

$$\Delta V = V_k^k = a^{ik} V_{ik} \tag{56,27}$$

der dreidimensionale LAPLACE-Operator, den man in der Form

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{a}\, a^{ik} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \tag{56,28}$$

schreiben kann. Die noch übrigbleibenden gemischten Komponenten des vierdimensionalen RIEMANN-Tensors verschwinden wegen (56,15)

$$(R_{i0})_g = 0. \tag{56,29}$$

Die Invariante des vierdimensionalen RIEMANN-Tensors beträgt

$$(R)_g = - \frac{2\Delta V}{V} - (R)_a, \tag{56,30}$$

wo $(R)_a$ die Invariante des entsprechenden dreidimensionalen Tensors ist.

Setzen wir die gefundenen Ausdrücke in die Formel

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{56,31}$$

ein, so können wir auch den EINSTEIN-Tensor durch dreidimensionale Größen ausdrücken. Führen wir für den konservativen Tensor des dreidimensionalen Raumes die Bezeichnung

$$A_{ik} = (R_{ik})_a - \frac{1}{2} a_{ik} (R)_a \tag{56,32}$$

ein und verstehen unter A die dreidimensionale Invariante dieses Tensors

$$A = a^{ik} A_{ik} = - \frac{1}{2} (R)_a, \tag{56,33}$$

so erhalten wir für die Komponenten des Tensors (56,31) die Ausdrücke[1])

$$G_{ik} = A_{ik} + \frac{1}{V} (V_{ik} - a_{ik} \Delta V), \tag{56,34}$$

$$G_{i0} = 0, \tag{56,35}$$

$$G_{00} = - V^2 A. \tag{56,36}$$

Nach (E, 13) lassen sich übrigens die dreidimensionalen kontravarianten Komponenten A^{ik} unmittelbar durch die kovarianten Komponenten des dreidimensionalen Krümmungstensors vierter Stufe ausdrücken.

---

[1]) Diese Ausdrücke werden in dem Buch von LEVI-CIVITA [16] angegeben.

Nach den EINSTEINschen Gravitationsgleichungen gilt

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T_{\mu\nu}. \tag{56,37}$$

Im leeren Raum ist $T_{\mu\nu} = 0$. Wir werden nun zeigen, daß die einzige statische Lösung der EINSTEINschen Gleichungen für den leeren Raum, die keine Singularitäten besitzt und den Randbedingungen genügt, diejenige Lösung ist, die einem euklidischen Raum und einer pseudoeuklidischen Raum-Zeit entspricht.

Für $G_{\mu\nu} = 0$ findet man aus den obigen Gleichungen leicht

$$\Delta V = 0. \tag{56,38}$$

Das ist eine Gleichung vom elliptischen Typ für V; sie stellt eine Verallgemeinerung der LAPLACE-Gleichung dar. Im räumlich Unendlichen muß die Funktion V gegen einen konstanten Wert, ihre Ableitungen aber gegen Null gehen. Die einzige Lösung der LAPLACE-Gleichung, die diesen Bedingungen entspricht, ist ein konstanter Wert von V. Ist nun aber V konstant, so verschwinden die tensoriellen Ableitungen V_{ik}, und aus den Gleichungen $G_{ik} = 0$ folgt dann $A_{ik} = 0$. Der Krümmungstensor des dreidimensionalen Raumes verschwindet also, d. h. der Raum selbst ist euklidisch (vgl. Anhang E).

§ 57 Die strenge Lösung der Gravitationsgleichungen für eine Zentralmasse

Für eine konzentrierte Masse (Zentralmasse) läßt sich eine strenge, kugelsymmetrische Lösung der Gravitationsgleichungen angeben. Da uns die statische Lösung interessiert, können wir die Formeln des vorhergehenden Paragraphen benutzen und für ds^2 schreiben

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2, \tag{57,01}$$

mit

$$dl^2 = a_{ik} dx_i dx_k. \tag{57,02}$$

Sind die x_1, x_2, x_3 harmonische Koordinaten, so können wir Kugelkoordinaten einführen, indem wir setzen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r \sin\vartheta \cos\varphi, \\ x_2 &= r \sin\vartheta \sin\varphi, \\ x_3 &= r \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{57,03}$$

Der Annahme der Kugelsymmetrie entspricht dann für dl^2 ein Ausdruck der Form

$$dl^2 = F^2 dr^2 + \varrho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{57,04}$$

wo F und ϱ Funktionen von r allein sind. Auch der Koeffizient V hängt nur von r ab.

Wenn ds^2 die eben angegebene Form hat, so lautet der D'ALEMBERT-Operator, angewandt auf irgendeine Funktion Ψ,

$$\Box\, \Psi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{1}{\varrho^2} \left\{ \frac{1}{VF} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V \varrho^2}{F} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \Delta^* \Psi \right\}, \tag{57,05}$$

wo $\Delta^*\Psi$ der LAPLACE-Operator auf der Kugel ist:

$$\Delta^*\Psi = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}. \tag{57,06}$$

Die Zeit t ist offenbar eine harmonische Variable, denn es ist $\Box t = 0$. Damit die Koordinaten (57,03) ebenfalls harmonische Variable darstellen, müssen sie den Bedingungen $\Box x_i = 0$ genügen. Da jede der Größen (57,03) der Gleichung

$$\Delta^* x_i = -2x_i \tag{57,07}$$

genügt, lautet die Bedingung der Harmonizität für x_i

$$\frac{1}{VF}\frac{d}{dr}\left(\frac{V\varrho^2}{F}\right) - 2r = 0. \tag{57,08}$$

Das ist eine zusätzliche (neben den EINSTEINschen Gleichungen zu erfüllende) Gleichung für die Größen V, F, ϱ.

Wir wollen nun die CHRISTOFFEL-Symbole für die Differentialform (57,04) bilden. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} a_{rr} &= F^2; \quad a_{\vartheta\vartheta} = \varrho^2; \quad a_{\varphi\varphi} = \varrho^2\sin^2\vartheta, \\ a_{\vartheta\varphi} &= 0; \quad a_{\varphi r} = 0; \quad a_{r\vartheta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{57,09}$$

und für die kontravarianten Komponenten des dreidimensionalen metrischen Tensors

$$\left.\begin{aligned} a^{rr} &= \frac{1}{F^2}; \quad a^{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\varrho^2}; \quad a^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\varrho^2\sin^2\vartheta}, \\ a^{\vartheta\varphi} &= 0; \quad a^{\varphi r} = 0; \quad a^{r\vartheta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{57,10}$$

Daraus erhalten wir nach den allgemeinen Formeln folgende Ausdrücke für die 18 CHRISTOFFEL-Symbole

$$\left.\begin{array}{lll} \Gamma^r_{rr} = \dfrac{F'}{F}; & \Gamma^\vartheta_{rr} = 0; & \Gamma^\varphi_{rr} = 0, \\ \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -\dfrac{\varrho\varrho'}{F^2}; & \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} = 0; & \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} = 0, \\ \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\dfrac{\varrho\varrho'}{F^2}\sin^2\vartheta; & \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta; & \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0, \\ \Gamma^r_{r\vartheta} = 0; & \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \dfrac{\varrho'}{\varrho}; & \Gamma^\varphi_{r\vartheta} = 0, \\ \Gamma^r_{r\varphi} = 0; & \Gamma^\vartheta_{r\varphi} = 0; & \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \dfrac{\varrho'}{\varrho}, \\ \Gamma^r_{\vartheta\varphi} = 0; & \Gamma^\vartheta_{\vartheta\varphi} = 0; & \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \operatorname{ctg}\vartheta. \end{array}\right\} \tag{57,11}$$

Die Striche bedeuten dabei Ableitungen nach r.

Jede Zeile dieser Tabelle liefert die mit dem negativen Vorzeichen versehenen Koeffizienten der ersten Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \frac{\partial V}{\partial \varphi}$ in den Ausdrücken für die zweiten kovarianten Ableitungen einer Funktion V. Da wir diese Ausdrücke brauchen werden, wollen wir sie hier ebenfalls aufschreiben:

$$\left.\begin{aligned} V_{rr} &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{F'}{F}\frac{\partial V}{\partial r}, \\ V_{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\varrho\varrho'}{F^2}\frac{\partial V}{\partial r}, \\ V_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\varrho\varrho'}{F^2}\sin^2\vartheta\frac{\partial V}{\partial r} + \sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ V_{r\vartheta} &= \frac{\partial^2 V}{\partial r\partial \vartheta} - \frac{\varrho'}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ V_{r\varphi} &= \frac{\partial^2 V}{\partial r\partial \varphi} - \frac{\varrho'}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ V_{\vartheta\varphi} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta\partial \varphi} - \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{57,12}$$

Andererseits liefert jede Spalte der Tabelle (57,11) die Koeffizienten der Quadrate und Produkte der ersten Ableitungen in den Gleichungen für die räumliche geodätische Linie; diese Gleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} + \frac{F'}{F}\dot{r}^2 - \frac{\varrho\varrho'}{F^2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) &= 0, \\ \ddot{\vartheta} + 2\frac{\varrho'}{\varrho}\dot{\vartheta}\dot{r} - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 &= 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\frac{\varrho'}{\varrho}\dot{\varphi}\dot{r} + 2\operatorname{ctg}\vartheta\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{57,13}$$

wo der Punkt die Differentiation nach der Bogenlänge bedeutet ($\dot{r} = \frac{dr}{dl}$ usw.). Praktisch berechnet man die CHRISTOFFEL-Symbole am besten nicht aus den allgemeinen Formeln, sondern aus den Gleichungen für die geodätische Linie, die man unmittelbar aus dem Variationsprinzip herleitet.

Mit Hilfe der in (57,11) zusammengestellten CHRISTOFFEL-Symbole bilden wir nun den dreidimensionalen Krümmungstensor vierter Stufe und dann nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} (R_{rr})_a &= R^{\vartheta}_{r,\vartheta r} + R^{\varphi}_{r,\varphi r}, \\ (R_{\vartheta\vartheta})_a &= R^{r}_{\vartheta,r\vartheta} + R^{\varphi}_{\vartheta,\varphi\vartheta}, \\ (R_{\varphi\varphi})_a &= R^{r}_{\varphi,r\varphi} + R^{\vartheta}_{\varphi,\vartheta\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{57,14}$$

den dreidimensionalen Krümmungstensor zweiter Stufe. Die entsprechenden Formeln für die nichtdiagonalen Komponenten brauchen wir nicht zu betrachten, da diese verschwinden.

Schreiben wir nur die von Null verschiedenen Terme hin, so finden wir nach der allgemeinen Formel (56,13)

$$R^{\vartheta}_{r,\,\vartheta r} = \frac{\partial \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}}{\partial r} + \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta r} - \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}. \tag{57,15}$$

Hierin setzen wir die Werte der CHRISTOFFEL-Symbole aus (57,11) ein und erhalten nach einer kleinen Umformung

$$R^{\vartheta}_{r,\,\vartheta r} = \frac{F}{\varrho}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho'}{F}\right). \tag{57,16}$$

Für die Größe $R^{\varphi}_{r,\,\varphi r}$ ergibt sich der gleiche Wert

$$R^{\varphi}_{r,\,\varphi r} = \frac{F}{\varrho}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho'}{F}\right). \tag{57,17}$$

Wir haben also

$$(R_{rr})_a = \frac{2F}{\varrho}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho'}{F}\right). \tag{57,18}$$

Ferner finden wir

$$R^{r}_{\vartheta,\,r\vartheta} = -\frac{\partial \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}}{\partial r} + \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta r}\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta} - \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}\Gamma^{r}_{rr} \tag{57,19}$$

und daraus

$$R^{r}_{\vartheta,\,r\vartheta} = \frac{\varrho}{F}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho'}{F}\right). \tag{57,20}$$

Weiter erhalten wir

$$R^{\varphi}_{\vartheta,\,\varphi\vartheta} = \frac{\partial \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi}}{\partial \vartheta} + \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} - \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} \tag{57,21}$$

und daraus

$$R^{\varphi}_{\vartheta,\,\varphi\vartheta} = -1 + \frac{\varrho'^2}{F^2}. \tag{57,22}$$

Setzen wir (57,20) und (57,22) in (57,14) ein, so finden wir für $(R_{\vartheta\vartheta})_a$ den Ausdruck

$$(R_{\vartheta\vartheta})_a = \frac{1}{F}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho\varrho'}{F}\right) - 1. \tag{57,23}$$

Eine analoge Rechnung liefert

$$(R_{\varphi\varphi})_a = \sin^2\vartheta\,(R_{\vartheta\vartheta})_a, \tag{57,24}$$

was auf Grund der Kugelsymmetrie auch zu erwarten war. Wie wir bereits erwähnt haben, gilt

$$(R_{r\vartheta})_a = 0; \quad (R_{r\varphi})_a = 0; \quad (R_{\vartheta\varphi})_a = 0. \tag{57,25}$$

Die Invariante des dreidimensionalen Krümmungstensors berechnet sich nach der Formel

$$(R)_a = \frac{1}{F^2}(R_{rr})_a + \frac{2}{\varrho^2}(R_{\vartheta\vartheta})_a \tag{57,26}$$

und kann in der Form

$$(R)_a = \frac{2}{\varrho^2 \varrho'} \frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho \varrho'^2}{F^2} - \varrho\right) \tag{57,27}$$

geschrieben werden.

Die gefundenen Formeln gestatten es, die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen explizite hinzuschreiben. Wenn der Massentensor verschwindet, so reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$(R_{\mu\nu})_g = 0. \tag{57,28}$$

Nach (56,25) liefern die Gleichungen für die räumlichen Komponenten dieses Tensors im statischen Fall die Beziehungen

$$V(R_{ik})_a + V_{ik} = 0. \tag{57,29}$$

Die Komponente mit den Indizes (0,0) führt zu der Gleichung

$$\Delta V = 0. \tag{57,30}$$

Die Gleichungen für die gemischten Komponenten [mit den Indizes $(0, i)$] sind identisch erfüllt.

Die Gleichungen (57,29) und (57,30) sind Tensorgleichungen im Sinne der dreidimensionalen Tensoranalysis; jedem der Indizes i, k können wir die Werte r, ϑ, φ geben, wie wir das schon bei den früheren Betrachtungen dieses Paragraphen getan haben. Die Gleichungen für die nichtdiagonalen Komponenten (r, ϑ), (r, φ) und (ϑ, φ) sind dabei identisch erfüllt; das folgt aus (57,25) und den sich aus (57,12) ergebenden analogen Gleichungen

$$V_{r\vartheta} = 0; \quad V_{r\varphi} = 0; \quad V_{\vartheta\varphi} = 0 \tag{57,31}$$

für die kovarianten Ableitungen der Funktion V, die nur von r abhängt. Ferner ist wegen (57,24) und der aus (57,12) folgenden analogen Beziehung

$$V_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta \, V_{\vartheta\vartheta} \tag{57,32}$$

die Gleichung für die Komponente (φ, φ) mit der für die Komponente (ϑ, ϑ) identisch. Von den sechs Gleichungen (57,29) sind also nur die beiden folgenden unabhängig:

$$V(R_{rr})_a + V_{rr} = 0, \tag{57,33}$$

$$V(R_{\vartheta\vartheta})_a + V_{\vartheta\vartheta} = 0. \tag{57,34}$$

Setzen wir in (57,33) den Ausdruck für $(R_{rr})_a$ aus (57,18) und den Ausdruck für V_{rr} aus (57,12) ein, so erhalten wir

$$\frac{2VF}{\varrho}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho'}{F}\right) + V'' - \frac{F'}{F}V' = 0. \tag{57,35}$$

Analog ergibt sich, wenn wir die Werte von $(R_{\vartheta\vartheta})_a$ und $V_{\vartheta\vartheta}$ aus (57,23) und (57,12) in die Gleichung (57,34) einsetzen,

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho\varrho' V}{F}\right) - VF = 0. \tag{57,36}$$

Die Gleichung (57,30) läßt sich ferner schreiben

$$V'' - \frac{F'}{F}V' + \frac{2\varrho'}{\varrho}V' = 0. \tag{57,37}$$

Die letzten drei Gleichungen lassen sich leicht lösen. Kombiniert man (57,35) und (57,37), so erhält man

$$V\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho'}{F}\right) - \frac{\varrho'}{F}V' = 0; \tag{57,38}$$

daraus folgt

$$\frac{\varrho'}{VF} = \text{const.} \tag{57,39}$$

Der Wert der Konstanten wird durch die Randbedingungen festgelegt: Im Unendlichen muß sein

$$\varrho' = 1; \quad F = 1; \quad V = c \qquad (\text{für } r \to \infty). \tag{57,40}$$

Daraus ergibt sich

$$VF = c\varrho', \tag{57,41}$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit ist. Setzen wir diesen Wert für VF in (57,36) ein und integrieren, so erhalten wir

$$\frac{\varrho\varrho' V}{F} - c\varrho = \text{const} \tag{57,42}$$

und, wenn wir nochmals die Beziehung (57,41) benutzen,

$$\varrho\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \text{const.} \tag{57,43}$$

Den Wert der Integrationskonstanten in (57,43) kann man durch einen Vergleich mit der NEWTONschen Theorie bestimmen. Ist M der Wert der Zentralmasse, so muß in großer Entfernung davon

$$V^2 = c^2 - 2U; \quad U = \frac{\gamma M}{r} \tag{57,44}$$

sein. Dabei ist

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varrho}{r} = 1. \tag{57,45}$$

Hieraus folgt

$$\varrho\,(c^2 - V^2) = 2\gamma M \tag{57,46}$$

und damit

$$V^2 = c^2 - \frac{2\gamma M}{\varrho}. \tag{57,47}$$

Bisher haben wir nur die Gleichung (57,36) und eine Kombination der Gleichungen (57,35) und (57,37) [nämlich (57,38)] benutzt. Wir müssen noch verifizieren, daß die letzten beiden Gleichungen auch einzeln erfüllt sind. Dazu schreiben wir die Gleichung (57,37) in der Form

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{V'\varrho^2}{F}\right) = 0. \tag{57,48}$$

Andererseits erhalten wir durch Differentiation von (57,47)

$$V V' = \frac{\gamma M}{\varrho^2}\,\varrho'. \tag{57,49}$$

Zusammen mit (57,41) ergibt sich daraus

$$\frac{V'\varrho^2}{F} = \frac{\gamma M}{c} = \text{const}, \tag{57,50}$$

und folglich ist die Gleichung (57,37) erfüllt. Von den drei Gleichungen (57,35), (57,36) und (57,37) sind also nur zwei unabhängig.

Aus (57,41) ergibt sich

$$F\,dr = \frac{c}{V}\,d\varrho. \tag{57,51}$$

Setzt man die für F und V gefundenen Werte in den Ausdruck für ds^2 ein und benutzt (57,51), so erhält man

$$ds^2 = V^2 dt^2 - \frac{c^2}{V^2}\,d\varrho^2 - \varrho^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \tag{57,52}$$

wo V^2 folgenden Wert hat

$$V^2 = c^2 - \frac{2\gamma M}{\varrho}. \tag{57,47}$$

Solange nur die Gravitationsgleichungen benutzt werden, nicht aber die Bedingung für die Harmonizität der Koordinaten, bleibt die Größe ϱ eine beliebige

Funktion von r (und folglich auch r eine beliebige Funktion von ϱ). Die Bedingung für die Harmonizität der Koordinaten legt aber diese Funktion eindeutig fest. Aus der Bedingung

$$\frac{1}{VF}\frac{d}{dr}\left(\frac{V\varrho^2}{F}\right) - 2r = 0 \tag{57,08}$$

und der Beziehung

$$VF = c\varrho' \tag{57,41}$$

folgt nämlich

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{V^2\varrho^2}{c^2}\frac{dr}{d\varrho}\right) - 2r = 0. \tag{57,53}$$

Setzen wir hier für V^2 den Wert (57,47) ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{d\varrho}\left[(\varrho^2 - 2\alpha\varrho)\frac{dr}{d\varrho}\right] - 2r = 0. \tag{57,54}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}. \tag{57,55}$$

Der Wertebereich von ϱ ist

$$\varrho \geqslant 2\alpha, \tag{57,56}$$

denn nur in diesem Bereich ist $V^2 \geqslant 0$.

Mit Hilfe der Substitution

$$\varrho = \alpha(1 + z) \tag{57,57}$$

führen wir die Gleichung (57,54) in die LEGENDREsche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2 - 1)\frac{dr}{dz}\right] - 2r = 0 \tag{57,58}$$

für das Gebiet

$$z \geqslant 1 \tag{57,59}$$

über. Die allgemeine Lösung der LEGENDREschen Gleichung (57,58) lautet

$$r = C P_1(z) + C' Q_1(z), \tag{57,60}$$

wo

$$P_1(z) = z; \quad Q_1(z) = \frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - 1 \tag{57,61}$$

die LEGENDREschen Funktionen erster und zweiter Art sind. Für $z = 1$ wird die Funktion Q_1 unendlich. Deshalb darf in (57,60) kein Term mit Q_1 auftreten, so

daß nur der zu z proportionale Term bleibt. Vergleicht man die Größen ϱ und r für große z, so erkennt man wegen (57,40) und (57,45) leicht, daß

$$r = \alpha z \tag{57,62}$$

ist. Wir erhalten also schließlich

$$\varrho = r + \alpha. \tag{57,63}$$

Setzen wir diesen Wert für ϱ in den gefundenen Ausdruck für ds^2 ein, so wird

$$d s^2 = c^2 \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right) dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right) dr^2 - (r+\alpha)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2). \tag{57,64}$$

Dabei ist die Konstante α nach (57,55) der Zentralmasse M proportional.

Der Ausdruck für ds^2 in der Form (57,52) (in nichtharmonischen Koordinaten) wurde zuerst von SCHWARZSCHILD [20] abgeleitet und wird häufig nach ihm benannt.

§ 58 Die Perihelbewegung eines Planeten

Die strenge Lösung der Gravitationsgleichungen, die wir im vorigen Paragraphen gefunden haben, soll nun auf das Gravitationsfeld der Sonne und der Planeten angewandt werden.

Wir haben

$$ds^2 = c^2 \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right) dt^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right) dr^2 - (r+\alpha)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \tag{58,01}$$

mit

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}. \tag{58,02}$$

Die Größe α, die der Masse M proportional ist, hat die Dimension einer Länge und wird der Gravitationsradius der Masse M genannt. Bei der Sonne und erst recht bei den Planeten, ist der Gravitationsradius α sehr viel kleiner als der geometrische Radius L (unter L kann man sich den Radius einer Kugel vorstellen, die das gleiche Volumen wie der betrachtete Körper hat). Das ergibt sich deutlich aus folgender Tabelle:

	Sonne	Erde	Mond
α	1,48 km	0,443 cm	0,0053 cm
L	696000 km	6370 km	1738 km
$\alpha : L$	$2 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-11}$.

Bei überdichten Sternen hat α die gleiche Größenordnung wie bei der Sonne, während L zwar kleiner als der Sonnenradius ist, nie aber weniger als ein Hundertstel davon beträgt. Da das Verhältnis α/L sehr klein ist, weicht die Metrik der Raum-Zeit auch in der Nähe und im Inneren der Massen nur wenig von der

euklidischen ab. Man muß jedoch beachten, daß nach (55,45) die Größe g_{00} schon in der NEWTONschen Näherung nicht konstant ist, sondern den Wert $c^2 - 2U$ hat; und jede Abweichung der Größe g_{00} von ihrem konstanten Wert wirkt sich (für langsame Bewegungen) wesentlich stärker aus als eine gleich große relative Abweichung im räumlichen Teil des Intervalls.

Wir wollen nun die gefundene strenge Lösung der Gravitationsgleichungen mit der in § 55 behandelten Näherungslösung vergleichen. Dazu müssen wir in (58,01) von den Kugelkoordinaten zu rechtwinkligen Koordinaten übergehen, die harmonisch sind. Den räumlichen Anteil von (58,01)

$$dl^2 = \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right) dr^2 + (r+\alpha)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \tag{58,03}$$

können wir folgendermaßen schreiben

$$dl^2 = \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right) \frac{\alpha^2}{r^2} dr^2 + \left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2). \tag{58,04}$$

In diesem Ausdruck kann man leicht zu rechtwinkligen Koordinaten übergehen; man erhält dann für ds^2

$$ds^2 = c^2 \frac{r-\alpha}{r+\alpha} dt^2 - \left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - \\ - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right) \frac{\alpha^2}{r^4} (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2. \tag{58,05}$$

Daraus folgt

$$g_{ik} = -\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2 \delta_{ik} - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right) \frac{\alpha^2}{r^4} x_i x_k \tag{58,06}$$

und weiter

$$g_{00} = c^2 \frac{r-\alpha}{r+\alpha}; \quad g_{0i} = 0. \tag{58,07}$$

Vernachlässigen wir in (58,05) das Quadrat der Größe α/r, so finden wir die Näherungsformel (55,45), in der

$$U = c^2 \frac{\alpha}{r} = \frac{\gamma M}{r} \tag{58,08}$$

das NEWTONsche Potential ist.

Aus den Formeln (58,06) und (58,07) ergibt sich für die Determinante g in harmonischen Koordinaten folgender Wert

$$g = -c^2 \left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^4. \tag{58,09}$$

Wir bemerken, daß die Größe

$$\sqrt[4]{-\frac{g}{c^2}} = 1 + \frac{\alpha}{r} \tag{58,10}$$

der LAPLACE-Gleichung mit euklidischen Koeffizienten genügt. Im nächsten Kapitel (§ 68) werden wir sehen, daß im allgemeinen Fall die vierte Wurzel aus $(-g/c^2)$ annähernd die D'ALEMBERT-Gleichung mit euklidischen Koeffizienten erfüllt.

Weiter ergeben sich aus den Formeln (58,06) und (58,07) die kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors, die man auch direkt aus einer Transformation der Gleichung

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} = \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 - \\ - \frac{1}{(r+\alpha)^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\right] \tag{58,11}$$

auf rechtwinklige Koordinaten erhalten kann. Wir wollen die mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten Werte dieser Komponenten aufschreiben:

$$\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik} = -c\delta_{ik} + c\alpha^2\,\frac{x_i x_k}{r^4} \tag{58,12}$$

und

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c}\,\frac{\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^3}{1-\frac{\alpha}{r}}; \qquad \mathfrak{g}^{0i} = 0. \tag{58,13}$$

Mit diesen Formeln bestätigt man leicht, daß unsere Koordinaten tatsächlich harmonisch sind, und daß insbesondere

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{58,14}$$

ist.

Sind die Gravitationspotentiale für das Feld einer Zentralmasse bekannt, so läßt sich die Bewegung eines Teilchens in diesem Feld bestimmen, wenn man die Annahme macht, daß es sich längs einer geodätischen Linie bewegt. Wie wir in § 51 sahen, steht diese Annahme im Einklang mit der NEWTONschen Mechanik. Dieses Bewegungsgesetz für den Massenpunkt werden wir in § 63 mit Hilfe der Gravitationsgleichungen begründen.

Die Gleichungen der geodätischen Linie ergeben sich, wie wir wissen, aus dem Variationsprinzip

$$\delta\int ds = 0. \tag{58,15}$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$\delta \int L\,dt = 0. \tag{58,16}$$

In unserem Fall ist die LAGRANGE-Funktion L gleich der Quadratwurzel aus dem Ausdruck

$$L^2 = c^2 \frac{r-\alpha}{r+\alpha} - \left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \\ - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right) \frac{\alpha^2}{r^4} (x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3)^2, \tag{58,17}$$

wo die punktierten Größen die zeitlichen Ableitungen bedeuten. Es handelt sich hier also um ein einfaches Problem der Punktmechanik.

Zur Lösung dieses Problems benutzen wir den Umstand, daß die LAGRANGE-Funktion kugelsymmetrisch ist. Sie ändert sich also bei einer linearen orthogonalen Transformation der Größen x_1, x_2, x_3 nicht, wenn gleichzeitig die Größen $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ ebenso transformiert werden. Wie aus der Mechanik bekannt (vgl. auch § 27), folgt daraus die Existenz von Flächenintegralen der Form

$$\left.\begin{aligned} x_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} - x_3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= c_1, \\ x_3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - x_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} &= c_2, \\ x_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - x_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= c_3. \end{aligned}\right\} \tag{58,18}$$

Aus (58,18) ist ersichtlich, daß die Bahn des Teilchens in der Ebene

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0 \tag{58,19}$$

liegt. Wählen wir diese Ebene als eine der Koordinatenebenen, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen

$$x_3 = 0; \quad \dot{x}_3 = 0 \tag{58,20}$$

und fortan eine ebene Bewegung betrachten. Zu deren Untersuchung sind am besten Polarkoordinaten geeignet, die sich aus unseren sphärischen Koordinaten für

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}; \quad \dot{\vartheta} = 0 \tag{58,21}$$

ergeben. Das Quadrat der LAGRANGE-Funktion lautet dann in Polarkoordinaten

$$L^2 = c^2 \frac{r-\alpha}{r+\alpha} - \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \dot{r}^2 - (r+\alpha)^2 \dot{\varphi}^2. \tag{58,22}$$

Die LAGRANGE-Funktion hängt also weder von der Zeit t noch von dem Winkel φ ab. Wir erhalten sofort die beiden Integrale

$$\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \text{const}, \tag{58,23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}, \tag{58,24}$$

die dem gewöhnlichen Energieintegral und dem Flächensatz entsprechen. Beachten wir die Beziehung

$$L\,dt = ds = c\,d\tau, \tag{58,25}$$

wo τ die Eigenzeit ist, so können wir die Integrale (58,23) und (58,24) folgendermaßen schreiben

$$\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon, \tag{58,26}$$

$$(r+\alpha)^2\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu. \tag{58,27}$$

Dabei sind ε und μ Konstanten, und zwar kann μ als Drehimpuls der Masseneinheit aufgefaßt werden. Setzen wir

$$\varepsilon = 1 + \frac{E_0}{c^2}, \tag{58,28}$$

wo E_0 eine neue Konstante ist, so ergibt sich aus unseren Formeln in nichtrelativistischer Näherung

$$E_0 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\gamma M}{r}. \tag{58,29}$$

E_0 ist also die Gesamtenergie pro Masseneinheit des Teilchens.

Eine algebraische Folge der Gleichungen (58,26) und (58,27) ist die Beziehung

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2\varepsilon^2 - c^2\frac{r-\alpha}{r+\alpha} - \frac{\mu^2(r-\alpha)}{(r+\alpha)^3}. \tag{58,30}$$

Man erhält sie, wenn man beide Gleichungen in die Identität

$$c^2\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - (r+\alpha)^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = c^2 \tag{58,31}$$

einsetzt. Wir haben damit insgesamt drei Differentialgleichungen erster Ordnung für die Größen r, ϑ, φ als Funktionen von τ gefunden. Die Lösung dieser Gleichungen läßt sich offenbar auf Quadraturen zurückführen. Wir werden die entsprechenden Integrale nicht explizite hinschreiben, sondern uns auf eine Untersuchung der Teilchenbahn, d. h. der Abhängigkeit der Größe r von φ, beschränken.

Eliminieren wir $d\tau$ aus (58,27) und (58,30), so erhalten wir

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2 \varepsilon^2}{\mu^2}(r+\alpha)^4 - \frac{c^2}{\mu^2}(r+\alpha)^3(r-\alpha) - (r+\alpha)(r-\alpha). \quad (58,32)$$

Darin steht rechts ein Polynom vierten Grades in r. Folglich läßt sich φ als elliptisches Integral erster Gattung durch r ausdrücken, und umgekehrt ist r eine elliptische Funktion von φ. Die reelle Periode dieser elliptischen Funktion unterscheidet sich etwas von 2π; die Bahn ist also nicht geschlossen. Das Polynom auf der rechten Seite von (58,32) hat neben der trivialen, negativen Wurzel $r = -\alpha$ die kleine, positive Wurzel

$$r_0 \sim \alpha + \frac{8\alpha^3 c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} \quad (58,33)$$

und außerdem noch zwei Wurzeln r_1 und r_2. Ist $\varepsilon^2 < 1$, so sind diese beiden Wurzeln positiv, und es gilt stets $r_1 < r < r_2$ (Bewegung im Endlichen). Ist dagegen $\varepsilon^2 > 1$, so wird eine der Wurzeln (r_1 oder r_2) negativ; bezeichnen wir die andere, positive Wurzel mit r_1, so gilt $r_1 < r$, und die Bahn reicht bis ins Unendliche. Für $\varepsilon^2 = 1$ wird $r_2 = \infty$.

Wir führen nun statt r die Variable

$$u = \frac{1}{r} \quad (58,34)$$

ein und schreiben das Polynom ausführlich hin

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2(\varepsilon^2-1)}{\mu^2} + \frac{2\alpha c^2}{\mu^2}(2\varepsilon^2-1)\,u + \left(\frac{6\alpha^2 c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} - 1\right)u^2 + $$
$$+ \frac{2\alpha^3 c^2(2\varepsilon^2+1)}{\mu^2}u^3 + \alpha^2\left(1 + \frac{\alpha^2 c^2(\varepsilon^2+1)}{\mu^2}\right)u^4. \quad (58,35)$$

In diesem Ausdruck wollen wir die Größenordnung der einzelnen Glieder abschätzen. Wie in § 55 führen wir eine charakteristische Geschwindigkeit q und eine charakteristische Länge l ein. Dann gilt größenordnungsmäßig

$$\varepsilon^2 - 1 \sim \frac{q^2}{c^2}; \quad \mu^2 \sim l^2 q^2; \quad \alpha \sim \frac{q^2}{c^2}\,l; \quad u \sim \frac{1}{l}.$$

Auf Grund dieser Abschätzungen sieht man sofort, daß auf der rechten Seite von (58,35) die ersten drei Terme (d. h. die Terme mit der nullten, ersten und zweiten Potenz von u) die Größenordnung $1/l^2$ haben, während die letzten beiden Terme mit u^3 und u^4 von der Ordnung $q^4/(c^4 l^2)$ sind. Wenn wir also lediglich die sehr kleinen Terme von der Größenordnung q^4/c^4 (oder α^2/l^2) gegenüber Eins vernachlässigen, so können wir in der Gleichung (58,35) die beiden letzten Glieder fortlassen und erhalten

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2(\varepsilon^2-1)}{\mu^2} + \frac{2\alpha c^2}{\mu^2}(2\varepsilon^2-1)\,u + \left(\frac{6\alpha^2 c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} - 1\right)u^2. \quad (58,36)$$

Die Wurzeln dieses quadratischen Polynoms entsprechen den oben erwähnten Wurzeln r_1 und r_2. Wir setzen

$$u_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{1+e}{p}; \quad u_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{1-e}{p}, \tag{58,37}$$

wo p und e neue Konstanten sind, die mit den ursprünglichen Konstanten ε und μ zusammenhängen. Angenähert haben wir

$$\left.\begin{aligned} 1-\varepsilon^2 &= \frac{\alpha}{p}(1-e^2), \\ \mu^2 &= \alpha c^2 p = \gamma M p. \end{aligned}\right\} \tag{58,38}$$

Wir setzen ferner

$$\nu^2 = 1 - \frac{6\alpha}{p}, \tag{58,39}$$

also angenähert

$$\nu = 1 - \frac{3\alpha}{p}. \tag{58,40}$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir die Gleichung (58,36) in der Form

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{e^2-1}{p^2} + \frac{2}{p}u - u^2 \tag{58,41}$$

schreiben. Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$u = \frac{1 + e\cos\nu\varphi}{p}. \tag{58,42}$$

Dabei ist die Integrationskonstante so gewählt, daß dem minimalen Abstand r (maximalem u) der Wert $\varphi = 0$ entspricht. Der Ausdruck (58,42) gibt den allgemeinen Charakter der Bewegung gut wieder. Für $\nu = 1$ hätten wir eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel mit dem Parameter p und der Exzentrizität e. Wir betrachten den Fall einer Ellipse ($e < 1$). Der Radiusvektor r nimmt seinen Ausgangswert wieder an, wenn der Winkel φ nicht genau um 2π, sondern um etwas mehr, nämlich um $2\pi/\nu$ zugenommen hat. Die Differenz

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\nu} - 2\pi = \frac{6\pi\alpha}{p} \tag{58,43}$$

gibt die Verschiebung des Perihels während eines Umlaufs des Planeten an. Die Bahn eines Planeten kann also als präzessierende Ellipse bezeichnet werden.

Die EINSTEINsche Bewegungsgleichung für einen Planeten läßt sich übrigens auf dieselbe Form bringen wie die klassische Bewegungsgleichung für das sphärische Pendel. Die Planetenbahn hat also dieselbe Form wie die Bahn des Endpunktes des Pendels.[1]

---

[1] Vgl. die Abbildung im Buch von KRYLOV [21].

Für alle Planeten ist der Zahlenwert der Größe $\Delta\varphi$ sehr klein. So findet man für die Erde mit $p = 1{,}5 \cdot 10^8$ km und $\alpha = 1{,}5$ km

$$\Delta\varphi = 6\pi\, 10^{-8} = 0{,}038''$$

während eines Umlaufs, d. h. eines Jahres, oder 3,8″ im Jahrhundert. Für den Merkur ist die Perihelbewegung im Jahrhundert bedeutend größer (43″), denn einmal ist er der Sonne wesentlich näher (sein Bahnradius beträgt nur das 0,39-fache des Erdbahnradius), und zum anderen läuft er schneller um (im Jahrhundert etwa 420 Umläufe).

Beim Vergleich von Theorie und Experiment muß man beachten, daß nicht nur der EINSTEIN-Effekt, sondern auch die Störwirkung der anderen Planeten, die Abweichung ihrer Form von der Kugelgestalt und andere Umstände eine Perihelverschiebung hervorrufen. Diese Korrekturen sind um ein Vielfaches größer als der EINSTEIN-Effekt. Außerdem muß man bedenken, daß sich die Lage des Perihels um so schwerer feststellen läßt, je kleiner die Exzentrizität e ist, d. h. je mehr die Bahn einem Kreis ähnelt; für $e = 0$ ist die Lage des Perihels völlig unbestimmt. Trotz alledem sind die astronomischen Beobachtungsmittel so genau und die rechnerischen Möglichkeiten der Himmelsmechanik so zuverlässig, daß für den Merkur der für die NEWTONsche Theorie nicht verständliche Restbetrag der Perihelbewegung bis auf eine Sekunde im Jahrhundert genau ermittelt werden konnte. Dieser Rest beträgt 42,6″ in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Theorie. Für die Erde läßt sich dieser Restbetrag mit einer etwas geringeren Genauigkeit bestimmen und macht etwa 4″ aus, was ebenfalls mit dem EINSTEINschen Wert gut übereinstimmt.

§ 59 Die Ablenkung eines Lichtstrahls an der Sonne

Wir betrachten nun eine weitere beobachtbare Folgerung aus der EINSTEINschen Gravitationstheorie, nämlich die Ablenkung eines Lichtstrahls, der dicht an der Sonne vorbeigeht. Bevor wir zur Integration der Gleichung eines Lichtstrahls übergehen, wollen wir uns eine allgemeine Vorstellung von der Lichtausbreitung im Schwerefeld der Sonne bilden.

Das Ausbreitungsgesetz für eine Lichtwellenfront schreiben wir, nach Multiplikation der entsprechenden Gleichung mit $\sqrt{-g}$, in der Form

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} = 0. \tag{59,01}$$

Mit den Formeln (58,10) und (58,11) erhalten wir dafür in sphärischen Koordinaten

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^3}{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)} \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left(1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2 - \\ - \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)^2\right] = 0. \tag{59,02}$$

Vernachlässigen wir hierin die Terme der Ordnung α^2/r^2 gegen Eins, so reduziert sich die Gleichung für ω auf

$$\frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - (\operatorname{grad}\omega)^2 = 0 \tag{59,03}$$

mit

$$n^2 = 1 + \frac{4\,\alpha}{r}; \quad n = 1 + \frac{2\,\alpha}{r}. \tag{59,04}$$

Diese Gleichung kann man nun als Ausbreitungsgesetz für das Licht in einem euklidischen Raum, aber in einem Medium mit dem Brechungsindex n auffassen.

Die Gleichung (59,03) läßt sich übrigens schon aus der angenäherten Form für ds^2 [vgl. (55,45)]

$$ds^2 = (c^2 - 2\,U)\,dt^2 - \left(1 + \frac{2\,U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{59,05}$$

ableiten, wobei man für den effektiven Brechungsindex den Wert

$$n = 1 + \frac{2\,U}{c^2} \tag{59,06}$$

findet. Dagegen würde sich aus der für kleine Geschwindigkeiten gültigen angenäherten Form für ds^2 (51,10) der Koeffizient der Größe U in dem Ausdruck für den effektiven Brechungsindex nur halb so groß ergeben. Wie wir weiter unten sehen werden, stimmt mit dem Experiment der Ausdruck (59,06) überein, der der quadratischen Form (59,05) entspricht.

Das fiktive Medium mit dem Brechungsindex (59,06) ist in der Nähe der Sonne optisch dichter als in einiger Entfernung davon. Deshalb wird eine Welle um die Sonne „herumgebogen", d. h., der Lichtstrahl ist dort nicht mehr geradlinig. Wie wir weiter unten sehen werden, hat der Strahl ungefähr die Form eines Hyperbelastes, wobei die Sonne im Brennpunkt der Hyperbel steht. Der Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel gibt die beobachtete Ablenkung des Strahles.

Ein Lichtstrahl ist, wie wir aus § 38 wissen, eine geodätische Null-Linie, deren HAMILTON-JACOBIsche Gleichung mit der Gleichung für die Ausbreitung der Wellenfront identisch ist (vgl. auch Anhang D). Da wir im vorigen Paragraphen das Problem einer geodätischen Linie endlicher Länge schon gelöst haben, können wir die Gleichung für den Strahl aus den dortigen Formeln durch Grenzübergang erhalten. Wir wollen diese Formeln noch einmal aufschreiben. In § 58 fanden wir die Bewegungsintegrale

$$\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon, \tag{58,26}$$

$$(r+\alpha)^2\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu \tag{58,27}$$

und die Bahngleichung

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} (r + \alpha)^4 - \frac{c^2}{\mu^2} (r + \alpha)^3 (r - \alpha) - (r + \alpha)(r - \alpha). \quad (58{,}32)$$

Da für einen Lichtstrahl $d\tau = 0$ ist, so sind jetzt die Konstanten ε und μ in den Formeln (58,26) und (58,27) unendlich groß, aber ihr Verhältnis

$$\frac{(r + \alpha)^3}{r - \alpha} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu}{\varepsilon} = \mu_1 \quad (59{,}07)$$

ist endlich. Damit lautet die Formel (58,32)

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{\mu_1^2} (r + \alpha)^4 - (r + \alpha)(r - \alpha). \quad (59{,}08)$$

Statt der Konstanten μ_1 führt man zweckmäßigerweise die durch

$$\lim \frac{\mu}{\varepsilon} = \mu_1 = cb \quad (59{,}09)$$

definierte Konstante b ein, welche die Dimension einer Länge hat. Die Formel (59,08) lautet dann

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} (r + \alpha)^4 - (r + \alpha)(r - \alpha). \quad (59{,}10)$$

Die entsprechende Gleichung für $u = 1/r$ nimmt die folgende Form an

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} (1 + \alpha u)^4 - u^2 + \alpha^2 u^4. \quad (59{,}11)$$

Wenn man r und φ als Polarkoordinaten in einer euklidischen Ebene auffaßt, so ist die soeben eingeführte Konstante b der „Stoßparameter", d. h. der senkrechte Abstand der Asymptote der Bahn vom Koordinatenursprung. Denn aus den elementaren Formeln der euklidischen Geometrie der Ebene ergibt sich für die Länge des Lotes vom Koordinatenursprung auf die Tangente einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve folgender Ausdruck

$$d = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}}. \quad (59{,}12)$$

Die Asymptote ist nun die Tangente in einem unendlich fernen Punkt ($u = 0$); folglich ist der Stoßparameter der Wert von d für $u = 0$. Dieser Wert ergibt sich aber aus (59,11) und (59,12) zu b.

Wir wenden uns nun der Bahngleichung für den Strahl, und zwar in der Form (59,11), zu. Wenn man annimmt, daß u von der Größenordnung $1/b$ ist, so sind in dieser Gleichung die Terme mit u^3 und u^4 mindestens um den Faktor α^2/b^2

kleiner als die Hauptglieder. Vernachlässigt man diese kleinen Terme, so erhält man eine elementar lösbare Gleichung. Die angenäherte Lösung lautet

$$u = \frac{2\alpha}{b^2} + \frac{1}{b}\cos\varphi. \tag{59,13}$$

Dabei wurde die Integrationskonstante so gewählt, daß dem Wert $\varphi = 0$ das Maximum von u (und folglich das Minimum des Abstandes r) entspricht. Angenähert ist

$$r_{\min} = b - 2\alpha. \tag{59,14}$$

In der euklidischen r, φ-Ebene ist (59,13) die Gleichung einer Hyperbel. Die Richtungen der Asymptoten dieser Hyperbel ergeben sich daraus als diejenigen Werte von φ, für die $u = 0$ ist. Diese Gleichung für φ lautet

$$\cos\varphi = -\frac{2\alpha}{b}. \tag{59,15}$$

Hier ist die rechte Seite eine kleine, negative Größe. Die Grenzwerte für den Winkel φ sind also gleich

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta; \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \delta, \tag{59,16}$$

wobei die kleine, positive Größe δ gleich

$$\delta = \frac{2\alpha}{b} \tag{59,17}$$

gesetzt werden kann. Der Ablenkwinkel des Strahls ist der Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel; er beträgt

$$2\delta = \frac{4\alpha}{b}. \tag{59,18}$$

Die Verschiebung der Position eines Sternes, dessen Licht dicht an der Sonne vorbeigeht, kann während einer totalen Sonnenfinsternis beobachtet werden. Setzt man b gleich dem Sonnenradius, so findet man für den Ablenkwinkel 2δ den Wert

$$2\delta = 1'',75, \tag{59,19}$$

was gut mit den Beobachtungen übereinstimmt. Die Auswertung der Messungen bei der Sonnenfinsternis im Jahre 1952 ergab $1'',70$. Auf Grund dieses Resultates kann man mit Sicherheit sagen, daß das beobachtete Ausbreitungsgesetz für das Licht dem Ausdruck (59,05) für ds^2, nicht aber dem Ausdruck (51,10) entspricht, der einen halb so großen Wert, d. h. $0'',87$, liefern würde.

Zum Schluß wollen wir noch eine Bemerkung über die Definition einer Geraden in der Gravitationstheorie machen. Soll man eine Gerade als Lichtstrahl oder als

Gerade in dem euklidischen Raum definieren, in dem als kartesische Koordinaten die harmonischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 benutzt werden? Uns scheint die zweite Definition die einzig richtige zu sein. Wir haben sie auch tatsächlich verwendet, als wir sagten, ein Lichtstrahl habe in Sonnennähe die Gestalt der Hyperbel (59,13). Die harmonischen Koordinaten entsprechen in den hier betrachteten Fällen in vollkommener Weise der Natur von Raum und Zeit (speziell sind sie an deren Charakter im räumlich Unendlichen gut angepaßt), und die Definition der Geraden muß auf ihnen basieren. Das Argument, daß die Gerade als Lichtstrahl am unmittelbarsten zu beobachten sei, ist gegenstandslos: Bei einer Definition ist nicht die unmittelbare Beobachtungsmöglichkeit, sondern die Übereinstimmung mit der Natur entscheidend, auch wenn diese Übereinstimmung durch indirekte Schlüsse festgestellt werden muß.

§ 60 Das Variationsprinzip für die Gravitationsgleichungen

In den Gravitationsgleichungen

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = - \frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu} \tag{60,01}$$

steht links der konservative Tensor und rechts der Massentensor. Wie wir in § 48 sahen, kann man den Ausdruck für den Massentensor aus der Variation des Wirkungsintegrals nach den Komponenten des Fundamentaltensors gewinnen. Für die hydrodynamischen Gleichungen etwa läßt sich das Wirkungsintegral in der Form

$$S = \int (\varrho^* c^2 + \varrho^* \Pi) \sqrt{-g}\, (dx) \tag{60,02}$$

schreiben. Hier ist ϱ^* die invariante Dichte desjenigen Teils der Ruhmasse, der sich bei der Bewegung nicht ändert und der Kontinuitätsgleichung (48,29) genügt; die Größe Π aber wird durch die Formel (48,30) definiert und ist die potentielle Energie der elastischen Kompression der Flüssigkeit pro Masseneinheit. Wenn man das Integral S nach den Komponenten des Fundamentaltensors variiert, so erhält man

$$\delta_g S = \frac{c^2}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, (dx), \tag{60,03}$$

wo $T^{\mu\nu}$, der Massentensor der Hydrodynamik, durch die Formel (48,39) gegeben ist. In der Elektrodynamik hat das Wirkungsintegral die Form (47,37); auch dort ist der Hauptterm von der Ruhmasse abhängig und lautet dabei genauso wie in der Hydrodynamik. Die Variation des elektrodynamischen Wirkungsintegrals nach den $g_{\mu\nu}$ hat ebenfalls die Form (60,03), wo aber jetzt $T^{\mu\nu}$ der durch die Formeln (46,22) und (46,32) definierte elektrodynamische Massentensor ist. Die Variation des Wirkungsintegrals nach den übrigen darin auftretenden Funktionen (den Verrückungen und den Feldkomponenten) liefert, wie wir wissen, die Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems.

Wir wollen nun annehmen, das betrachtete System sei so beschaffen, daß die Formel (60,03) gilt, wobei S das entsprechende Wirkungsintegral ist. Dann läßt sich der Massentensor auf der rechten Seite der Gravitationsgleichungen (60,01) als Koeffizient der Größen $\delta g_{\mu\nu}$ in dem Ausdruck für die Variation eines Integrals auffassen. Wir wollen versuchen, auch die linke Seite der Gravitationsgleichungen, d. h. den konservativen Tensor, in analoger Form darzustellen.

Zu diesem Zweck betrachten wir das Integral

$$I = \int R \sqrt{-g}\,(d\,x), \tag{60,04}$$

wo R der Krümmungsskalar ist, und bilden seine Variation. Bei der Berechnung der Variation des Integranden benutzen wir die Tatsache, daß die Variation der CHRISTOFFEL-Symbole ein Tensor ist (obwohl diese Symbole selbst keinen Tensor bilden). Das läßt sich folgendermaßen beweisen: Nach (42,04) lautet das Transformationsgesetz für die CHRISTOFFEL-Symbole

$$\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\varrho} = -\left(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\right)'\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}. \tag{60,05}$$

Diese Formel gilt für die Größen $\Gamma^\varrho_{\mu\nu}$, die sich auf die gegebene Metrik $(g_{\alpha\beta})$ beziehen. Wir variieren nun die Metrik, wobei wir den Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Koordinaten aufrechterhalten. Der Metrik $(g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta})$ entsprechen dann die Größen $\Gamma^\varrho_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\varrho_{\mu\nu}$, und aus Gleichung (60,05) folgt

$$\delta\Gamma^\varrho_{\mu\nu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\varrho} = \left(\delta\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\right)'\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}. \tag{60,06}$$

Damit ist gezeigt, daß die Variationen $\delta\Gamma^\varrho_{\mu\nu}$ einen gemischten Tensor dritter Stufe bilden.

Zur Berechnung der Variation des Skalars R gehen wir von den Ausdrücken

$$R^\alpha_{\mu,\beta\nu} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \Gamma^\varrho_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\varrho\nu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\Gamma^\varkappa_{\varrho\beta}, \tag{60,07}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\varrho_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\varrho\nu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\Gamma^\varkappa_{\varrho\alpha} \tag{60,08}$$

für die gemischten Komponenten des Krümmungstensors vierter Stufe und für die kovarianten Komponenten des Tensors zweiter Stufe aus. In einem Koordinatensystem, das in dem betrachteten Punkt geodätisch ist, nimmt die Variation von $R_{\mu\nu}$ die Form

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) \tag{60,09}$$

an, denn in diesem Punkt verschwinden alle CHRISTOFFEL-Symbole. Daraus folgt (nach Vertauschung einiger Indizes im ersten Term rechts)

$$g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = g^{\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu}\right) - g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right). \tag{60,10}$$

Wir führen nun den Vektor

$$w^{\alpha} = g^{\mu\nu}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}\,\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} \tag{60,11}$$

ein. Man sieht leicht, daß die Gleichung (60,10) mit

$$g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\,w^{\alpha}\right) \tag{60,12}$$

äquivalent ist, denn in einem geodätischen Koordinatensystem kann man die Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}$ vor das Ableitungssymbol ziehen. Beide Seiten der Gleichung (60,12) sind aber Skalare. Wenn also diese Gleichung in einem geodätischen Koordinatensystem gilt, so gilt sie auch allgemein.

Wir nehmen nun an, daß an den Integrationsgrenzen des Integrals (60,04) nicht nur die Variationen $\delta g_{\mu\nu}$ selbst, sondern auch ihre Ableitungen und damit die Größen $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ und der Vektor w^{α} verschwinden. Schreiben wir dann das Integral I in der Form

$$I = \int R_{\mu\nu}\,g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) = \int R_{\mu\nu}\,\mathfrak{g}^{\mu\nu}(dx), \tag{60,13}$$

so erhalten wir für seine Variation den Ausdruck

$$\delta I = \int R_{\mu\nu}\,\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu}(dx). \tag{60,14}$$

Denn wegen der Gleichung (60,12) ist

$$\int \delta R_{\mu\nu}\,g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) = 0. \tag{60,15}$$

Mit den Formeln

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}, \tag{60,16}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} \tag{60,17}$$

finden wir

$$\delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \delta\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\beta}\right)\delta g_{\alpha\beta}. \tag{60,18}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (60,14) ein und führen die Summation über μ und ν aus, so wird

$$\delta I = \int\left(\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\,R - R^{\alpha\beta}\right)\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,(dx). \tag{60,19}$$

Damit ist unser vorläufiges Ziel erreicht: Wir haben den konservativen Tensor als Koeffizienten einer Variation nach dem Fundamentaltensor dargestellt.

Wenn wir nun die Formeln (60,03) und (60,19) gegenüberstellen, so können wir schließen, daß die Variation des Ausdrucks

$$W = S - \frac{c^4}{16\pi\gamma} I \tag{60,20}$$

nach den Komponenten des Fundamentaltensors gleich

$$\delta_g W = \frac{c^2}{2} \int \left\{ T^{\mu\nu} + \frac{c^2}{8\pi\gamma} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \right\} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx) \tag{60,21}$$

ist. Diese Variation verschwindet auf Grund der Gravitationsgleichungen (60,01). Umgekehrt lassen sich die Gravitationsgleichungen aus dem Variationsprinzip $\delta W = 0$ gewinnen, wenn man nach den Komponenten des Fundamentaltensors variiert und die Größen $\delta g_{\mu\nu}$ als willkürlich ansieht. (Man beachte, daß wir bereits in § 48 die Variation des Wirkungsintegrals nach den $g_{\mu\nu}$ betrachtet haben, dort aber die Größen $\delta g_{\mu\nu}$ nicht ganz unabhängig waren, weil sie einer infinitesimalen Koordinatentransformation entsprachen und durch die vier Funktionen η_ν dargestellt werden konnten.)

Variieren wir W nach den übrigen Funktionen, die im Wirkungsintegral S auftreten, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen und die Feldgleichungen für diese Funktionen. Auf diese Weise sind die Gravitationsgleichungen (für das Schwerefeld) mit den Gleichungen für die übrigen Felder (Geschwindigkeitsfeld der Materie, elektromagnetisches Feld usw.) in einem gemeinsamen Variationsprinzip zusammengefaßt.

Man kann dem Variationsprinzip eine etwas andere Form geben, wenn man statt des invarianten Integrals

$$I = \int R \sqrt{-g}\,(dx) \tag{60,04}$$

ein anderes verwendet, das zwar nicht invariant ist, dafür aber keine zweiten Ableitungen enthält. Im Anhang B wird die Formel

$$R = \Box\, y - \Gamma - L \tag{60,22}$$

abgeleitet, wo $\Box\, y$ der D'ALEMBERT-Operator (B, 51) ist, angewandt auf $y = \lg\sqrt{-g}$; die Größe Γ wird durch die Formel (B, 43) definiert, während man die Größe L nach (B, 54) als

$$L = g^{\mu\nu} (\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}), \tag{60,23}$$

aber auch in vielen anderen Formen, die im Anhang B angegeben sind, darstellen kann. Mit den Bezeichnungen (B, 59) und (B, 61) läßt sich (60,22) auch schreiben

$$R = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g}\,(y^\nu - \Gamma^\nu) \right) - L. \tag{60,24}$$

Das Integral I unterscheidet sich von dem Ausdruck

$$I^* = -\int L \sqrt{-g}\,(dx) \tag{60,25}$$

um die Größe

$$I' = \int \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g}\,(y^\nu - \Gamma^\nu))\,(dx). \tag{60,26}$$

Diese läßt sich aber in ein Oberflächenintegral umwandeln, so daß ihre Variation verschwindet. Deshalb sind die Variationen der Integrale I und I^* einander gleich:

$$\delta I = \delta \int R \sqrt{-g}\,(dx) = -\,\delta \int L \sqrt{-g}\,(dx) = \delta I^*. \tag{60,27}$$

Da bei einem Variationsprinzip nicht die zu variierenden Integrale selbst, sondern nur deren Variationen wesentlich sind, kann man in der Formel (60,20) I durch I^* ersetzen. Dabei hängt die Größe δI^* (die ja gleich δI ist) nicht vom Koordinatensystem ab, obwohl das für das Integral I^* durchaus der Fall sein kann. Die Einführung von I^* statt I bezweckt die Beseitigung der zweiten Ableitungen im Integranden. Die Formel

$$\delta \int L \sqrt{-g}\,(dx) = \int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta} R\right) \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx), \tag{60,28}$$

die sich aus (60,19) und (60,24) ergibt, läßt sich natürlich auch unmittelbar ableiten; allerdings sind die entsprechenden Rechnungen ziemlich kompliziert.

§ 61 Über die lokale Äquivalenz eines Beschleunigungs- und eines Gravitationsfeldes

Unter dem Äquivalenzprinzip versteht man in der Gravitationstheorie die Behauptung, daß ein Beschleunigungsfeld in gewissem Sinne mit einem Gravitationsfeld äquivalent ist.

Dieses Äquivalenzprinzip hängt mit dem grundlegenden Gesetz der Gleichheit von träger und schwerer Masse zusammen, ist aber damit nicht identisch. Das Gesetz der Gleichheit von träger und schwerer Masse, das wir in § 51 bei der Aufstellung der Gravitationsgleichungen benutzt haben, hat allgemeinen Charakter, während die Äquivalenz zwischen einem Beschleunigungs- und einem Schwerefeld nur lokal gilt, sich also nur auf die infinitesimale Umgebung eines Raumpunktes (d. h. auf die räumliche Umgebung einer zeitartigen Weltlinie) bezieht.

Die Äquivalenz besteht in folgendem: Durch Einführung eines geeigneten Koordinatensystems (das gewöhnlich als beschleunigt bewegtes Bezugssystem gedeutet wird) kann man die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt, der sich in einem Schwerefeld befindet, so transformieren, daß sie (in dem neuen Bezugssystem) die Gestalt der Bewegungsgleichungen eines *freien* Massenpunktes annehmen. Dadurch wird das Gravitationsfeld sozusagen durch ein Beschleunigungsfeld ersetzt (oder, besser gesagt, nachgeahmt). Wegen der Gleichheit von träger und schwerer Masse ist diese Transformation für jeden beliebigen Wert der Masse des Massenpunktes die gleiche. Sie erreicht aber ihr Ziel nur in einem infinitesimalen Raumgebiet, ist also streng lokal. Mathematisch entspricht diese

Transformation im allgemeinen Fall dem Übergang zu einem lokal-geodätischen Koordinatensystem[1]) (§ 42).

Man kann versuchen, dem Äquivalenzprinzip eine weniger lokale Bedeutung zu geben, es also nicht auf einen infinitesimalen, sondern auf einen endlichen Raumbereich anzuwenden, in dem dann aber das Feld homogen sein muß. Dann gilt aber dieses „Prinzip“ nur in dem Maße, in dem die NEWTONsche Mechanik zutrifft, nämlich nur für schwache, homogene Felder und langsame Bewegungen (vgl. das unten diskutierte Beispiel).

Während EINSTEIN seine Gravitationstheorie schuf, diese aber noch nicht fertig vorlag, hat das Äquivalenzprinzip eine große Rolle gespielt. Wir wollen hier eine Überlegung EINSTEINs aus dieser Zeit wiedergeben und sie analysieren.

EINSTEIN erläutert seine „Äquivalenzhypothese“ am Beispiel eines Laboratoriums in einem frei fallenden Fahrstuhl. Alle Gegenstände in diesem Fahrstuhl sind sozusagen schwerelos: Sie fallen zusammen mit dem Fahrstuhl mit der gleichen Beschleunigung wie dieser, so daß ihre Relativbeschleunigungen verschwinden, auch wenn sie nicht am Boden oder an den Wänden des Fahrstuhls befestigt sind. Wir haben, so sagt EINSTEIN, zwei Bezugssysteme: Ein Inertialsystem (oder wenigstens nahezu ein solches), das mit der Erde, und ein anderes, beschleunigtes System, das mit dem Fahrstuhl verbunden ist. In dem ersten System, dem Inertialsystem, gibt es ein Gravitationsfeld, in dem zweiten, beschleunigten System, nicht. Nach EINSTEIN kann also eine Beschleunigung die Schwere oder zumindest ein homogenes Gravitationsfeld ersetzen. Diesen Gedanken entwickelt EINSTEIN noch weiter. Er schlägt vor, die beiden Bezugssysteme — das beschleunigte und das nichtbeschleunigte — als physikalisch völlig gleichberechtigt zu betrachten und weist darauf hin, daß man von diesem Standpunkt von einer absoluten Beschleunigung ebensowenig sprechen kann wie von einer absoluten Geschwindigkeit.

Diesen Gedankengang von EINSTEIN wollen wir etwas genauer untersuchen. Zunächst ist zu fragen: Was ist überhaupt ein beschleunigt bewegtes Bezugssystem, und wie läßt es sich physikalisch realisieren? Im Beispiel des Fahrstuhls scheint das „Bezugssystem“ mit irgendeinem Kasten (dem Korb des Fahrstuhls) identifiziert zu werden. Wir wissen aber (vgl. den Schluß von § 32), daß selbst ohne Berücksichtigung der Gravitation die Abstraktion eines starren Körpers unzulässig ist; jeder Körper wird bei einer Beschleunigung deformiert, und zwar verschiedene Körper in verschiedener Weise. Deshalb ist das Modell eines Kastens oder starren Gerüstes, das wir in § 11 für ein Inertialsystem betrachtet haben, für ein beschleunigtes Bezugssystem ungeeignet. In den Überlegungen EINSTEINs ist also der Ausgangsbegriff, das beschleunigt bewegte Bezugssystem, nicht widerspruchsfrei definiert. Diese Schwierigkeit könnte man nur umgehen, indem man der Beschleunigung und den Abmessungen des betrachteten Gebietes Beschränkungen auferlegt. Man könnte zum Beispiel fordern: Die zulässigen Beschleunigungen müßten so klein sein, daß man die von ihnen hervorgerufenen Deformationen in dem betrachteten Gebiet vernachlässigen und den Begriff des starren Körpers anwenden kann. Dann wird aber der Näherungscharakter der EINSTEINschen Überlegung deutlich.

---

[1]) Nach FERMI läßt sich auch ein Koordinatensystem einführen, das längs einer Weltlinie lokal-geodätisch ist (vgl. LEVI-CIVITA [16]).

Ferner hebt EINSTEIN selbst hervor, daß sich nicht jedes Schwerefeld durch eine Beschleunigung ersetzen läßt; damit das möglich ist, muß das Schwerefeld homogen sein. Auch dadurch werden die räumlichen Abmessungen des betrachteten Gebietes, in dem das Gravitationsfeld einer Beschleunigung annähernd äquivalent ist, beschränkt. So kann man zum Beispiel das Schwerefeld der Erdkugel nicht „beseitigen"; dazu müßte man ein sich „beschleunigt kontrahierendes" Bezugssystem einführen, was widersinnig ist.

EINSTEIN wandte sein Äquivalenzprinzip auch nichtlokal an. In seiner Arbeit aus dem Jahre 1911 versuchte er auf diese Weise die Lichtausbreitung in der Nähe einer großen Masse zu berechnen; er erhielt aber für die Ablenkung eines Lichtstrahls nur die Hälfte des richtigen Wertes, d. h. des Wertes, der sich aus seiner Gravitationstheorie ergibt (vgl. § 59). Der Grund hierfür liegt darin, daß das Äquivalenzprinzip nicht den richtigen Ausdruck (51,11) für ds^2 liefern kann, sondern höchstens den Ausdruck (51,10), der für langsame Bewegungen gilt. Auch bei einer nichtlokalen Deutung ist also die angenäherte Äquivalenz zwischen Beschleunigung und Gravitation beschränkt. Wie bereits gesagt, gilt sie nur für schwache homogene Felder und langsame Bewegungen.

Wegen der geschilderten Beschränkungen verdient eigentlich die angenäherte Äquivalenz des Beschleunigungs- und des Gravitationsfeldes nicht den Namen eines physikalischen Prinzips, und es läßt sich darauf kaum in logisch befriedigender Weise die Gravitationstheorie aufbauen. Das physikalische Prinzip, das sich wirklich zum Aufbau der Gravitationstheorie eignet, ist die Gleichheit von träger und schwerer Masse. Dieses Gesetz liegt auch unseren Überlegungen zugrunde.

Wie erwähnt, war EINSTEIN der Meinung, daß vom Standpunkt des Äquivalenzprinzips aus von einer absoluten Beschleunigung zu sprechen ebenso unmöglich sei wie von einer absoluten Geschwindigkeit. Dieser Schluß EINSTEINS scheint uns aber unzutreffend.

Mathematisch ist EINSTEINS Fehlschluß auf die Verwechslung der Begriffe „Homogenität der Raum-Zeit" und „Kovarianz der Tensorgleichungen" zurückzuführen, die wir schon in der Einleitung besprochen haben. Vom Standpunkt der vollständigen Gravitationstheorie ist also der Fehler offensichtlich. Aber auch wenn man sich auf den Standpunkt stellt, welcher der Sachlage entspricht, die *vor* der vollständigen Formulierung der EINSTEINschen Gravitationstheorie existierte, kann EINSTEINS Schluß über den relativen Charakter der Beschleunigung nicht aufrechterhalten werden. Dieser Schluß basiert nämlich auf der Annahme, daß ein Gravitationsfeld von einem Beschleunigungsfeld nicht zu unterscheiden ist. Wenn man auch die Wirkungen dieser Felder „im Kleinen" (d. h. lokal) nicht unterscheiden kann, so sind sie doch „im Großen" (d. h. unter Berücksichtigung der Randbedingungen für das Gravitationsfeld) durchaus unterscheidbar. So ist z. B. das Gravitationspotential, das man bei der Einführung eines gleichförmig beschleunigten Bezugssystems erhält, eine lineare Funktion der Koordinaten und erfüllt daher die Randbedingungen für das Unendliche nicht (dort müßte es verschwinden). In einem rotierenden Bezugssystem wächst das Potential der Zentrifugalkraft proportional dem Quadrat des Abstandes von der Drehachse; außerdem treten dort CORIOLIS-Kräfte auf. An diesem Verhalten kann man sofort erkennen, daß das „Gravitationsfeld" in solchen Bezugssystemen fiktiv ist.

Wir wollen nun das Beispiel des gleichförmig beschleunigten Bezugssystems etwas ausführlicher betrachten und dabei die Relativitätstheorie berücksichtigen. Auf die Frage der Realisierung eines solchen beschleunigt bewegten Bezugssystems werden wir dabei nicht eingehen, sondern den Ausdruck „Bezugssystem" mehr formal im Sinne von „Koordinatensystem" auffassen. Entsprechend soll unter dem Übergang zu einem beschleunigt bewegten Bezugssystem irgendeine Koordinatentransformation, die die Zeit nichtlinear enthält, verstanden werden.

Wir nehmen an, daß kein echtes Gravitationsfeld vorhanden sei und das Quadrat des infinitesimalen Intervalls die Form

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) \tag{61,01}$$

habe, wo (x', y', z', t') die kartesischen Koordinaten und die Zeit in einem Inertialsystem sind. Nun führen wir folgende Koordinatentransformation durch[1])

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cosh \frac{gt}{c} + \frac{c^2}{g}\left(\cosh \frac{gt}{c} - 1\right), \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{c}{g} \sinh \frac{gt}{c} + \frac{x}{c} \sinh \frac{gt}{c}. \end{aligned}\right| \tag{61,02}$$

Hier ist g eine Konstante von der Dimension einer Beschleunigung. Unter der Bedingung

$$\frac{gt}{c} \ll 1 \tag{61,03}$$

lassen sich die obigen Formeln folgendermaßen schreiben

$$x' = x + \frac{1}{2} gt^2, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{61,04}$$

Setzen wir (61,02) in (61,01) ein, so ergibt sich

$$ds^2 = \left(c + \frac{gx}{c}\right)^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{61,05}$$

Wir fragen nun: Kann man diesen Ausdruck als Quadrat des Intervalls in einem *Inertialsystem* deuten, in dem ein Schwerefeld vorhanden ist? Die Antwort auf diese Frage entscheidet gleichzeitig über die Richtigkeit des Äquivalenzprinzips.

Um diese Antwort zu finden, vergleichen wir den Ausdruck (61,05) mit dem aus der Gravitationstheorie folgenden Näherungsausdruck

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\, dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{61,06}$$

---

[1]) Diese Transformation wurde von Møller [22] angegeben.

wo U das NEWTONsche Potential eines echten Gravitationsfeldes ist. Unter der Bedingung

$$|gx| \ll c^2 \tag{61,07}$$

stimmen die Koeffizienten von dt^2 angenähert überein, wenn wir dem Gravitationspotential den Wert

$$U = -gx \tag{61,08}$$

geben. Was den Koeffizienten des räumlichen Anteils von ds^2 betrifft, so ist seine Abweichung von dem Wert Eins für solche Intervalle unwesentlich, für welche die Größe

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \tag{61,09}$$

der Ungleichung

$$v^2 \ll c^2 \tag{61,10}$$

genügt. Der Wert (61,08) des Gravitationspotentials entspricht nach der NEWTONschen Mechanik tatsächlich einer gleichförmig beschleunigten Bewegung. Ist die Anfangsgeschwindigkeit Null, so sind die Werte von x', y', z' konstant, und wir haben angenähert

$$x + \frac{1}{2} gt^2 = \text{const}. \tag{61,11}$$

Das entspricht einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in den Koordinaten (x, t).

Der soeben durchgeführte Vergleich der beiden Ausdrücke für das Quadrat des Intervalls zeigt, daß ein beschleunigt bewegtes Bezugssystem ohne Schwerkraft tatsächlich eine gewisse Analogie[1]) zu einem Inertialsystem aufweist, in dem ein Gravitationsfeld vorhanden ist. Der nämliche Vergleich zeigt jedoch auch, daß die Analogie bei weitem nicht vollständig ist, so daß von einer wirklichen Äquivalenz oder Nichtunterscheidbarkeit zwischen dem Beschleunigungs- und dem Gravitationsfeld gar keine Rede sein kann. Das betrachtete Beispiel bestätigt also vollauf den oben formulierten Schluß, daß nämlich eine „Äquivalenz" nur in einem beschränkten Raumbereich und nur für schwache homogene Felder und langsame Bewegungen besteht [Gleichung (61,08) zusammen mit den Ungleichungen (61,07) und (61,10)].

Wir sagten bereits, daß man die echten Gravitationsfelder von den fiktiven, die durch eine Beschleunigung hervorgerufen werden, wohl unterscheiden kann, wenn man nur den ganzen Raum betrachtet. In der NEWTONschen Theorie

---

[1]) Diese Analogie kann man beim Aufbau der Gravitationstheorie verwenden. Die Möglichkeit, den Ausdruck (61,01) auf die Form (61,05) zu bringen, deutet darauf hin, daß das NEWTONsche Potential gerade in den Koeffizienten von dt^2 eingehen muß. In dieser Hinsicht ist die Analogie zweifellos von Nutzen. Jedoch haben wir in § 51 die Form von ds^2 in der NEWTONschen Näherung durch allgemeinere Betrachtungen gefunden, ohne dabei diese Analogie zu benutzen. (In unseren Betrachtungen haben wir nicht den mangelhaft definierten Begriff eines beschleunigten Bezugssystems benutzt und auch nicht das Gravitationsfeld als homogen vorausgesetzt.)

gelingt die Unterscheidung mit Hilfe der Randbedingungen für das NEWTONsche Gravitationspotential. In der EINSTEINschen Theorie lassen sich die wahren Gravitationsfelder von den fiktiven in harmonischen Koordinaten trennen (die Komponenten des Fundamentaltensors müssen dabei die in § 54 angegebenen Randbedingungen erfüllen). Nun wird in § 93 gezeigt: Wenn der Eindeutigkeitssatz für die Wellengleichung gilt, dann sind auch die harmonischen Koordinaten bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig festgelegt. Deshalb kann man annehmen, daß alle fiktiven Gravitationsfelder automatisch ausgeschlossen werden, wenn man harmonische Koordinaten einführt. Für die quadratische Form (61,05) zum Beispiel sind die ursprünglichen Koordinaten (61,02), in denen das Quadrat des Intervalls die Form (61,01) hat, harmonisch.

Durch die Bedingungen der Harmonizität werden die willkürlichen Koordinatentransformationen [wie etwa (61,02) oder (61,04)], auf denen die Überlegungen über die lokale Äquivalenz basieren, überhaupt nicht zugelassen. Aber wenn man diese Bedingungen aufgibt und versucht, die Variablen (x, y, z, t) in der Formel (61,05) als kartesische Koordinaten und als Zeit zu deuten, so ist das nur „im Kleinen" möglich. Betrachtet man nämlich den Ausdruck (61,05) „im Großen", so wird unmittelbar klar, daß eine solche Deutung auf Widersprüche stößt. Erstens verletzt der Koeffizient von dt^2 die Randbedingungen, denn er geht wie die Koordinate x gegen Unendlich; zweitens verschwindet dieser Koeffizient (und damit die „Lichtgeschwindigkeit") in einer bestimmten Ebene $(x = - c^2/g)$, was nicht sein darf.

Noch deutlicher werden diese Verhältnisse bei der Transformation (35,47), die in der NEWTONschen Mechanik der Einführung eines rotierenden Koordinatensystems entspricht. Setzen wir den Ausdruck (35,47) in (61,01) ein, so erhalten wir

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2 (x^2 + y^2)]\, dt^2 - 2\omega (y\, dx - x\, dy)\, dt - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{61,12}$$

Hier verletzt der Fundamentaltensor nicht nur die Randbedingungen, sondern in hinreichend großem Abstand von der Drehachse auch die in § 35 aufgestellten Ungleichungen. Das zeigt, daß der Ausdruck (61,12) keineswegs im Sinne der „Äquivalenzhypothese" gedeutet werden kann.

Bei den Überlegungen dieses Paragraphen haben wir die allgemeine Tensoranalysis nicht benutzt. Ihre Anwendung auf die Formeln (61,05) und (61,12) würde ergeben, daß der Krümmungstensor vierter Stufe verschwindet, d. h., daß keine echten Gravitationsfelder vorhanden sind.

Abschließend bemerken wir nochmals, daß wir bei der Herleitung der EINSTEINschen Gravitationsgleichungen *kein beschleunigt bewegtes Bezugssystem betrachtet* und folglich auch *das Äquivalenzprinzip nicht benutzt haben.* Wir stützten uns auf das Gesetz der Gleichheit von träger und schwerer Masse, das allgemein gilt und keinen lokalen Charakter hat. Was das Äquivalenzprinzip betrifft, so bildet es keine besondere physikalische Hypothese; insofern es überhaupt gilt, ist es in der Hypothese des RIEMANNschen Charakters der Raum-Zeit enthalten. Der mathematische Ausdruck dafür ist, wie schon gesagt, die Möglichkeit, ein lokalgeodätisches Koordinatensystem längs einer zeitartigen Weltlinie einzuführen (§ 42).

§ 62 Das Uhrenparadoxon

Als Abschluß dieses Kapitels wollen wir das sog. Uhrenparadoxon behandeln. Wir gehen nicht deshalb darauf ein, weil es sich um ein besonders wichtiges oder schwer lösbares Problem handelt, sondern weil dieses Paradoxon in der Literatur oft diskutiert, aber nicht immer völlig befriedigend erklärt wurde.

Das Paradoxon beruht auf einer inkonsequenten Anwendung des Begriffs der Relativbewegung und auf der Nichtbeachtung des Unterschiedes zwischen einem Inertialsystem und einem nichtinertialen Bezugssystem. Es besteht in folgendem.

Wir stellen uns eine Uhr A vor, die in irgendeinem Inertialsystem ruht. An ihr bewege sich eine Uhr B mit der konstanten Geschwindigkeit v vorbei. Wenn diese Uhr eine bestimmte Strecke zurückgelegt hat, so beschleunigt man sie derart, daß sich das Vorzeichen der Geschwindigkeit umkehrt und sie nach einiger Zeit mit der Geschwindigkeit $-v$ wieder die Uhr A passiert. Wenn die Uhr B an der Uhr A vorbeikommt (auf dem Hin- und auf dem Rückwege), ist ein unmittelbarer Vergleich der Zeigerstellungen möglich (ohne Benutzung von Lichtsignalen). Dabei muß sich ergeben, daß die Uhr B nachgeht; zumindest führt die Anwendung der in § 14 abgeleiteten Formeln für die Eigenzeit zu dieser Schlußfolgerung. Nun ist aber die Bewegung relativ. Man könnte also statt der Uhr A die Uhr B als ruhend ansehen. Von diesem Standpunkt betrachtet, entfernt sich die Uhr A zunächst gleichförmig von der Uhr B; später nähert sie sich ihr wieder gleichförmig: Nach den nämlichen Formeln des § 14 müßte sich jetzt ergeben, daß die Uhr A nachgeht, was dem obigen Ergebnis widerspricht.

Die Differenz der Zeigerstellungen von Uhren, die sich am gleichen Raumpunkt befinden, ist aber eine absolute und objektive Tatsache (d. h. weder vom Bezugssystem noch von der Betrachtungsweise abhängig). Deshalb muß jede Art der Betrachtung, sofern sie nur zulässig ist, zum gleichen Resultat führen. Ein Widerspruch in den Ergebnissen zeigt, daß die Überlegungen irgendwo fehlerhaft sind.

Wie man leicht einsieht, liegt der Fehler darin, daß man nicht beachtet hat, daß sich die Uhren A und B bei dem obigen Gedankenexperiment unter verschiedenen physikalischen Bedingungen befinden: Die Uhr A wird nicht beschleunigt und erleidet auch keine Stöße, während die Uhr B eine Beschleunigung erfährt und einen Stoß erleidet, der das Vorzeichen ihrer Geschwindigkeit umkehrt. Mit anderen Worten, der Fehler liegt darin, daß in den obigen Überlegungen beide Bezugssysteme (das mit der Uhr A und das mit der Uhr B verbundene) als gleichberechtigt angesehen wurden, was in Wirklichkeit gar nicht der Fall war: Nur das mit der Uhr A verbundene Bezugssystem ist ein Inertialsystem.

Das ist die qualitative Erklärung des Paradoxons. Mathematisch läuft diese Erklärung darauf hinaus, daß es nicht zulässig ist, die in § 14 angegebene Formel für die Eigenzeit

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{62,01}$$

auch in einem beschleunigten Bezugssystem anzuwenden.

Wie ist nun die Formel (62,01) im Fall eines beliebigen Bezugssystems abzuändern? Paradoxa der erwähnten Art sind jedenfalls ausgeschlossen, wenn man für τ den invarianten Ausdruck

$$\tau = \frac{1}{c} \int\limits_0^t \sqrt{g_{00} + 2 g_{0i}\, \dot{x}_i + g_{ik}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_k}\, dt \tag{62,02}$$

verwendet. Denn die Angaben der Uhr A erhält man, indem man das Integral (62,02) längs der Bahn der Uhr A berechnet; entsprechend bekommt man die Angaben der Uhr B durch Integration längs der Bahn der Uhr B. Beide Integrale sind invariant gegenüber einer beliebigen Substitution der Variablen (einer beliebigen Transformation der Koordinaten und der Zeit); die Benutzung verschiedener Bezugssysteme (eines Inertial- und eines Nichtinertialsystems) entspricht der Berechnung desselben Integrals in verschiedenen Variablen. Natürlich ist dann jede Diskrepanz der Ergebnisse ausgeschlossen.

Es bleibt aber noch die Frage offen, ob der Ausdruck (62,01) und dessen allgemein-kovariante Form (62,02) für eine beliebig beschleunigte Bewegung gültig ist. Schon am Ende des § 14 haben wir bemerkt, daß die physikalische Deutung des Ausdrucks (62,01) als Eigenzeit nur im Fall einer konstanten Geschwindigkeit v aus den Prinzipien der Relativitätstheorie hervorgeht. Dann gibt τ die im „eigenen" System gemessene Dauer eines lokalisierten Prozesses an, der mit einem sich bewegenden Punkt verknüpft ist (die Angaben einer bewegten Uhr). Ist dagegen die Geschwindigkeit v veränderlich, so bildet diese Deutung der Größe (62,01) eine besondere Hypothese, welche zwar den Prinzipien der Relativitätstheorie nicht widerspricht, aus denselben aber auch nicht folgt.

Am Ende des § 14 haben wir auch bemerkt, daß keine Theorie, ohne auf Einzelheiten der Uhrenkonstruktion einzugehen, voraussagen kann, wie sich diese Uhr verhalten wird, wenn sie Stöße oder eine beliebige Beschleunigung erfährt. A priori existieren keine Gründe für die Annahme: Es gibt eine Formel, die die Angaben einer Uhr bei beliebig beschleunigter Bewegung liefert.

Bei dieser Sachlage ist es naheliegend, eine der folgenden beiden Hypothesen anzunehmen. Man kann annehmen, daß es eine gegenüber Stößen ideal-unempfindliche Uhr gibt, und daß die physikalische Deutung der durch (62,01) oder (62,02) definierten Eigenzeit τ gerade darin besteht, daß diese Größe die Angaben dieser idealen Uhr liefert. Oder aber man kann auf die Aufstellung einer allgemeingültigen Formel für die Angaben einer Uhr bei beliebig beschleunigter Bewegung verzichten und eine weniger weitgehende Hypothese einführen.

Man kann nämlich annehmen, daß in den Fällen, in denen die Beschleunigung durch ein Gravitationsfeld hervorgerufen wird, die Angaben einer Uhr bei freier Bewegung in dem Gravitationsfeld durch die Formel (62,02) bestimmt werden, d. h. durch das Integral, dessen Maximalbedingung gerade die Gleichungen der freien Bewegung liefert. Für diese Hypothese spricht die Überlegung, daß das Gravitationsfeld, und nur dieses allein, die Fähigkeit besitzt, ins Innere jedes Körpers einzudringen und auf alle seine Teile proportional zu ihrer Masse einzuwirken. Dafür spricht auch der Umstand, daß im Fall einer freien Bewegung im Gravitationsfeld die vierdimensionale Beschleunigung verschwindet (diese

Größe wird in § 63 genauer definiert). Die aus dieser Hypothese folgende Bedingung für die Anwendbarkeit des Ausdrucks für die Eigenzeit lautet daher formal ebenso wie bei Abwesenheit des Gravitationsfeldes.

Wir wollen nun auf Grund der zuletzt formulierten Hypothese die Angaben einer beschleunigten Uhr angenähert berechnen. Dazu benutzen wir für ds^2 den Ausdruck in NEWTONscher Näherung und rechnen in dem Inertialsystem, in welchem die Uhr A ruht. Nach Formel (51,07) haben wir dann

$$\tau = \int_0^t \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + U\right)\right\} dt. \tag{62,03}$$

U_0 sei der konstante Wert von U an der Stelle, an der sich die Uhr A befindet. Wenn die Uhr B an der Uhr A zum ersten Mal zur Zeit $t = 0$, zum zweiten Mal (in entgegengesetzter Richtung) zur Zeit $t = T$ vorbeigeht, so beträgt die Differenz der Angaben der Uhr A während dieser Zeitspanne

$$\tau_A = \int_0^T \left(1 - \frac{U_0}{c^2}\right) dt = \left(1 - \frac{U_0}{c^2}\right) T. \tag{62,04}$$

Diese Formel berücksichtigt den Einfluß des Gravitationspotentials auf den Gang der Uhr [vgl. Formel (51,14)]. Für die Differenz der Angaben der Uhr B während derselben Zeitspanne erhalten wir den Ausdruck

$$\tau_B = \int_0^T \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + U\right)\right\} dt. \tag{62,05}$$

Die Uhr B geht also gegenüber der Uhr A um die Größe

$$\tau_A - \tau_B = \frac{1}{c^2}\int_0^T \left(\frac{1}{2} v^2 + U - U_0\right) dt \tag{62,06}$$

nach, wobei das Integral über die Bahn der Uhr B zu erstrecken ist. Nach dem Energiesatz haben wir nun

$$\frac{1}{2} v^2 - U = \frac{1}{2} v_0^2 - U_0. \tag{62,07}$$

Hier bedeutet v_0 die Geschwindigkeit der Uhr B an der Stelle, an der $U = U_0$ ist. Mit Hilfe der Beziehung (62,07) kann man die Formel (62,06) in mehreren anderen Formen schreiben, zum Beispiel

$$\tau_A - \tau_B = \frac{1}{c^2}\int_0^T \left(\frac{1}{2} v_0^2 + 2U - 2U_0\right) dt. \tag{62,08}$$

Über das Potential U machen wir die Voraussetzung, daß es im betrachteten Gebiet die Form

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 \qquad (\text{für } x < x_1), \\ U &= U_0 + g(x_1 - x) \qquad (\text{für } x > x_1) \end{aligned}\right\} \tag{62,09}$$

hat. Die Uhr A möge im Koordinatenursprung ruhen, während sich die Uhr B längs der x-Achse bewegen soll. Die Koordinaten der Uhr B lauten dann

$$x = v_0 t \qquad (\text{für } t < t_1), \tag{62,10}$$

$$x = x_1 + v_0(t - t_1) - \frac{1}{2} g(t - t_1)^2 \qquad (\text{für } t_1 < t < t_2), \tag{62,11}$$

$$x = x_1 - v_0(t - t_2) \qquad (\text{für } t > t_2). \tag{62,12}$$

Hier sind t_1 und t_2 die Zeitpunkte, zu denen die Uhr B auf dem Hin- und auf dem Rückwege den Punkt $x = x_1$ passiert. Für diese Zeitpunkte ergibt sich

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0}; \qquad t_2 = t_1 + \frac{2v_0}{g} = t_1 + t^*, \tag{62,13}$$

wobei

$$t^* = \frac{2v_0}{g} \tag{62,14}$$

die Dauer der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist. Für den Zeitpunkt, zu dem die Uhr B an den Punkt $x = 0$ zurückkehrt, erhält man nach (62,12)

$$T = t_2 + \frac{x_1}{v_0} = t_2 + t_1. \tag{62,15}$$

Zur Berechnung des Integrals benutzen wir am besten die Formel (62,08), weil darin die Größe $\frac{1}{2} v_0^2$ konstant ist, während die Differenz $2U - 2U_0$ nur im Gebiet $(t_1 < t < t_2)$, wo die Formel (62,11) gilt, von Null verschieden ist. Durch eine elementare Rechnung findet man mit Hilfe von (62,14)

$$\tau_A - \tau_B = \frac{v_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{2} T - \frac{2}{3} t^*\right). \tag{62,16}$$

Würden wir (ungerechtfertigterweise) die Formel (62,01) verwenden, so erhielten wir den Ausdruck (62,16) ohne den Term mit t^*. Dieser Term ist also die Korrektur hinsichtlich der beschleunigten Bewegung. Aus der Formel (62,16) folgt u. a.: Ist die Dauer der beschleunigten Bewegung gleich $\frac{3}{4} T$, so geht die Uhr B nicht nach; für $t^* = T$ geht sie sogar vor. Man darf übrigens nicht ver-

gessen, daß die Formel (62,16) keinen allgemeinen Charakter hat, sondern nur unter ziemlich speziellen Voraussetzungen über die Art der Bewegung abgeleitet wurde.

Wir haben die Rechnungen in dem mit der Uhr A verbundenen System ausgeführt, das ein Inertialsystem ist. Sie auch in dem mit der Uhr B verbundenen (nichtinertialen) System durchzuführen hätte keinen besonderen Sinn, weil man dann genau die gleichen Integrale, nur mit anderen Variablen, ausrechnen müßte.

Abschließend möchten wir bemerken, daß wir bei der Erklärung des Uhrenparadoxons bewußt auf die Anwendung des „Äquivalenzprinzips" verzichtet haben: Wegen des Näherungscharakters dieses Prinzips würde bei seiner Benutzung trotzdem noch ein Zweifel möglich sein, ob das Paradoxon durch eine Überlegung, die sich auf dieses Prinzip stützt, vollständig aufgelöst werden kann.

KAPITEL VI

DAS GRAVITATIONSGESETZ UND DIE GESETZE DER BEWEGUNG

§ 63 Die Gleichungen der freien Bewegung eines Massenpunktes und ihr Zusammenhang mit den Gravitationsgleichungen

Im vorigen Kapitel haben wir bereits die Annahme benutzt, daß sich ein Massenpunkt in einem gegebenen Gravitationsfeld auf einer geodätischen Linie bewegt. Diese Annahme ist jedoch keine unabhängige Hypothese, sondern kann als Folgerung aus den Gravitationsgleichungen in Verbindung mit einer Voraussetzung über die Form des Massentensors betrachtet werden. Die Gravitationsgleichungen werden dabei nur insoweit benutzt, als aus ihnen die Beziehung

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{63,01}$$

folgt, die das Verschwinden der Divergenz des Massentensors ausdrückt. Man erhält die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes aus denen für kontinuierlich verteilte Materie, indem man zum Grenzfall einer punktförmigen Masse übergeht. Für den Massentensor kann man dabei den Ausdruck

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\varrho^* u^\mu u^\nu \tag{63,02}$$

benutzen, wobei, wie auch in § 48, ϱ^* die invariante Massendichte und u^ν die Vierergeschwindigkeit bezeichnet. Diese Größen sind durch die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla_\nu(\varrho^* u^\nu) = 0 \tag{63,03}$$

verknüpft.

Wir geben jetzt zwei Ableitungen der Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt: Die eine basiert auf einem Variationsprinzip, die andere auf der unmittelbaren Anwendung der Gleichungen (63,01).

In § 47 haben wir eine Formel abgeleitet, wonach die Variation des Wirkungsintegrals

$$S = \int c^2 \varrho^* \sqrt{-g}\,(dx) \tag{63,04}$$

lautet

$$\delta \int c^2 \varrho^* \sqrt{-g}\,(dx) = -\int \varrho^* (u^\nu \nabla_\nu u_\sigma)\, \xi^\sigma \sqrt{-g}\,(dx). \tag{63,05}$$

Dabei ist ξ^σ der Vektor der infinitesimalen Verrückung. [Die Formel (63,04) unterscheidet sich von (47,46) nur dadurch, daß wir die invariante Dichte jetzt mit ϱ^* bezeichnen.] Variiert man andererseits dieses Wirkungsintegral nach den Größen $g_{\mu\nu}$, so erhält man nach (48,03)

$$\delta_g \int c^2 \varrho^* \sqrt{-g}\,(dx) = \frac{1}{2}\int \varrho^* u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(dx). \tag{63,06}$$

Diese Beziehung zeigt auf Grund der allgemeinen Formel (48,22), daß das Wirkungsintegral (63,04) tatsächlich dem Massentensor (63,02) entspricht.

In dem Wirkungsintegral (63,04) können wir den Grenzübergang durchführen, indem wir annehmen, daß die invariante Dichte ϱ^* nur in der Umgebung eines einzigen Raumpunktes von Null verschieden ist; dabei soll das Integral der Dichte, erstreckt über ein Volumen, das diesen Punkt enthält, einen endlichen Wert haben.

Die Kontinuitätsgleichung (63,03) kann man in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,\varrho^* u^\nu) = 0 \tag{63,07}$$

schreiben. Multiplizieren wir das mit $d x_1\, d x_2\, d x_3$, integrieren über ein Volumen der genannten Art und beachten, daß die Größe ϱ^* an den Grenzen verschwindet, so erhalten wir daraus

$$\frac{d}{dt}\int \varrho^* u^0 \sqrt{-g}\, d x_1\, d x_2\, d x_3 = 0 \tag{63,08}$$

(der Anschaulichkeit halber schreiben wir t statt x_0). Der Wert des Integrals

$$\int \varrho^* u^0 \sqrt{-g}\, d x_1\, d x_2\, d x_3 = mc \tag{63,09}$$

ist also zeitlich konstant. Die Größe ϱ^* ist aber nur in der Umgebung eines einzigen Punktes von Null verschieden. Deshalb können wir den Faktor u^0 vor das Integralzeichen ziehen, und zwar mit seinem Wert in diesem Punkt. Dieser Wert ist gleich

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{g_{00} + 2 g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}}, \tag{63,10}$$

wo x_i die Koordinaten des Massenpunktes und $\dot{x}_i$ deren zeitliche Ableitungen sind. Mit diesem Wert für u^0 ergibt sich

$$\int \varrho^* \sqrt{-g}\, d x_1\, d x_2\, d x_3 = m\sqrt{g_{00} + 2 g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}. \tag{63,11}$$

Das Wirkungsintegral S erhält man hieraus durch Multiplikation mit $c^2 dt$ und Integration über die Zeit, also

$$S = m c^2 \int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{g_{00} + 2 g_{0i}\dot{x}_i + g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\, dt = m c^3 \int d\tau. \tag{63,12}$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich aber nur durch einen Faktor von dem in § 38 betrachteten Integral, dessen Variation die Gleichungen der geodätischen Linie liefert. Das Variationsprinzip

$$\delta S = 0 \tag{63,13}$$

führt somit auf Bewegungsgleichungen für den freien Massenpunkt, die mit den Gleichungen für die geodätische Linie übereinstimmen.

Wir wollen diese Gleichungen nun auf einem anderen Wege ableiten, wobei wir davon ausgehen, daß der Massentensor divergenzfrei ist. Die Formel (63,01) kann man ausführlicher folgendermaßen schreiben

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-g}\, T^{0\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{-g}\, T^{i\nu}) + \sqrt{-g}\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \tag{63,14}$$

Multiplizieren wir dies mit $dx_1\, dx_2\, dx_3$ und integrieren über ein Volumen, an dessen Grenzen der Tensor $T^{\mu\nu}$ verschwindet, so finden wir

$$\frac{d}{dt}\int \sqrt{-g}\; T^{0\nu}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \int \sqrt{-g}\; \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0. \tag{63,15}$$

Hierin können wir für die Komponenten des Massentensors die Ausdrücke (63,02) einsetzen. Dann erhalten wir nach Multiplikation mit c^2

$$\frac{d}{dt}\int \varrho^* u^0 u^\nu \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \int \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\varrho^* u^\alpha u^\beta \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0. \tag{63,16}$$

Diese Integrale lassen sich nach demselben Verfahren auswerten wie das Integral (63,11). Wegen (63,09) gilt

$$\int \varrho^* u^0 u^\nu \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = m c u^\nu, \tag{63,17}$$

$$\int \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\varrho^* u^\alpha u^\beta \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{mc}{u^0}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \tag{63,18}$$

wo alle Größen auf den Punkt bezogen sind, in dem sich das Teilchen befindet. Ersetzen wir dt durch $u^0\, d\tau$ und dividieren durch den gemeinsamen Faktor mc/u^0, so ergibt sich aus (63,16)

$$\frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \tag{63,19}$$

oder

$$\frac{d^2 x_\nu}{d\tau^2} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx_\beta}{d\tau} = 0; \qquad \frac{dx_\nu}{d\tau} = u^\nu. \tag{63,20}$$

Das ist die explizite Form der Gleichungen der geodätischen Linie. Wir haben uns also nochmals überzeugt, daß die Gleichungen für die freie Bewegung eines Massenpunktes mit denen der geodätischen Linie übereinstimmen. Unsere Ableitung zeigt, daß man diese Gleichungen unmittelbar aus der Relation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ erhalten kann, indem man diese über ein Volumen integriert und anschließend zu einer punktförmigen Masse übergeht.

Dabei ist folgendes zu bemerken. Wir könnten ebensogut die Gleichung (63,14) mit einer Gewichtsfunktion λ multiplizieren bevor wir über das Volumen integrieren. Im allgemeinen würden dann die Bewegungsgleichungen von der Form der Gewichtsfunktion λ abhängen. In dem betrachteten Spezialfall aber, daß der Massentensor die Form (63,02) hat, wobei ϱ^* einer konzentrierten, punktförmigen Masse entspricht, hebt sich die Größe λ heraus, und die Bewegungsgleichungen werden eindeutig.

Nimmt man als unabhängige Variable nicht die Eigenzeit τ, sondern einfach die Zeit $t = x_0$, und multipliziert die vorstehenden Gleichungen mit $(d\tau/dt)^2$, so lauten sie

$$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} - \frac{dx_\nu}{dt}\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\beta}{dt} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\beta}{dt} = 0. \tag{63,21}$$

Die Gleichung, die dem Wert $\nu = 0$ entspricht, ist dann eine Identität.

Die Größen

$$w^\nu = \frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \tag{63,22}$$

auf der linken Seite der Bewegungsgleichungen stellen nach (46,26) den kontravarianten Vektor der Beschleunigung des Teilchens dar.

Wir wollen nun klarstellen, welche Beschleunigung hier gemeint ist. Ist kein Gravitationsfeld vorhanden, so ist die Größe w^ν die gewöhnliche Beschleunigung: In GALILEIschen Koordinaten würden die räumlichen Komponenten dieses Vektors in nichtrelativistischer Näherung in die zweiten Ableitungen der kartesischen Koordinaten des Teilchens nach der Zeit übergehen. Ist dagegen ein Gravitationsfeld vorhanden, so gilt das nicht mehr. Um die nichtrelativistischen Ausdrücke zu erhalten, in welche in diesem Fall die Größen w^ν übergehen, muß man die Näherungswerte der CHRISTOFFEL-Symbole $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ ausrechnen, die sich aus den in § 55 gefundenen Werten des Fundamentaltensors ergeben. Es ist zweckmäßig, die entsprechenden Rechnungen bis zum § 65 zu verschieben und hier nur die Resultate anzugeben. Für die Größen $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ mit dem oberen Index Null ergeben sich die Werte

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{63,23}$$

während die übrigen klein sind. Von den Größen $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ mit einem räumlichen oberen Index sind die

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{63,24}$$

am wichtigsten. Ferner brauchen wir Näherungsausdrücke für die Vierergeschwindigkeit. Bezeichnen wir die gewöhnliche Geschwindigkeit mit

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}, \tag{63,25}$$

so können wir näherungsweise setzen

$$u^i = \frac{dx_i}{d\tau} \cong v_i, \tag{63,26}$$

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} \cong 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right). \tag{63,27}$$

Gehen wir mit diesen Ausdrücken in die Formel (63,22) ein, so erhalten wir

$$w^i \cong \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{63,28}$$

$$w^0 \cong \frac{1}{c^2} v_k \left(\frac{dv_k}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) \tag{63,29}$$

(die Summation über k, die sich hier von 1 bis 3 erstreckt, wird stillschweigend vorausgesetzt).

Aus diesen Formeln geht hervor, daß die räumlichen Komponenten des Vektors w^ν die Beschleunigung des Teilchens, *vermindert um die Beschleunigung durch die Schwerkraft,* darstellen, während die Nullkomponente der in der Zeiteinheit an dem Teilchen geleisteten Arbeit aller Kräfte *außer der Schwerkraft* proportional ist.

Ist ein Gravitationsfeld vorhanden, so entspricht also die Viererbeschleunigung w^ν der um die Beschleunigung durch die Schwerkraft verminderten Beschleunigung. Deshalb ist es verständlich, daß dieser Vektor bei der freien Bewegung eines Teilchens im Felde der Schwerkraft verschwindet.

§ 64 Allgemeine Formulierung des Problems der Bewegung eines Massensystems

Die allgemeine Fragestellung für das uns interessierende Problem wurde schon in § 54 besprochen. Hier wird das astronomische Problem betrachtet, d. h. die Bewegung von Himmelskörpern im freien Raum. Wie man aus astronomischen Beobachtungen weiß, ist die Massenverteilung im Weltall durchaus nicht gleichmäßig. Der überwiegende Teil der Masse ist in Form einzelner Himmelskörper konzentriert, die sich in großen Abständen voneinander befinden. Dementsprechend werden wir annehmen, daß die Komponenten des Massentensors nur in einigen voneinander getrennten Gebieten, deren Abmessungen klein gegen ihre gegenseitigen Abstände sind, von Null verschiedene Werte haben, sonst aber im ganzen Raum verschwinden. Jedes dieser Gebiete entspricht einem Himmelskörper.

Im Inneren jedes Körpers muß der Massentensor erstens einem bestimmten physikalischen Modell (Gas, Flüssigkeit, elastischer Körper u. ä.) entsprechen, und zweitens der Bedingung

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{64,01}$$

genügen, die das Verschwinden seiner Divergenz ausdrückt. Die erste dieser Forderungen bedeutet, daß sich die Komponenten des Massentensors in ganz bestimmter Weise durch die Zustandsfunktionen des physikalischen Systems [Dichte, Geschwindigkeit, Druck und andere Größen; vgl. z. B. (55,02)], das den Körper darstellt, ausdrücken.

Außer von den physikalischen Eigenschaften des gegebenen Körpers hängt die Form des Massentensors, wie überhaupt die jedes Tensors, auch von der Metrik ab. Neben den Zustandsfunktionen im eigentlichen Sinn werden die Komponenten des Massentensors deshalb auch den Fundamentaltensor enthalten. Der Fundamentaltensor und seine Ableitungen gehen auch in den Ausdruck (64,01) für die Divergenz ein.

Um den Massentensor aufstellen zu können, muß man also die Metrik kennen. Diese wird aber durch die EINSTEINschen Gleichungen bestimmt, auf deren rechter Seite der Massentensor steht. Es ist also klar, daß die Bestimmung des Massentensors und die des Fundamentaltensors nur gleichzeitig durchgeführt werden können.

Wir wollen nun das hier behandelte Problem mit den Fragen vergleichen, die in der NEWTONschen Gravitationstheorie auftreten. Gewöhnlich handelt es sich dort um eine Problemstellung, in welcher die Massendichte als bekannt vorausgesetzt und daraus das Gravitationspotential bestimmt wird. Es gibt in der NEWTONschen Theorie aber auch andere, kompliziertere Problemstellungen, in denen das Potential gleichzeitig mit der Dichte bestimmt werden muß. Ein Beispiel dafür ist das berühmte Problem der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, mit dem sich in Rußland LIAPOUNOFF, in England JEANS und in Frankreich POINCARÉ beschäftigt haben und dessen strenge Lösung von LIAPOUNOFF in seinen nachgelassenen Werken [23], [24] angegeben wurde. Das uns interessierende Problem der EINSTEINschen Theorie erinnert seinem Charakter nach an das von LIAPOUNOFF, nur müssen jetzt statt zweier skalarer Größen (NEWTONsches Potential und Dichte) zwei Tensoren bestimmt werden, nämlich der Fundamentaltensor und der Massentensor. Außerdem handelt es sich in unserem Fall nicht um ein Gleichgewicht, sondern um eine Bewegung. Die Grundgleichung des Problems von LIAPOUNOFF tritt aber auch bei uns auf (§ 73).

Unsere Aufgabe wird vor allem dadurch erleichtert, daß sich die Metrik überall nur wenig von der euklidischen unterscheidet; eine Vorstellung von der Geringfügigkeit dieser Abweichungen vermittelt die Tabelle in § 58. Ein anderer vereinfachender Umstand besteht darin, daß die Metrik in größerem Abstand von jedem Körper nicht mehr von den Einzelheiten seiner inneren Struktur, sondern nur noch von gewissen summarischen Eigenschaften wie etwa seiner Gesamtmasse, seinen Trägheitsmomenten, der Lage und Geschwindigkeit seines Schwerpunktes u. a. abhängt. Von diesen Größen hängt auch das NEWTONsche Potential des Körpers ab.

Zur Lösung der EINSTEINschen Gleichungen benutzen wir ein Näherungsverfahren, das eine Weiterentwicklung der in § 55 benutzten Rechenmethode darstellt. Dieses Verfahren basiert auf der Entwicklung aller unbekannten Funktionen nach Potenzen der reziproken Lichtgeschwindigkeit. Einer solchen formalen Entwicklung entspricht in Wirklichkeit eine Entwicklung nach den Potenzen gewisser dimensionsloser Größen. Solche Größen sind etwa U/c^2

und v^2/c^2, wo U das NEWTONsche Potential und v^2 das Quadrat einer Geschwindigkeit (der Geschwindigkeit eines der Körper) darstellt. Für Systeme, auf die sich der Virialsatz anwenden läßt, sind diese beiden Größen (U und v^2) von der gleichen Ordnung, etwa von der Ordnung q^2, wo q ein Parameter mit der Dimension einer Geschwindigkeit ist (wir haben diesen Parameter schon in § 55 und in § 58 benutzt). Als dimensionslosen Parameter, nach dem entwickelt wird, kann man dann die Größe q^2/c^2 ansehen.

Lösen wir die Wellengleichung durch Einführen der Retardierungskorrekturen, so nehmen wir damit an, daß die Abmessungen des Systems klein gegenüber der Länge der emittierten Wellen (im vorliegenden Fall der Gravitationswellen) sind. Diese Annahme ist nicht unabhängig von den früheren. Bezeichnen wir nämlich mit ω die Kreisfrequenz des Umlaufs des Planeten und mit R den Radius seiner Bahn, so können wir die Bedingung, daß die Abmessungen des Systems klein sein sollen, in der Form $R \ll c/\omega$ schreiben, denn c/ω ist die durch 2π dividierte Länge der Gravitationswellen. Andererseits läßt sich die Bedingung, daß die Geschwindigkeit des Planeten $v = R\omega$ klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein soll, in der Form $R\omega \ll c$ schreiben; diese Ungleichung stimmt aber mit der vorhergehenden überein.

Wie schon am Ende des § 54 bemerkt, interessieren uns die „quasi-stationären" Zustände des Gravitationsfeldes, d. h. die Zustände, die sich nach vielen Umläufen des Planeten einstellen. Die Lösungen der Wellengleichung, die wir durch Einführung der Retardierungskorrekturen erhalten, genügen der Bedingung der Quasi-Stationarität.

Wir erwähnten bereits, daß bei den meisten astronomischen Problemen die Abstände zwischen den Himmelskörpern im Vergleich zu ihrer Ausdehnung sehr groß sind. Wenn man die Größenordnung der Abstände durch eine Länge R und die linearen Abmessungen der Körper durch eine Länge L kennzeichnet, so besteht die Ungleichung

$$L \ll R. \tag{64,02}$$

Mit dieser Ungleichung vereinfacht sich die Berechnung des Gravitationspotentials und des Fundamentaltensors außerhalb der Massen sehr: Wie bereits gesagt, hängen dann diese Größen nicht mehr von den Einzelheiten der inneren Struktur der Körper ab. Deshalb werden wir auch die Ungleichung (64,02) benutzen, obgleich sie weniger wesentlich als die Ungleichungen $v^2 \ll c^2$ und $U \ll c^2$ ist, auf denen unsere Methode zur Lösung der EINSTEINschen Gleichungen beruht.

Wir bemerken noch, daß an der Oberfläche und im Inneren eines Körpers, wo das Gravitationspotential am größten ist, größenordnungsmäßig gilt

$$U/c^2 = \alpha/L. \tag{64,03}$$

Dabei ist α der Gravitationsradius des Körpers (vgl. die Tabelle in § 58). Deshalb kann man die beiden benutzten Ungleichungen in der Form

$$\alpha \ll L \ll R \tag{64,04}$$

schreiben.

Unsere Aufgabe besteht nun in der Bestimmung des Fundamentaltensors und des Massentensors. Sind uns die Komponenten des Massentensors als Funktionen der Koordinaten und der Zeit bekannt, so kennen wir damit auch die Bewegung der Massen; denn die Massen erfüllen die Gebiete, in denen der Massentensor von Null verschieden ist. Wesentlich ist, daß man die Bewegung dieser Gebiete nicht willkürlich vorgeben kann: Das Bewegungsgesetz folgt aus den Gravitationsgleichungen.

Die Lösung unseres Problems liefert uns zunächst Näherungsausdrücke für den Massentensor und den Fundamentaltensor, die einige unbekannte Funktionen enthalten. Dann erhalten wir aber für diese unbekannten Funktionen Gleichungen, welche deren Bestimmung aus den Anfangsbedingungen erlauben (Bewegungsgleichungen).

Die Wahl der erwähnten unbekannten Funktionen wird durch den Gang der Lösung des Problems nahegelegt. Naturgemäß gehen in die Lösung diejenigen Größen ein, die schon in der NEWTONschen Mechanik verwendet werden. Das sind zum Beispiel die Schwerpunktkoordinaten jedes Körpers, ferner Gesamtmasse, Drehimpuls, Trägheitsmomente und andere integrale Bestimmungsstücke der Körper.

Für alle diese Größen erhält man Bewegungsgleichungen, die in erster Näherung mit den NEWTONschen übereinstimmen, sich aber in der darauffolgenden Näherung von den NEWTONschen durch kleine Korrekturen unterscheiden. Uns interessieren sowohl diese Korrekturen als auch die Ausdrücke für den Fundamentaltensor und die anderen Größen der EINSTEINschen Theorie in ihrer Darstellung durch NEWTONsche Größen.

§ 65 Die Divergenz des Massentensors in zweiter Näherung

Die gemeinsame Bestimmung des Massentensors und des Fundamentaltensors werden wir schrittweise durchführen und dabei von den Überlegungen in § 55 ausgehen. Zunächst wollen wir den Gang dieser Überlegungen ins Gedächtnis zurückrufen. In der Ausgangsnäherung wurde die Metrik als euklidisch angesehen, was einer vollständigen Vernachlässigung der Gravitationskräfte entspricht. In dieser Näherung konnte man nur die Komponenten T^{00} und T^{0i} des Massentensors vorgeben. Nach Formel (55,03) lauten diese Komponenten in GALILEIschen Koordinaten

$$T^{00} = \frac{1}{c^2}\,\varrho\,; \quad T^{0i} = \frac{1}{c^2}\,\varrho\, v_i\,. \tag{65,01}$$

Dabei ist ϱ die Dichte und v_i die Geschwindigkeit des Mediums in dem betrachteten Punkt, und es gilt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\varrho\, v_i)}{\partial x_i} = 0\,. \tag{65,02}$$

Die genauen Werte der räumlichen Komponenten (T^{ik}) waren in dieser Näherung belanglos; es genügte die Voraussetzung, daß sie von derselben Größenordnung sind wie beim Fehlen von Gravitationskräften.

Diese Annahmen über den Massentensor genügten zur Bestimmung der Metrik in erster Näherung. Nach den Formeln (55,31) haben wir

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= c^2 - 2U, \\ g_{0i} &= \frac{4}{c^2} U_i, \\ g_{ik} &= -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{65,03}$$

wo U das NEWTONsche Gravitationspotential ist, das der Gleichung

$$\Delta U = -4\pi\gamma\varrho \tag{65,04}$$

genügt; U_i ist das Vektorpotential der Gravitation und genügt der Gleichung

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\varrho v_i. \tag{65,05}$$

Wir erinnern daran, daß die Potentiale U und U_i mit der Massendichte ϱ und dem Massenstrom ϱv_i auf nichtlokale Weise zusammenhängen: Die Werte der Potentiale im Inneren eines Körpers hängen von der Dichteverteilung im ganzen Raum und nicht nur von der im Inneren dieses Körpers ab.

In § 55 wurden auch Formeln für die kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors angegeben, nämlich

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right), \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^4} U_i, \\ g^{ik} &= -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{65,06}$$

Dabei ist nach (55,37)

$$\sqrt{-g} = c + \frac{2U}{c}. \tag{65,07}$$

Kennt man die Metrik in der Näherung, die durch die obigen Formeln gekennzeichnet ist, so kann man in der Bestimmung des Massentensors einen Schritt weitergehen. Zu diesem Zweck muß man vor allem den Ausdruck für seine Divergenz genauer hinschreiben, was die Aufgabe dieses Paragraphen sein soll.

Nach Formel (41,24) lautet der allgemeine Ausdruck für die Divergenz eines symmetrischen Tensors

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + y_\nu T^{\mu\nu}, \tag{65,08}$$

wo zur Abkürzung

$$y_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\lg\sqrt{-g}) = \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha} \tag{65,09}$$

gesetzt ist. Die Formeln (55,02) geben in jedem Fall die Größenordnungen der Komponenten des Massentensors richtig wieder. Danach gilt

$$T^{00} = O\left(\frac{\varrho}{c^2}\right); \quad T^{0i} = O\left(\frac{\varrho}{c^2} q\right); \quad T^{ik} = O\left(\frac{\varrho}{c^2} q^2\right), \tag{65,10}$$

wo q der schon mehrmals benutzte Parameter ist, der die Größenordnung der Geschwindigkeit kennzeichnet.

Wir betrachten nun die Nullkomponente der Divergenz des Massentensors. Sie ergibt sich aus dem Ausdruck (65,08) für $\mu = 0$. In der Ausgangsnäherung haben wir darin alle Terme außer den Ableitungen vernachlässigt. Für den nächsten Schritt müssen wir die Größen $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ und y_ν mit einer Genauigkeit bis zu Termen der Ordnung $1/c^2$ einschließlich kennen. Was die räumlichen Komponenten der Divergenz betrifft, so haben wir diese in der Ausgangsnäherung vollständig vernachlässigt. Um sie dann in erster Näherung berücksichtigen zu können, müssen wir in $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ den Hauptterm, der den Faktor $1/c^2$ nicht enthält, ermitteln. Zur Bestimmung von y_ν, $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ und $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ mit der genannten Genauigkeit genügt die Näherung der Formeln (65,03)—(65,07).

Aus den Formeln (65,07) und (65,09) erhalten wir ohne Mühe

$$y_0 = \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad y_i = \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{65,11}$$

Nun berechnen wir die CHRISTOFFEL-Symbole nach den bekannten Formeln

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta} \tag{65,12}$$

mit

$$\Gamma_{\nu,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\right). \tag{65,13}$$

Man überzeugt sich leicht, daß man in der betrachteten Näherung in der letzten Formel alle Terme mit dem Faktor $1/c^2$ vernachlässigen kann; dann bleibt übrig

$$\Gamma_{0.00} = -\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma_{0,0i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{65,14}$$

und

$$\Gamma_{i.00} = \frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{65,15}$$

Für die Größen $\Gamma^0_{\alpha\beta}$ erhalten wir daraus:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \quad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{65,16}$$

während die Größen Γ^0_{ik} klein von höherer Ordnung sind, nämlich

$$\Gamma^0_{ik} = O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{65,17}$$

Von den CHRISTOFFEL-Symbolen mit räumlichen oberen Indizes sind die

$$\Gamma_{00}^{i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{65,18}$$

am größten; die übrigen sind klein, und zwar von der Ordnung

$$\Gamma_{0k}^{i} = O\left(\frac{1}{c^2}\right); \quad \Gamma_{kl}^{i} = O\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{65,19}$$

Mit Hilfe der für die CHRISTOFFEL-Symbole gefundenen Werte können wir den Ausdruck für die Divergenz des Massentensors hinschreiben.

Die Formel (65,08) lautet für $\mu = 0$, ausführlich geschrieben,

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{0\nu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} + (\Gamma_{00}^{0} + y_0)\, T^{00} + \\ + (2\Gamma_{0i}^{0} + y_i)\, T^{i0} + \Gamma_{ik}^{0}\, T^{ik}. \end{aligned} \tag{65,20}$$

Der Koeffizient der Größe T^{00} hat nach (65,11) und (65,16) den Wert

$$\Gamma_{00}^{0} + y_0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{65,21}$$

Die Koeffizienten der Größen T^{0i} sind dagegen verschwindend klein, nämlich

$$2\,\Gamma_{0i}^{0} + y_i = O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{65,22}$$

Von der gleichen Ordnung ist nach (65,17) auch der Koeffizient von T^{ik}. In unserer Näherung nimmt also die Formel (65,20) folgende Form an

$$\nabla_\nu T^{0\nu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\, T^{00}. \tag{65,23}$$

Für die räumlichen Komponenten der Divergenz ergibt sich aus (65,08) für $\mu = i$

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{i\nu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + \Gamma_{00}^{i}\, T^{00} + \\ + 2\Gamma_{0k}^{i}\, T^{0k} + y_0\, T^{0i} + \Gamma_{kl}^{i}\, T^{kl} + y_k\, T^{ik}. \end{aligned} \tag{65,24}$$

Wie aus den oben durchgeführten Abschätzungen hervorgeht, enthalten darin alle Koeffizienten der zweiten Zeile den Faktor $1/c^2$, so daß man die Terme in der zweiten Zeile weglassen kann. Ersetzen wir Γ_{00}^{i} durch den Ausdruck (65,18), so erhalten wir

$$\nabla_\nu T^{i\nu} = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\, T^{00}. \tag{65,25}$$

Berücksichtigt man also die Abweichung der Metrik von der euklidischen Metrik oder, was dasselbe ist, berücksichtigt man die Gravitationskräfte (beides

in erster Näherung), so lautet die Bedingung für das Verschwinden der Divergenz des Massentensors

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} T^{00} = 0, \tag{65,26}$$

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i} T^{00} = 0. \tag{65,27}$$

§ 66 Die angenäherte Form des Massentensors für einen elastischen Körper bei Berücksichtigung des Gravitationsfeldes

Näherungsausdrücke für den Massentensor eines elastischen Körpers ohne Berücksichtigung der Gravitationskräfte haben wir in § 32 mit Hilfe des Skalars und des Vektors von UMOW (Energiedichte und Energiestrom) aufgestellt. In den hier benutzten Bezeichnungen ($x_0 = t$) sind diese Ausdrücke in § 55 aufgeschrieben. Nach Formel (55,02) haben sie die Form

$$\left.\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \varrho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi\right)\right\}, \\ c^2 T^{0i} &= \varrho v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi\right)\right\} - \frac{1}{c^2} p_{ik} v_k, \\ c^2 T^{ik} &= \varrho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{66,01}$$

Es sei daran erinnert, daß hier p_{ik} der dreidimensionale Tensor der elastischen Spannungen und Π die elastische Energie der Masseneinheit des Körpers ist. Diese Größen genügen nach (30,08) der Beziehung

$$\varrho \frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{2} p_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{66,02}$$

Diese Ausdrücke für den Massentensor müssen wir jetzt auf den Fall verallgemeinern, daß auch ein Gravitationsfeld vorhanden ist. Nach der NEWTONschen Theorie ist das negative NEWTONsche Potential zugleich auch die potentielle Energie eines sich in dem gegebenen Gravitationsfeld befindenden Teilchens von der Masse Eins. Deshalb ist zu erwarten, daß sich die richtigen Ausdrücke für die Dichte und den Strom der Energie ergeben, wenn man in den Formeln (30,17) und (30,18) für den Skalar und den Vektor von UMOW die Terme $(-\varrho U)$ und $(-\varrho v_i U)$ hinzugefügt. Dann erhält man

$$S = \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho(\Pi - U), \tag{66,03}$$

$$S_i = v_i\left\{\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho(\Pi - U)\right\} - p_{ik} v_k. \tag{66,04}$$

Die Komponenten T^{00} und T^{0i} des Massentensors ergeben sich nach den Formeln

$$c^2 T^{00} = \varrho + \frac{1}{c^2} S, \tag{66,05}$$

$$c^2 T^{0i} = \varrho v_i + \frac{1}{c^2} S_i. \tag{66,06}$$

Endgültig erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \varrho \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U\right)\right\}, \\ c^2 T^{0i} &= \varrho v_i \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U\right)\right\} - \frac{1}{c^2} p_{ik} v_k, \\ c^2 T^{ik} &= \varrho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{66,07}$$

Sind unsere Überlegungen richtig, so müssen diese Ausdrücke in der geforderten Näherung den am Schluß des vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} T^{00} = 0, \\ \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i} T^{00} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{66,08}$$

genügen. Diese Gleichungen müssen auf Grund der Bewegungsgleichungen für diejenigen Größen, die in den Massentensor eingehen, erfüllt sein. Wir haben erstens die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho v_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{66,09}$$

und zweitens die Gleichung für die Bewegung eines elastischen Körpers im Gravitationsfeld $\frac{\partial U}{\partial x_i}$:

$$\varrho \frac{d v_i}{dt} - \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \tag{66,10}$$

Außerdem besteht die Beziehung (66,02) zwischen dem Spannungstensor und der elastischen potentiellen Energie. Benutzen wir (66,09), (66,10) und (66,02), so erhalten wir für den Skalar und den Vektor von UMOW die Beziehung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S_i}{\partial x_i} = -\varrho \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{66,11}$$

Daraus folgt, unter Beachtung von (66,09),

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{c^4}\varrho\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{66,12}$$

Da angenähert $\varrho = c^2 T^{00}$ ist, stimmt die Gleichung (66,12) in der entsprechenden Näherung mit der ersten der Gleichungen (66,08) überein. Was die übrigen Gleichungen (66,08) betrifft, so stimmen sie, multipliziert mit c^2, näherungsweise mit den Bewegungsgleichungen (66,10) überein, wenn man diese in der Form

$$\frac{\partial(\varrho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v_i v_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} - \varrho\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \tag{66,13}$$

schreibt (in den Ausdrücken für T^{i0} und T^{00} braucht man hierbei nur die Hauptterme zu benutzen).

Die Gleichungen (66,08), die das Verschwinden der Divergenz des Massentensors bei Berücksichtigung der Abweichung von der Euklidizität ausdrücken, lassen sich also tatsächlich angenähert erfüllen, wenn man als Massentensor die Größen (66,07) verwendet.

In den Formeln (66,07) genügt die Dichte ϱ der Kontinuitätsgleichung (66,09). Die entsprechende allgemein-kovariante Gleichung hat die Form

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\sqrt{-g}\,\varrho^* u^\alpha) = 0, \tag{66,14}$$

wobei ϱ^* die invariante Dichte und u^α die Vierergeschwindigkeit ist. Damit die beiden Ausdrücke (66,09) und (66,14) übereinstimmen, müssen wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\varrho^* u^0, \\ \varrho v_i &= \frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\varrho^* u^i \end{aligned}\right\} \tag{66,15}$$

(der Faktor $1/c$ wurde hinzugefügt, damit ϱ^* angenähert gleich ϱ ist). Beachten wir, daß nach (65,07) und (63,27) gilt

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g} = 1 + \frac{2U}{c^2}; \quad u^0 = 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right), \tag{66,16}$$

so erhalten wir näherungsweise

$$\varrho^* = \varrho\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3U\right)\right\}. \tag{66,17}$$

Die Formeln (66,07) gestatten, den Ausdruck für die Invariante des Massentensors zu bilden. Führen wir den Druck p gemäß

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) \tag{66,18}$$

ein, so erhalten wir

$$T = \varrho \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{1}{2} v^2 + \Pi - 3U \right) \right\} - \frac{3}{c^2} p \tag{66,19}$$

oder, unter Benutzung der Formel (66,17) für ϱ^*,

$$T = \varrho^* \left(1 + \frac{\Pi}{c^2} \right) - \frac{3}{c^2} p. \tag{66,20}$$

Der letzte Ausdruck stimmt mit (32,30) überein.

§ 67 Näherungsausdrücke für die CHRISTOFFEL-Symbole und für einige andere Größen

Zur Bestimmung der folgenden Näherung des Fundamentaltensors müssen wir die Rechnungen aus § 55 weiterführen. Da wir alle unsere Rechnungen in harmonischen Koordinaten durchführen, ist es zweckmäßig, als unbekannte Funktionen die mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors, d. h. die Größen

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \tag{67,01}$$

anzusehen. Der Vorteil der Benutzung dieser Größen liegt darin, daß dann die Bedingung der Harmonizität (55,39) die einfache Form

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{67,02}$$

annimmt, also in den unbekannten Funktionen *linear* ist. Weiter besitzt diese Wahl der unbekannten Funktionen den Vorzug, daß die räumlichen Komponenten $\mathfrak{g}^{ik}$ nur sehr wenig von konstanten Werten abweichen. Schließlich ist es noch sehr günstig, daß auf der linken Seite jeder der Gravitationsgleichungen der D'ALEMBERT-Operator gerade auf die entsprechende Komponente $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ wirkt; jede Komponente $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ hängt also im wesentlichen nur mit einer einzigen (und zwar der gleichindizierten) Komponente des Massentensors zusammen.

In § 55 fanden wir für die Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ folgende Näherungsausdrücke [Formel (55,38)]

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4}{c^3} U_i, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{67,03}$$

Dabei ist U das NEWTONsche Potential und U_i das Vektorpotential der Gravitation. Wir wollen jetzt die Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ genauer bestimmen, indem wir noch wei-

tere Glieder der Entwicklung nach Potenzen der reziproken Lichtgeschwindigkeit berücksichtigen. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3} + \frac{4S}{c^5}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5}, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{4S_{ik}}{c^3}. \end{aligned}\right\} \tag{67,04}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke können wir die CHRISTOFFEL-Symbole und andere Größen, die in den Gravitationsgleichungen auftreten, berechnen.

Wir beginnen mit der Berechnung der Determinante g. Wie man leicht nachprüft [vgl. Formel (B,67)], ist diese Determinante gleich der Determinante der $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. Die Formeln (67,04) ergeben

$$g = -c^2\left(1 + \frac{4U}{c^2} + \frac{4S - 4S_{kk}}{c^4}\right). \tag{67,05}$$

Dabei haben wir gemäß unserer Verabredung über die Summation die Bezeichnung

$$S_{kk} = \sum_{k=1}^{3} S_{kk} = S_{11} + S_{22} + S_{33} \tag{67,06}$$

benutzt. Ziehen wir die Quadratwurzel, so erhalten wir

$$\sqrt{-g} = c\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2S - 2S_{kk} - 2U^2}{c^4}\right). \tag{67,07}$$

Für die mit einem geeigneten Faktor multiplizierte vierte Wurzel führen wir eine besondere Bezeichnung ein:

$$\sqrt[4]{-\frac{g}{c^2}} = f. \tag{67,08}$$

Aus (67,07) ergibt sich für diese Größe

$$f = 1 + \frac{U}{c^2} + \frac{1}{c^4}\left(S - S_{kk} - \frac{3}{2}U^2\right). \tag{67,09}$$

Die Größe f genügt näherungsweise einer linearen Differentialgleichung, die im nächsten Paragraphen abgeleitet wird.

Aus (67,04) und (67,07) erhalten wir für $c^2 g^{00}$ den Ausdruck

$$c^2 g^{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{2S + 2S_{kk} - 2U^2}{c^4}. \tag{67,10}$$

Setzen wir

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}(S + S_{kk} - 2U^2), \tag{67,11}$$

so können wir mit der gleichen Genauigkeit schreiben

$$c^2 g^{00} = \frac{c^2 + U^*}{c^2 - U^*} \tag{67,12}$$

und ferner

$$\frac{1}{c^2} g_{00} = \frac{c^2 - U^*}{c^2 + U^*}. \tag{67,13}$$

Die Größe U^* wird uns auch im folgenden noch begegnen.

Wir gehen nun zur Berechnung der im Anhang B eingeführten Größen

$$\Pi^{\mu,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\varrho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\varrho} + \mathfrak{g}^{\beta\varrho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\varrho} - \mathfrak{g}^{\mu\varrho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho}\right) \tag{67,14}$$

über, die mit den CHRISTOFFEL-Symbolen zusammenhängen. Mit den Ausdrücken (67,04) und (67,05) erhalten wir folgende Tabelle

$$\left.\begin{aligned} \Pi^{0,\,00} &= -\frac{2}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}, \\ \Pi^{0,\,0l} &= \frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_l}, \\ \Pi^{0,\,kl} &= \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right); \end{aligned}\right\} \tag{67,15}$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi^{i,\,00} &= -\frac{2}{c^4}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 4U\frac{\partial U}{\partial x_i} + 2\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\right\}, \\ \Pi^{i,\,k0} &= \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \\ \Pi^{i,\,kl} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{67,16}$$

Senken wir den zweiten und den dritten oberen Index, so erhalten wir die Größen $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$. Es wird

$$\left.\begin{aligned} \Pi^0_{00} &= -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \\ \Pi^0_{0l} &= -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_l}, \\ \Pi^0_{kl} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right); \end{aligned}\right\} \tag{67,17}$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi^i_{00} &= -2\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 8U\frac{\partial U}{\partial x_i} + 2\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\right\}, \\ \Pi^i_{k0} &= -\frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \\ \Pi^i_{kl} &= O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{67,18}$$

Für die Berechnung von Π^i_{00} war der Wert $g_{00} = c^2 - 2U$ erforderlich, für die der übrigen Größen genügten die GALILEIschen Werte des Fundamentaltensors. In den Formeln für $\Pi^\mu_{\alpha\beta}$ haben wir uns auf Terme bis zur Ordnung $1/c^2$ beschränkt.

Zur Bestimmung der CHRISTOFFEL-Symbole brauchen wir außer den Größen $\Pi^\mu_{\alpha\beta}$ noch die Größen $\Lambda^\mu_{\alpha\beta}$, die durch die Formel

$$\Lambda^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(y_\alpha\delta^\mu_\beta + y_\beta\delta^\mu_\alpha - y^\mu g_{\alpha\beta}\right) \tag{67,19}$$

definiert sind mit

$$y_\alpha = \frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}, \quad y^\mu = g^{\mu\alpha} y_\alpha \tag{67,20}$$

[vgl. Anhang B]. Wir wollen auch die angenäherten Werte der Größen y_α aufschreiben. Durch Differentiation von (67,07) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 4U\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right\}, \\ y_0 &= \frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - 4U\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial t}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{67,21}$$

Für die Größen y^μ mit oberem Index finden wir, wenn wir uns auf Terme bis zur Ordnung $1/c^4$ beschränken, folgende Werte

$$\left.\begin{aligned} y^i &= -\frac{2}{c^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - 6U\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right\}, \\ y^0 &= \frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{67,22}$$

Die CHRISTOFFEL-Symbole lassen sich durch die berechneten Größen nach der Formel

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Pi^\mu_{\alpha\beta} + \Lambda^\mu_{\alpha\beta} \tag{67,23}$$

ausdrücken. Beschränken wir uns auf Terme, deren Ordnung nicht höher als $1/c^2$ ist, so erhalten wir für $\mu = 0$, genau wie in der Näherung (65,16),

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}; \quad \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \Gamma^0_{ik} = O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{67,24}$$

während sich für $\mu = i$ die [gegenüber (65,18) und (65,19)] genaueren Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i} - 8U\frac{\partial U}{\partial x_i} + 4\frac{\partial U_i}{\partial t}\right),\\ \Gamma^i_{0k} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\delta_{ik} - \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right),\\ \Gamma^i_{kl} &= \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_l}\delta_{ik} + \frac{\partial U}{\partial x_k}\delta_{il} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta_{kl}\right) \end{aligned}\right\} \tag{67,25}$$

ergeben.

In den Näherungsrechnungen verwendet man zweckmäßigerweise Ausdrücke, die so umgeformt sind, daß sie die Größen $\Pi^\mu_{\alpha\beta}$, nicht aber die Größen $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ enthalten. Der Vorteil der ersteren Größen ergibt sich aus einem Vergleich der Formeln (67,18) mit den Formeln (67,25). Der Vergleich zeigt nämlich, daß man die Größen Π^i_{kl} vernachlässigen kann, während die Größen Γ^i_{kl} berücksichtigt werden müßten.

Im Anhang B wird für den EINSTEINschen Tensor ein Ausdruck abgeleitet, der die erwähnte Form besitzt, nämlich die Formel (B, 87). Darin tritt die LAGRANGE-Funktion auf, die nach (B, 95) lautet

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\Pi^\nu_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}y_\nu y^\nu. \tag{67,26}$$

Wir wollen nun einen Näherungswert für diesen Ausdruck ermitteln. Aus den Formeln (67,21) und (67,22) ergibt sich

$$\sqrt{-g}\, y_\alpha y^\alpha = \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \frac{4}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial (S - S_{kk})}{\partial x_i}\right)^2. \tag{67,27}$$

Andererseits liefern die Formeln (67,17) und (67,18) in Verbindung mit den Ausgangsformeln (67,04) für $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Pi^\varrho_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} &= \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{16}{c^5}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t} + \\ &\quad + \frac{4}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2. \end{aligned} \tag{67,28}$$

Addieren wir zu dieser Gleichung die durch 2 dividierte vorhergehende Gleichung, so erhalten wir für die mit $\sqrt{-g}$ multiplizierte LAGRANGE-Funktion den Ausdruck

$$\begin{aligned} L\sqrt{-g} &= \frac{2}{c^3}\left(1 - \frac{8U}{c^2}\right)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{6}{c^5}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \\ &\quad + \frac{16}{c^5}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t} - \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2. \end{aligned} \tag{67,29}$$

Führen wir die Größe U^* nach (67,11) ein, so können wir diesen Ausdruck in der Form

$$L\sqrt{-g} = \frac{2}{c^3}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{6}{c^5}\left(\frac{\partial U^*}{\partial t}\right)^2 + \frac{16}{c^5}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t} - \frac{4}{c^5}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2 \tag{67,30}$$

schreiben; dabei haben wir in den Korrekturtermen U durch U^* ersetzt. Die letzte Formel ist dadurch bemerkenswert, daß die rechte Seite eine homogene quadratische Funktion in den ersten Ableitungen der *vier* Größen U^* und U_i mit *konstanten* Koeffizienten darstellt.

Aus dem Vergleich der beiden Formeln (67,27) und (67,29) ersieht man, daß die Summe

$$\sqrt{-g}\left(L + \frac{1}{2}\, y_\alpha\, y^\alpha\right) = \frac{8}{c^5}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial S_{kk}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + 2\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right\} \tag{67,31}$$

von höherer Ordnung klein ist als die Größen (67,27) und (67,29) einzeln. Diese Bemerkung läßt uns einen sehr einfachen angenäherten Ausdruck für die Krümmungsinvariante R finden. Nach Formel (B, 49) haben wir in harmonischen Koordinaten

$$R = g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - L. \tag{67,32}$$

Mit der Bezeichnung (67,08) können wir schreiben

$$\sqrt{-g} = c\, f^2 \tag{67,33}$$

und erhalten damit

$$R = \frac{2}{f}\, g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \frac{2}{f^2}\, g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\beta} - L. \tag{67,34}$$

Nun ist aber

$$y_\alpha = \frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}. \tag{67,35}$$

Deshalb wird

$$R = \frac{2}{c f^3}\,\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \left(\frac{1}{2}\, y_\alpha\, y^\alpha + L\right). \tag{67,36}$$

Jetzt gehen wir zu Näherungsformeln über. Nach (67,31) ist die Größe $\left(\frac{1}{2}\, y_\alpha\, y^\alpha + L\right)$ von sechster Ordnung in $1/c$. Vernachlässigen wir Größen sechster Ordnung, so können wir die Größen $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ durch ihre GALILEIschen Werte ersetzen. Dann erhalten wir für die Invariante der Krümmung R den sehr einfachen Näherungsausdruck

$$R = \frac{2}{f^3}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f\right), \tag{67,37}$$

wo Δ der LAPLACE-Operator mit euklidischen Koeffizienten ist.

§ 68 Die angenäherte Form der Gravitationsgleichungen

Mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Paragraphen können wir die linke Seite der EINSTEINschen Gravitationsgleichungen

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = - \frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu} \tag{68,01}$$

in einer Näherung angeben, die der betrachteten Genauigkeit entspricht. Zunächst wollen wir aber die linke Seite ohne Vernachlässigungen hinschreiben. Nach Formel (B, 87) gilt

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{1}{2g} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Pi^{\mu,\alpha\beta} \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu +$$
$$+ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} L + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} B - B^{\mu\nu}. \tag{68,02}$$

Hier ist L die LAGRANGE-Funktion

$$L = - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} y_\nu y^\nu, \tag{68,03}$$

die schon im vorigen Paragraphen auftrat. Die Größen $B^{\mu\nu}$ sind nach (B, 85) folgendermaßen definiert

$$B^{\mu\nu} = \Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (y^\mu \Gamma^\nu + y^\nu \Gamma^\mu) = \frac{1}{2} (\nabla^\mu + y^\mu) \Gamma^\nu + \frac{1}{2} (\nabla^\nu + y^\nu) \Gamma^\mu, \tag{68,04}$$

wo Γ^ν die in § 41 und § 53 eingeführten Größen

$$\Gamma^\nu = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \tag{68,05}$$

sind. Die Größe B ist die aus den $B^{\mu\nu}$ gebildete „Quasi-Invariante"

$$B = g_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = (\nabla_\nu + y_\nu) \Gamma^\nu \tag{68,06}$$

(es ist keine echte Invariante, weil $B^{\mu\nu}$ kein Tensor ist).

In einem harmonischen Koordinatensystem verschwinden die Größen Γ^ν und folglich auch die $\Gamma^{\mu\nu}$ sowie die $B^{\mu\nu}$ und B.

Solange auf der linken Seite der EINSTEINschen Gleichungen (68,01) der vollständige Ausdruck (68,02) für den konservativen Tensor steht, folgt die Gleichung

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{68,07}$$

aus den Gravitationsgleichungen allein. Lassen wir jedoch im konservativen Tensor von vornherein die Terme $B^{\mu\nu}$ und B weg, so wird die Gleichung (68,07) nur dann befriedigt, wenn die Bedingung $\Gamma^\nu = 0$ erfüllt ist.

Wir gehen nun zur angenäherten Form der EINSTEINschen Gleichungen über und betrachten zunächst die Terme mit zweiten Ableitungen. Unter Benutzung der Ausdrücke (67,04) erhalten wir

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = -\,c\,\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{4}{c^3}\left(S_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} + 2\,U_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial t} + U\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right). \tag{68,08}$$

Hier sind die Hauptterme in dem mit c multiplizierten euklidischen D'ALEMBERT-Operator zusammengefaßt, während die Terme mit variablen Koeffizienten Korrekturen darstellen, die man in der betrachteten Näherung vernachlässigen kann. Wir untersuchen die Größenordnung dieser Korrekturen etwas genauer. In den Ausdruck (68,02) für den EINSTEINschen Tensor geht die Größe (68,08), dividiert durch $2g$, ein, wobei φ die entsprechende Komponente $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ ist. Die Ableitungen von φ sind von dritter Ordnung in $1/c$; da nun angenähert $g = -\,c^2$ ist, so sind die durch $2\,g$ dividierten Korrekturterme in (68,08) von achter Ordnung in $1/c$. Vernachlässigen wir Größen dieser Ordnung, so brauchen wir auch alle anderen in (68,02) auftretenden Größen nur mit der entsprechenden Genauigkeit zu bestimmen.

Um die Größe g im Nenner wegzuschaffen, berechnen wir nicht den EINSTEINschen Tensor selbst, sondern den mit dem Faktor $(-\,g/c^2)$, der nahezu gleich Eins ist, multiplizierten Tensor. Die Terme mit zweiten Ableitungen lauten dann mit der erforderlichen Genauigkeit

$$-\frac{1}{2c^2}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = \frac{1}{2c}\Delta\,\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2}. \tag{68,09}$$

Um die Terme mit ersten Ableitungen zu erhalten, bestimmen wir zunächst mit Hilfe der Formeln (67,15) — (67,18) die Größen

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{0,\alpha\beta}\Pi^{0}_{\alpha\beta} = -\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial x_s}\right)^2, \tag{68,10}$$

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{0,\alpha\beta}\Pi^{i}_{\alpha\beta} = \frac{4}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_s}, \tag{68,11}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{g}{c^2}\right)\Pi^{i,\alpha\beta}\Pi^{k}_{\alpha\beta} &= \\ &= \frac{4}{c^4}\left(1 - \frac{8\,U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial t}\right) - \\ &\quad - \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_k}\right).\end{aligned} \tag{68,12}$$

In den Formeln (68,10) und (68,11) hätten wir den Faktor $(-\,g/c^2)$ nicht hinzuschreiben brauchen, da man ihn in der betrachteten Näherung gleich Eins setzen kann.

Ferner benutzen wir die Ausdrücke (67,22) für y^α und führen die Bezeichnung

$$N^{\mu\nu} = \left(-\frac{g}{c^2}\right)\left\{\Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}y^\mu y^\nu + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}L\right\} \tag{68,13}$$

ein. Dann erhalten wir für diese Größen

$$N^{00} = -\frac{7}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial x_s}\right)^2, \tag{68,14}$$

$$N^{0i} = \frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_s}, \tag{68,15}$$

$$\begin{aligned} N^{ik} &= \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_k} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_k}{\partial t}\right) - \\ &\quad - \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\sqrt{-g}}{c}L, \end{aligned} \tag{68,16}$$

wo

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g}\,L = \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_s}\right)^2 + \frac{6}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{16}{c^6}\frac{\partial U}{\partial x_s}\frac{\partial U_s}{\partial t} - \frac{4}{c^6}\left(\frac{\partial U_s}{\partial x_r} - \frac{\partial U_r}{\partial x_s}\right)^2 \tag{68,17}$$

ist und U^* den Wert (67,11) hat. In den Gliedern sechster Ordnung können wir hier die Größe U durch U^* ersetzen, wie wir es in (67,30) getan haben. Dann enthalten alle Größen $N^{\mu\nu}$ erste Ableitungen nur noch von den vier Größen U^* und U_s, und zwar sind alle $N^{\mu\nu}$ homogene quadratische Funktionen dieser ersten Ableitungem mit *konstanten* Koeffizienten. Das ist eine sehr wesentliche Vereinfachung der exakten Formeln (68,13).

Mit Hilfe der gefundenen Ausdrücke können wir nun die angenäherten EINSTEINschen Gleichungen sofort hinschreiben. Wir erhalten

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = \frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2} + N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{\mu\nu}, \tag{68,18}$$

wo die Größen $N^{\mu\nu}$ die Werte (68,14) — (68,16) haben.

Um die Formel (68,18) zur Bestimmung der Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ benutzen zu können, müssen wir vor allem die Werte der in $N^{\mu\nu}$ auftretenden Größen U^*, U_i mit der erforderlichen Genauigkeit kennen.

Was die Größen U_i anbetrifft, so kommen diese in den Ausdrücken (68,14) bis (68,16) nur in Termen sechster Ordnung vor; deshalb genügt es, sie mit der Genauigkeit zu kennen, mit der sie in § 55 bestimmt worden sind. Die entsprechenden Formeln haben wir auch in § 65 angegeben. [Diese Formeln ergeben sich auch aus der Gleichung (68,18) für $\mu = 0$, $\nu = i$, wenn man darin die Größe N^{0i} und die zweite zeitliche Ableitung vernachlässigt, g durch $-c^2$ ersetzt, in T^{0i} den Hauptterm verwendet und $\mathfrak{g}^{0i}$ durch U_i ausdrückt.] Nach (65,05) gilt

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\varrho v_i. \tag{68,19}$$

Die Größe U^* dagegen geht auch in Terme vierter Ordnung ein; wir müssen sie deshalb mit höherer Genauigkeit kennen. Nach der Definition (67,11) ist

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}(S + S_{kk} - 2U^2). \tag{68,20}$$

Nach (67,04) sind die Ableitungen von $U + \frac{1}{c^2} S$ den Ableitungen von $\frac{c^3}{4} \mathfrak{g}^{00}$ gleich. Die Gleichung (68,18) ergibt daher für $\mu = \nu = 0$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(U + \frac{1}{c^2} S\right) = -\frac{c^4}{2} N^{00} + 4\pi\gamma g T^{00}. \tag{68,21}$$

Ferner sind die Ableitungen von $\frac{1}{c^2} S_{kk}$ dieselben wie die von $\frac{c}{4} \mathfrak{g}^{kk}$. Setzen wir in (68,18) $\mu = \nu = k$ und summieren über k, so erhalten wir

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{1}{c^2} S_{kk} = -\frac{c^2}{2} N^{kk} - 4\pi\gamma T^{kk} \tag{68,22}$$

(im zweiten Term rechts haben wir den Faktor $(-g/c^2)$ durch Eins ersetzt). Schließlich können wir schreiben

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{-2U^2}{c^2}\right) = -\frac{4}{c^2}(\operatorname{grad} U)^2 + 16\pi\gamma U T^{00}. \tag{68,23}$$

Dabei haben wir im D'ALEMBERT-Operator die zweite zeitliche Ableitung vernachlässigt und die Identität

$$\Delta(U^2) = 2(\operatorname{grad} U)^2 + 2U\Delta U \tag{68,24}$$

sowie die Gleichungen

$$\Delta U = -4\pi\gamma\varrho = -4\pi\gamma c^2 T^{00} \tag{68,25}$$

benutzt. Die gesuchte Gleichung für U^* ergibt sich durch Addition der drei Gleichungen (68,21)—(68,23). Wir wollen nun deren rechte Seite bestimmen. Nach (68,14) haben wir

$$-\frac{c^4}{2} N^{00} = \frac{7}{2c^2}(\operatorname{grad} U)^2. \tag{68,26}$$

Mit der gleichen Genauigkeit erhalten wir aus (68,16) und (68,17)

$$-\frac{c^2}{2} N^{kk} = \frac{1}{2c^2}(\operatorname{grad} U)^2 \tag{68,27}$$

und folglich

$$\frac{c^4}{2} N^{00} + \frac{c^2}{2} N^{kk} + \frac{4}{c^2}(\operatorname{grad} U)^2 = 0. \tag{68,28}$$

Mit dieser Beziehung und der Formel

$$4\pi\gamma g + 16\pi\gamma U = -4\pi\gamma c^2 \qquad (68{,}29)$$

erhalten wir für U^* die einfache Gleichung

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\,(c^2 T^{00} + T^{kk}). \qquad (68{,}30)$$

Außerhalb der Massen genügt die Größe U^* der D'ALEMBERT-Gleichung mit euklidischen Koeffizienten. Wegen der Gestalt der LAGRANGE-Funktion (68,17) war das auch zu erwarten.

Am Ende von § 67 haben wir die Krümmungsinvariante R näherungsweise durch die Funktion

$$f = \sqrt[4]{\frac{-g}{c^2}}, \qquad (68{,}31)$$

die der vierten Wurzel aus dem Absolutwert der Determinante proportional ist, ausgedrückt. Wir fanden angenähert

$$R = \frac{2}{f^3}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f\right). \qquad (68{,}32)$$

Zusammen mit der aus den EINSTEINschen Gleichungen folgenden Beziehung

$$R = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\,T, \qquad (68{,}33)$$

wo T die Invariante des Massentensors ist, liefert die vorhergehende Gleichung

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\gamma}{c^2}\,f^3\,T. \qquad (68{,}34)$$

Diese Formel vergleichen wir mit der Gleichung (68,30) für U^*. Dazu setzen wir

$$f = 1 + \frac{U^{**}}{c^2}. \qquad (68{,}35)$$

Wie sich aus einem Vergleich mit (67,09) ergibt, ist

$$U^{**} = U + \frac{1}{c^2}\left(S - S_{kk} - \frac{3}{2}\,U^2\right). \qquad (68{,}36)$$

Ebenso wie U^* ist auch die Größe U^{**} in erster Näherung dem NEWTONschen Potential U gleich. Die Gleichung (68,34) nimmt die Form

$$\Delta U^{**} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^{**}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left(1 + \frac{3\,U}{c^2}\right)T \qquad (68{,}37)$$

an. Mit der gleichen Genauigkeit können wir dafür schreiben

$$\Delta U^{**} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^{**}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\{(c^2 + U)\,T^{00} - T^{kk}\}. \tag{68,38}$$

Die letzte Gleichung läßt sich auch unmittelbar aus den Formeln (68,21) bis (68,23) und der Definition (68,36) für die Größe U^{**} ableiten.

Hat die Invariante T die Form (66,19), so wird

$$\left(1 + \frac{3U}{c^2}\right) T = \varrho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(-\frac{1}{2}v^2 + \Pi\right)\right\} - \frac{3}{c^2}p. \tag{68,39}$$

Auf Grund dieser Formel und der Gleichung (68,37) kann man zeigen, daß die Größe U^{**} in der betrachteten Näherung eine additive Funktion der Massen ist.

Die halbe Summe

$$\overline{U} = \frac{1}{2}(U^* + U^{**}) \tag{68,40}$$

der Größen (68,20) und (68,36) genügt, wie man leicht sieht, der Gleichung

$$\Delta\overline{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right)T^{00}, \tag{68,41}$$

die rechts nur eine einzige Komponente des Massentensors enthält. Diese Gleichung hängt mit der EINSTEINschen Gleichung für dieselbe Komponente zusammen, und die Größe $\overline{U}$ selbst ist mit der Größe $\mathfrak{g}^{00}$ verknüpft. Multipliziert man nämlich die Ausdrücke

$$g^{00} = \frac{1}{c^2}\frac{c^2 + U^*}{c^2 - U^*}; \qquad \sqrt{-g} = c\left(1 + \frac{U^{**}}{c^2}\right)^2 \tag{68,42}$$

miteinander und beachtet, daß sich die Größen U^* und U^{**} voneinander und von U nur um Terme der Ordnung $1/c^2$ unterscheiden, so erhält man

$$\sqrt{-g}\,g^{00} = \mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3}\overline{U} + \frac{7}{c^5}\overline{U}^2, \tag{68,43}$$

wo $\overline{U}$ eine Lösung der Gleichung (68,41) ist.

Die Formel (68,43) für $\mathfrak{g}^{00}$ läßt sich leicht nachprüfen. Wenn $\mathfrak{g}^{00}$ nämlich diesen Wert besitzt, so ist

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{00} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2} = \frac{2}{c^4}\left(1 + \frac{7\overline{U}}{2c^2}\right)\left(\Delta\overline{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right) + $$
$$+ \frac{7}{c^6}\left((\operatorname{grad}\overline{U})^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\overline{U}}{\partial t}\right)^2\right). \tag{68,44}$$

Darin können wir in den Korrekturtermen $\overline{U}$ durch U ersetzen und $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$ weglassen. Mit dem Wert (68,14) für die Größe N^{00} erhalten wir

$$\frac{1}{2c}\,\Delta\,\mathfrak{g}^{00} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\,\mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2} + N^{00} = \frac{2}{c^4}\left(1 + \frac{7\,U}{2c^2}\right)\left(\Delta\,\overline{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}\right). \tag{68,45}$$

Vergleichen wir diese Beziehung mit der EINSTEINschen Gleichung (68,18) für $\mu = \nu = 0$, so werden wir auf die Gleichung (68,41) geführt. Wir bemerken noch, daß wir mit der gleichen Genauigkeit, mit der die Formel (68,43) gilt, auch schreiben können

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c}\,\frac{\left(1 + \frac{\overline{U}}{c^2}\right)^3}{\left(1 - \frac{\overline{U}}{c^2}\right)}. \tag{68,46}$$

Das statische Feld einer Zentralmasse M haben wir in § 57 streng berechnet. Der Vergleich mit dieser strengen Lösung zeigt, daß die Formeln (68,42) und (68,46) für

$$U^* = U^{**} = \overline{U} = \frac{\gamma M}{r} \tag{68,47}$$

mit den exakten Formeln [vgl. (58,10) und (58,13)] übereinstimmen. Die Werte (68,47) stehen mit den D'ALEMBERT-Gleichungen in Einklang, denen diese Größen außerhalb der Massen nach der in diesem Paragraphen behandelten Näherungstheorie genügen müssen.

§ 69 Der Zusammenhang zwischen der Divergenz des Massentensors und den Größen Γ^ν

Wenn man im EINSTEINschen Tensor von vornherein die Terme, die Γ^ν enthalten, wegläßt, so ist — wie bereits am Anfang des vorigen Paragraphen erwähnt — das Verschwinden der Divergenz des Massentensors

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{69,01}$$

keine Identität, sondern eine Folge der Bedingung der Harmonizität

$$\frac{\partial\,\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{69,02}$$

Zur Untersuchung der Bewegungsgleichungen müssen wir den Zusammenhang zwischen den Bedingungen (69,01) und (69,02) oder, genauer, zwischen den linken Seiten der entsprechenden Gleichungen kennen.

Werden keine Vernachlässigungen gemacht, so läßt sich die linke Seite von (69,01) als ein ziemlich komplizierter Differentialoperator darstellen, der auf die linke Seite von (69,02) wirkt. Uns interessieren jedoch nicht diese exakten

Formeln, sondern nur die angenäherten, und zwar mit derselben Genauigkeit, mit der im vorigen Paragraphen die EINSTEINschen Gleichungen aufgeschrieben wurden. Diese Näherungsformeln wollen wir jetzt ableiten.

Den Ausdruck für die Divergenz eines symmetrischen Tensors haben wir in § 65 ausführlich aufgeschrieben. Nach (65,24) lauten die räumlichen Komponenten dieser Divergenz

$$\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial T^{io}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + \Gamma^i_{00} T^{00} + 2\Gamma^i_{0k} T^{0k} + y_0 T^{0i} + \Gamma^i_{kl} T^{kl} + y_k T^{ik}. \quad (69{,}03)$$

Die darin auftretenden CHRISTOFFEL-Symbole und die Größen y_α wurden in § 67 angegeben [Formeln (67,25) und (67,21)]. Diese Formeln wollen wir jetzt etwas umformen. Mit Hilfe der durch (67,11) eingeführten Bezeichnung U^* können wir statt der ersten Formel (67,25) schreiben

$$\Gamma^i_{00} = -\left(1 - \frac{4U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right). \quad (69{,}04)$$

Die beiden übrigen Formeln (67,25) lassen sich in der Form

$$\Gamma^i_{0k} = \frac{1}{2} y_0 \delta_{ik} - \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \quad (69{,}05)$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}(y_l \delta_{ik} + y_k \delta_{il}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta_{kl} \quad (69{,}06)$$

schreiben. Setzen wir diese Ausdrücke in (69,03) ein, so erhalten wir

$$\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial T^{io}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} + 2y_0 T^{io} + 2y_k T^{ik} - \left(1 - \frac{4U}{c^2}\right)\left(\frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right) T^{00} -$$
$$- \frac{4}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i} T^{kk}. \quad (69{,}07)$$

Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit der Determinante g, die angenähert den Wert

$$g = -c^2\left(1 + \frac{4U}{c^2}\right) \quad (69{,}08)$$

hat, und benutzen die Tatsache, daß die Koeffizienten von T^{00} und T^{kk} einander nahezu proportional sind. Wir bekommen dann

$$g\nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial(g T^{io})}{\partial t} + \frac{\partial(g T^{ik})}{\partial x_k} +$$
$$+ \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk}) + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}. \quad (69{,}09)$$

So lautet der Ausdruck für die mit g multiplizierte Divergenz eines beliebigen symmetrischen Tensors. Ist aber $T^{\mu\nu}$ speziell der Massentensor, so gelten noch die Gleichungen

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\,(c^2 T^{00} + T^{kk}), \tag{69,10}$$

$$\Delta U_k = -4\pi\gamma c^2 T^{0k}, \tag{69,11}$$

die wir früher abgeleitet haben [Formeln (68,19) und (68,30)]. Mit deren Hilfe kann man die rechte Seite von (69,09) weiter umformen. Dazu betrachten wir die durch die Formeln (68,14)—(68,16) eingeführten Größen $N^{\mu\nu}$ und beachten, daß sie in die Gravitationsgleichungen (68,18) mit dem Tensor $T^{\mu\nu}$ in der Kombination

$$A^{\mu\nu} = g\,T^{\mu\nu} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{\mu\nu} \tag{69,12}$$

eingehen. Wir bilden die Summe der Ableitungen

$$A^i = \frac{\partial A^{i\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{69,13}$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + \frac{\partial U_s}{\partial x_s} = \Psi \tag{69,14}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial N^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial N^{ik}}{\partial x_k} = \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) + \\ + \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\left(\Delta U_s - \frac{\partial \Psi}{\partial x_s}\right). \tag{69,15}$$

Da in erster Näherung die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_s}{\partial x_s} = 0 \tag{69,16}$$

gilt [vgl. Formel (55,42)], ist die Größe Ψ mindestens von der Ordnung $1/c^2$, so daß wir in der Formel (69,15) alle Terme mit Ableitungen von Ψ weglassen können. Unter Benutzung der Gleichungen (69,10) und (69,11) erhalten wir dann aus (69,15)

$$-\frac{c^4}{8\pi\gamma}\left(\frac{\partial N^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial N^{ik}}{\partial x_k}\right) = \\ = \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk}) + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}. \tag{69,17}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt aber mit den Zusatztermen auf der rechten Seite von (69,09) überein, die sich somit als Summe von Ableitungen darstellen lassen. Ist also $T^{\mu\nu}$ der Massentensor, so können wir schreiben

$$g \nabla_\mu T^{i\mu} = \frac{\partial}{\partial t}\left(g\, T^{i0} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{i0}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(g\, T^{ik} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{ik}\right). \qquad (69{,}18)$$

Andererseits erhalten wir durch Differentiation der in der Form (68,18) geschriebenen Gravitationsgleichungen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k}\right) = \\ = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(g\, T^{i0} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{i0}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(g\, T^{ik} - \frac{c^4}{8\pi\gamma} N^{ik}\right)\right\}. \qquad (69{,}19)$$

Der Vergleich der letzten beiden Formeln ergibt

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k}\right) = \frac{16\pi\gamma g}{c^3} \nabla_\mu T^{i\mu}. \qquad (69{,}20)$$

Diese näherungsweise gültige Relation spielt bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen eine wichtige Rolle.

Eine analoge Beziehung kann man auch für die Nullkomponente der Divergenz des Massentensors ableiten. Durch Differentiation der angenäherten EINSTEINschen Gleichungen (68,18) erhält man

$$\frac{1}{2c}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial N^{0\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(g\, T^{0\mu}). \qquad (69{,}21)$$

Um darin den zweiten Term auf der linken Seite zu berechnen, differenzieren wir die Ausdrücke (68,14) und (68,15) für N^{00} und N^{0i}. Unter Benutzung der Gleichung (69,16) erhalten wir

$$\frac{\partial N^{00}}{\partial t} + \frac{\partial N^{0i}}{\partial x_i} = \frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\Delta U + \frac{8}{c^6}\frac{\partial U}{\partial x_i}\Delta U_i. \qquad (69{,}22)$$

Hierin können wir nach den Formeln (68,25) und (69,11) die Größen ΔU und ΔU_i durch T^{00} und T^{0i} ausdrücken. Dann wird

$$\frac{\partial N^{0\mu}}{\partial x_\mu} = -\frac{24\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial U}{\partial t} T^{00} - \frac{32\pi\gamma}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_i} T^{0i}. \qquad (69{,}23)$$

Gehen wir damit in (69,21) ein und benutzen den Ausdruck (69,08) für die Determinante g, so erhalten wir nach Multiplikation mit $2c$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\, g\left(\frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right) T^{00} \qquad (69{,}24)$$

oder

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{0\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\, g\, \nabla_\mu T^{0\mu}. \tag{69,25}$$

Denn nach (65,23) ist die Nullkomponente der Divergenz des Massentensors dem Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite von (69,24) angenähert gleich. Die Formel (69,25) ist völlig analog zu der Formel (69,20) für die räumlichen Komponenten der Divergenz des Massentensors gebaut.

Beide Formeln kann man zu

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\, g\, \nabla_\mu T^{\mu\nu} \tag{69,26}$$

zusammenfassen. Wie schon am Anfang dieses Paragraphen erwähnt wurde, gelten diese Formeln nur angenähert. Sie sind dadurch bemerkenswert, daß der darin auf der linken Seite auftretende Differentialoperator konstante Koeffizienten besitzt; deshalb lassen sich diese Formeln sehr bequem untersuchen.

§ 70 Die Bewegungsgleichungen und die Bedingung der Harmonizität

Allgemein haben wir das Problem der Bewegung eines Massensystems schon in § 64 formuliert. Jetzt soll die Form der Bewegungsgleichungen untersucht werden.

Sehen wir jeden der sich bewegenden Körper als Kontinuum an, so müssen, wie wir wissen, im Inneren jedes Körpers die Gleichungen

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{70,01}$$

gelten. Andererseits kann man die Bewegung jedes Körpers als Ganzes betrachten und ihn durch eine endliche Anzahl von Parametern (Schwerpunktskoordinaten, Masse, Trägheitsmomente usw.) kennzeichnen. Dann entsteht die Aufgabe, die Bewegungsgleichungen für die Körper als Ganzes, d. h. die Differentialgleichungen für die Parameter, die jeden Körper charakterisieren, zu finden.

Einige der Parameter, die den Körper kennzeichnen, haben wir aufgezählt. Was bedingt die Wahl dieser Parameter? Es ist vor allem die Forderung, daß die benutzten Parameter zur Festlegung der Kräfte, die auf die übrigen Körper wirken und deren Bewegung bestimmen, ausreichen müssen. In unserem Fall handelt es sich um Gravitationskräfte. Deshalb müssen die Parameter, die den Körper als Ganzes kennzeichnen, so gewählt werden, daß man aus ihnen mit hinreichender Genauigkeit das Gravitationsfeld in dem Gebiet bestimmen kann, in dem sich die übrigen Körper befinden. Da die Körper große Abstände voneinander besitzen, müssen die Parameter, die sich auf einen gegebenen Körper beziehen, vor allem das Gravitationsfeld in großer Entfernung von diesem bestimmen. Dieser Forderung genügen die oben genannten Parameter.

Das eben Gesagte bezieht sich sowohl auf die NEWTONsche als auch auf die EINSTEINsche Mechanik. Da die Gravitation in der EINSTEINschen Theorie mit der Metrik zusammenhängt, und eben die Metrik unmittelbar die Be-

wegung eines Körpers beeinflußt, ist bei der Bestimmung der Bewegungsgleichungen eines Systems von Körpern die Untersuchung der Metrik in großer Entfernung von den Körpern am wesentlichsten. Sowohl die Wahl der Parameter als auch die Form der Bewegungsgleichungen sind der Forderung unterworfen, daß in großem Abstand von jedem Körper die richtige Metrik herauskommen muß.

Am Ende des § 69 erhielten wir die angenäherte Beziehung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\, g V_\mu T^{\mu\nu}. \qquad (70,02)$$

Diese Relation ergibt sich aus den EINSTEINschen Gleichungen in der angenäherten Form (68,18). In der strengen Lösung verschwinden sowohl die rechte Seite von (70,02) als auch der Ausdruck auf der linken Seite, auf den der D'ALEMBERT-Operator wirkt, und zwar auf Grund der Gleichung (70,01) und der Harmonizitätsbedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (70,03)$$

Betrachten wir dagegen eine Näherungslösung, so stellt die Beziehung (70,02) einen Zusammenhang zwischen dem Grad der Genauigkeit, mit dem die Gleichung (70,01) erfüllt ist, und dem Genauigkeitsgrad her, mit dem die Harmonizitätsbedingung (70,03) gilt.

Wie wir festgestellt haben, besteht die wichtigste Forderung für die Bestimmung des Bewegungsgesetzes eines Körpers als Ganzes darin, daß in großem Abstand von jedem Körper die richtige Metrik herauskommen muß. Diese Forderung besagt insbesondere, daß in großem Abstand von jedem Körper die Bedingung der Harmonizität (70,03) mit größtmöglicher Genauigkeit erfüllt sein muß. Wir wollen untersuchen, welche Folgerungen sich hieraus für die rechte Seite von (70,02) ergeben.

Die Gleichungen (70,02) haben die Form der gewöhnlichen Gleichung für retardierte Potentiale

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi\sigma, \qquad (70,04)$$

wobei man jedoch beachten muß, daß schon bei ihrer Ableitung Vernachlässigungen gemacht wurden, die mit einer Entwicklung der darin auftretenden Funktionen nach reziproken Potenzen der Lichtgeschwindigkeit c äquivalent sind. Deshalb brauchen wir in unserem Fall die Gleichung (70,04) nur angenähert zu lösen.

Wir betrachten jedoch zunächst die exakte Lösung. Dabei nehmen wir an, daß die auf der rechten Seite stehende Funktion σ (die wir als Dichte bezeichnen) nur in einem beschränkten Raumgebiet von Null verschieden ist, nämlich in der Umgebung des Punktes mit den Koordinaten

$$x_i = a_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (70,05)$$

(das ist das von einer der Massen erfüllte Gebiet). Uns interessiert diejenige Lösung der Gleichung, die physikalisch dem von einer bewegten Masse mit der Dichte σ erzeugten Potential entspricht (retardiertes Potential). Diese Lösung hat die Form

$$\psi = \int \frac{[\sigma]\, dV'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}, \tag{70,06}$$

wobei $[\sigma]$ der retardierte Wert der Dichte σ ist, nämlich

$$[\sigma] = \sigma(t', \mathfrak{r}'); \quad t' = t - \frac{1}{c} |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|. \tag{70,07}$$

Integriert wird über die Koordinaten x' y' z', und zwar über das von der Masse eingenommene Gebiet.

Nun gehen wir zu Näherungsformeln über. Entwickeln wir die Größe $[\sigma]$ nach Potenzen der reziproken Lichtgeschwindigkeit c und beschränken uns auf die ersten Glieder, so erhalten wir

$$\psi = \int \frac{\sigma\, dV'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \sigma\, dV' + \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|\, \sigma\, dV' \tag{70,08}$$

mit

$$\sigma = \sigma(t, \mathfrak{r}'). \tag{70,09}$$

Diesen Ausdruck können wir weiter nach Potenzen des reziproken Abstandes von der gegebenen Masse entwickeln. Dazu benutzen wir die Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} &= \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + \frac{(x_i - a_i)(x_i' - a_i)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^3} + \cdots, \\ |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| &= |\mathfrak{r} - \mathfrak{a}| - \frac{(x_i - a_i)(x_i' - a_i)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{70,10}$$

und setzen

$$\left.\begin{aligned} &\int \sigma(t, \mathfrak{r}')\, dV' = \mu, \\ &\int \sigma(t, \mathfrak{r}')(x_i' - a_i)\, dV' = \mu_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{70,11}$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\mu}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + \frac{\mu_i (x_i - a_i)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^3} + \cdots - \frac{1}{c} \frac{d\mu}{dt} + \\ + \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \mu\, |\mathfrak{r} - \mathfrak{a}| - \frac{\mu_i (x_i - a_i)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + \cdots \right\}. \end{aligned} \tag{70,12}$$

Die Größen μ und μ_i kann man als „Momente" nullter und erster Ordnung bezeichnen. Man erkennt leicht, daß für $\mu = 0$ die Glieder ohne c mit der Entfernung von der betrachteten Masse mindestens wie $\frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^2}$ abnehmen,

das zu c umgekehrt proportionale Glied verschwindet und die zu $1/c^2$ proportionale Glieder beschränkt bleiben. Fordert man außerdem, daß die Momente erster Ordnung verschwinden, d. h., daß $\mu_i = 0$ gelten soll, so fallen in der Entwicklung (70,12) für ψ auch die nächstwichtigen Glieder fort. Verschwänden auch die Momente zweiter Ordnung

$$\int \sigma\,(x_i - a_i)\,(x_k - a_k)\,d\,V = \mu_{ik}\,, \tag{70,13}$$

so würden noch weitere Glieder wegfallen, usw. Nicht alle diese Bedingungen sind im allgemeinen unabhängig voneinander. Insgesamt können wir nur so viel unabhängige Bedingungen aufstellen, wie wir Parameter zur Verfügung haben.

Jetzt nehmen wir an, es seien mehrere Massen vorhanden, so daß die Dichte σ in der Umgebung mehrerer Punkte

$$x_i = a_i(t)\,; \qquad x_i = b_i(t),\,\ldots \tag{70,14}$$

von Null verschieden ist. Dann gelten die gleichen Überlegungen für jeden dieser Punkte. Mit

$$\mu^{(a)} = \int\limits_{(a)} \sigma\,(t,\,\mathfrak{x})\,d\,V; \quad \mu^{(b)} = \int\limits_{(b)} \sigma\,(t,\,\mathfrak{x})\,d\,V; \quad \ldots, \tag{70,15}$$

und mit

$$\mu_i^{(a)} = \int\limits_{(a)} \sigma\,(t,\,\mathfrak{x})\,(x_i - a_i)\,d\,V\,; \quad \mu_i^{(b)} = \int\limits_{(b)} \sigma\,(t,\,\mathfrak{x})\,(x_i - b_i)\,d\,V \tag{70,16}$$

bezeichnen wir die Integrale (70,11), die jeweils über ein von einer der Massen erfülltes Gebiet erstreckt werden. Dann erhalten wir für ψ den Ausdruck

$$\begin{aligned}\psi = \sum_a \frac{\mu^{(a)}}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}|} + \sum_a \frac{\mu_i^{(a)}\,(x_i - a_i)}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}|^3} + \cdots -\\ -\frac{1}{c}\,\frac{d}{d\,t} \sum_a \mu^{(a)} + \frac{1}{2\,c^2}\,\frac{d^2}{d\,t^2} \sum_a \left\{\mu^{(a)}\,|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}| - \frac{\mu_i^{(a)}\,(x_i - a_i)}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}|} + \cdots\right\}.\end{aligned} \tag{70,17}$$

Damit die Funktion ψ in einem beliebigen Punkt zwischen den Massen und auch im Außengebiet aller Massen klein ist, müssen wir jetzt fordern, daß eine Reihe von Gleichungen

$$\mu^{(a)} = 0\,, \quad \mu_i^{(a)} = 0\,, \ldots \tag{70,18}$$

erfüllt ist, von denen sich jede auf eine der Massen bezieht.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen wenden wir uns wieder der Untersuchung der Gleichung (70,02) zu. Wir werden versuchen, die Forderung zu befriedigen, daß in jedem Punkt zwischen den Massen und im Außengebiet aller Massen die Harmonizitätsbedingung (70,03) mit größtmöglicher Genauigkeit erfüllt wird.

Schreibt man die Bewegungsgleichungen in vierdimensionaler Form, so ist die Gleichung für die Energiebilanz gewöhnlich eine Folge der übrigen Bewegungsgleichungen. Deshalb beschäftigen wir uns zunächst mit den räumlichen Komponenten der Beziehung (70,02) (sie entsprechen $\nu = 1, 2, 3$) und prüfen

dann nach, ob die Bedingungen auch für die zeitliche Komponente ($\nu = 0$) erfüllt sind.

Wie aus einem Vergleich von (70,02) und (70,04) ersichtlich ist, können wir setzen

$$\sigma = \sigma_i = -g \nabla_\alpha T^{\alpha i}, \tag{70,19}$$

$$\psi = \psi_i = \frac{c^3}{4\gamma} \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha}. \tag{70,20}$$

Damit die Größen (70,20) außerhalb der Massen klein sind, muß eine Reihe von Bedingungen der Form (70,18) erfüllt sein. Vor allem müssen die Integrale

$$\mu^{i(a)} \equiv -\int_{(a)} g \nabla_\alpha T^{\alpha i} dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0, \tag{70,21}$$

die über das Gebiet jeder Masse erstreckt werden, verschwinden. Nach (69,09) gilt nun

$$g \nabla_\alpha T^{\alpha i} = \frac{\partial}{\partial t}(g T^{i0}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(g T^{ik}) + \\ + \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk}) + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k}. \tag{70,22}$$

Daher kann man die Gleichungen (70,21) in der Form

$$-\frac{d}{dt}\int_{(a)} g T^{i0} (dx)^3 = \int_{(a)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)(c^2 T^{00} + T^{kk})(dx)^3 + \\ + 4\int_{(a)} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) T^{0k} (dx)^3 \tag{70,23}$$

schreiben, wo zur Abkürzung

$$(dx)^3 = dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{70,24}$$

gesetzt ist. Wir erinnern noch daran, daß die Größe g den Wert

$$g = -c^2 - 4U \tag{70,25}$$

hat. Die Ausdrücke für die Komponenten des Massentensors eines elastischen Körpers haben wir in § 66 aufgestellt. Nach Formel (66,07) lauten sie

$$\left.\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \varrho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\}, \\ c^2 T^{0i} &= \varrho v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\} - \frac{1}{c^2} p_{ik} v_k, \\ c^2 T^{ik} &= \varrho v_i v_k - p_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{70,26}$$

Beschränken wir uns auf die Hauptglieder, so gewinnen wir durch Einsetzen von (70,26) in (70,23) folgende Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho v_i (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i} (dx)^3. \tag{70,27}$$

Hieraus geht hervor, daß die Gleichungen (70,21) die Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt jeder der Massen darstellen. Ist n die Anzahl der Massen, so gibt es $3n$ solche Gleichungen. Das ist die Anzahl der Freiheitsgrade unseres mechanischen Systems, wenn wir die Massen als Massenpunkte auffassen.

Wir betrachten nun die anderen Bedingungen von der Form (70,18). So können wir jetzt etwa das Verschwinden folgender Kombination von Momenten erster Ordnung fordern:

$$\mu^{ik(a)} \equiv -\int g (x_i \nabla_\alpha T^{\alpha k} - x_k \nabla_\alpha T^{\alpha i})(dx)^3 = 0. \tag{70,28}$$

Beschränken wir uns auch hier auf die Hauptglieder, so lauten diese Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho (x_i v_k - x_k v_i)(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \varrho \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3. \tag{70,29}$$

Sie stellen offenbar das Gesetz für die Änderung des Drehimpulses jedes der Körper dar. Im Drehimpuls ist hier sowohl das Bahnmoment, das von der Bewegung auf einer Bahn herrührt, als auch das von einer Rotation des Körpers hervorgerufene Eigenmoment einbegriffen. Das Bahnmoment kann man durch eine Kombination der Gleichungen (70,27) und (70,29) abtrennen. Die Anzahl der Gleichungen von der Form (70,28) ist ebenfalls $3n$. Nehmen wir also an, daß die Massen wie starre Körper rotieren, so gibt es ebensoviel Gleichungen wie Freiheitsgrade der Rotation.

§ 71 Das innere und das äußere Problem der Mechanik eines Systems von Körpern. Die NEWTONschen Gleichungen für die Translationsbewegung

Im folgenden werden wir zwischen einem inneren und einem äußeren Problem der Mechanik unterscheiden. Die Gleichungen für die Bewegungen im Inneren des Körpers bilden das innere, die Gleichungen für die Bewegung des Körpers als Ganzes das äußere Problem. Wir wollen nun in verschiedenen Näherungen untersuchen, welchen Einfluß die innere Struktur eines Körpers auf seine Bewegung als Ganzes ausübt.

Um die NEWTONschen Bewegungsgleichungen in der Integralform (70,27) und (70,29) zu erhalten, mußte man im inneren Problem, wie wir sahen, nur die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho v_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{71,01}$$

benutzen, mit deren Hilfe sich die nullte Näherung für einige Komponenten des Massentensors schreiben ließ

$$c^2 T^{00} = \varrho; \quad c^2 T^{0i} = \varrho v_i. \tag{71,02}$$

Über die innere Struktur des Körpers braucht man also in dieser Näherung fast keine Voraussetzungen zu machen. Eine eingehendere Untersuchung der inneren Struktur des Körpers ist auch ohne Kenntnis der Metrik mit der entsprechenden Genauigkeit gar nicht möglich. Wenn wir die euklidische Metrik als nullte Näherung bezeichnen, so erfordert schon die (auf die euklidische folgende) erste Näherung die Einführung des NEWTONschen Gravitationspotentials U und des Vektorpotentials U_i. Das wurde auch in § 55 unter Benutzung der Ausdrücke (71,02) für den Massentensor durchgeführt. Physikalisch entspricht die erste Näherung für die Metrik einer Berücksichtigung der Schwerkraft bei der Untersuchung der inneren Struktur des Körpers.

Zur Ableitung des oben [Formel (70,26)] angegebenen Massentensors in § 66 waren außer der ersten Näherung für die Metrik schon bestimmte Voraussetzungen über die innere Struktur des Körpers erforderlich, und zwar wurde der Körper als elastisch angenommen. Neben der Kontinuitätsgleichung (71,01) wurde vorausgesetzt, daß innerhalb des Körpers die NEWTONschen Bewegungsgleichungen

$$\varrho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \tag{71,03}$$

gelten.

Die Kontinuitätsgleichung für das innere Problem gestattet, die NEWTONschen Bewegungsgleichungen (70,27) für das äußere Problem aufzustellen. Die Gleichungen (71,03) für das innere Problem und der damit konstruierte Massentensor (70,26) ermöglichen die Bestimmung der zweiten (relativistischen) Näherung für die Bewegungsgleichungen des Körpers als Ganzes. Das ist auch ganz naturgemäß. Die nichtrelativistischen Gleichungen liefern nämlich die Verteilung der Energie (und der verwandten Größen) innerhalb des Körpers, und der Energie entspricht eine Masse, deren Beitrag zum Gravitationsfeld in der relativistischen Näherung mitberücksichtigt werden muß.

Unsere nächste Aufgabe wird es sein, Bewegungsgleichungen, die sich aus den am Ende des vorigen Paragraphen gewonnenen Integralbeziehungen ergeben, in expliziter Form aufzustellen. Dazu müssen wir vor allem angeben, welche Freiheitsgrade betrachtet werden sollen, mit anderen Worten, durch welche Parameter wir unser mechanisches System kennzeichnen wollen. Die für die Wahl der Parameter maßgebenden Forderungen haben wir schon am Anfang des vorigen Paragraphen besprochen. Auf Grund dieser Überlegungen werden wir die Freiheitsgrade betrachten, die erstens einer translatorischen Bewegung jedes Körpers und zweitens einer Rotation jedes Körpers um seinen Schwerpunkt entsprechen. Dabei *werden wir voraussetzen, daß die Körper wie starre Körper rotieren* (das bedeutet natürlich nicht, daß die Körper als starr angenommen werden: Auch flüssige Körper können sich so bewegen).[1]

[1] Wir erinnern daran, daß unsere Rechnungen Näherungscharakter haben. Die Schwierigkeiten, die mit der Definition des Begriffes eines starren Körpers in der Relativitätstheorie zusammenhängen, treten in der betrachteten Näherung noch nicht auf.

Auf Grund der Kontinuitätsgleichung ist die Masse eines Körpers

$$M_a = \int\limits_{(a)} \varrho (d\,x)^3 \tag{71,04}$$

eine Konstante; deshalb tritt sie unter den variablen Parametern nicht auf. Die Translationsbewegung eines Körpers wird durch die Änderung seiner Schwerpunktskoordinaten a_i bestimmt. Diese Größen führt man durch die Beziehungen

$$M_a a_i = \int\limits_{(a)} \varrho\, x_i (d\,x)^3 \tag{71,05}$$

ein, die man auch in der Form

$$\int\limits_{(a)} \varrho (x_i - a_i)(d\,x)^3 = 0 \tag{71,06}$$

schreiben kann. Differenzieren wir das Integral (71,05) nach der Zeit und benutzen die Kontinuitätsgleichung, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\int \varrho x_i (d\,x)^3 = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, x_i (d\,x)^3 = -\int \frac{\partial (\varrho v_j)}{\partial x_j}\, x_i (d\,x)^3 = \int \varrho\, v_i (d\,x)^3 \tag{71,07}$$

und damit

$$\int\limits_{(a)} \varrho\, v_i (d\,x)^3 = M_a \dot{a}_i\,. \tag{71,08}$$

Aus der Beziehung (71,08) folgt, daß die linke Seite der Gleichung (70,27) dem Produkt der Masse des Körpers mit der Beschleunigung seines Schwerpunktes gleich ist

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho\, v_i (dx)^3 = M_a \ddot{a}_i\,, \tag{71,09}$$

und zwar gilt diese Gleichung unabhängig von der Geschwindigkeitsverteilung im Inneren des Körpers. Wir berechnen nun das Integral auf der rechten Seite von (70,27). Das NEWTONsche Potential U kann man in zwei Summanden zerlegen

$$U(\mathfrak{r}) = u_a(\mathfrak{r}) + U^{(a)}(\mathfrak{r})\,, \tag{71,10}$$

wobei u_a von der Masse M_a und $U^{(a)}$ von den übrigen Massen herrührt. Entsprechend wird dann

$$\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i}(d\,x)^3 = \int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial u_a}{\partial x_i}(d\,x)^3 + \int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}(d\,x)^3. \tag{71,11}$$

Im Inneren der Masse M_a genügt das Potential u_a der Gleichung

$$\Delta u_a = -4\pi\gamma\varrho_a, \tag{71,12}$$

wobei ϱ_a die Dichte der betrachteten Masse ist. Man kann es in Form eines Integrals

$$u_a = \gamma \int\limits_{(a)} \frac{\varrho' (d x')^3}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \tag{71,13}$$

darstellen. Das Potential $U^{(a)}$ dagegen, das von den übrigen Massen herrührt, ist im Inneren der betrachteten Masse eine langsam veränderliche Funktion der Koordinaten, die man in eine TAYLOR-Reihe nach Potenzen von $(x_j - a_j)$ entwickeln kann. Damit läßt sich dann das zweite Integral in (71,11) angenähert berechnen.

Setzen wir den Ausdruck (71,13) für u_a in das erste der Integrale (71,11) ein, so erhalten wir

$$\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (d x)^3 = -\gamma \int\limits_{(a)} \int\limits_{(a)} \frac{\varrho \varrho'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|^3} (x_i - x_i') (d x)^3 (d x')^3. \tag{71,14}$$

Das Doppelintegral rechts verschwindet aber, da der Integrand antisymmetrisch in den Koordinaten der beiden Punkte ist. Es gilt also

$$\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (dx)^3 = 0. \tag{71,15}$$

Diese Beziehung besagt, daß die Resultierende der inneren Gravitationskräfte verschwindet.

Wir beweisen diese Beziehung noch auf eine andere Art. Setzen wir

$$q_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2} \delta_{ik} (\text{grad } u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_k}, \tag{71,16}$$

so gilt

$$\frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} = -\frac{\partial u_a}{\partial x_i} \Delta u_a \tag{71,17}$$

oder, wegen der Gleichung (71,12),

$$\frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} = \varrho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i}. \tag{71,18}$$

Verstehen wir in dem Integral (71,15) unter ϱ die Dichte ϱ_a der betrachteten Masse, so können wir das Integral über den ganzen Raum erstrecken und erhalten

$$\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (d x)^3 = \int\limits_{(\infty)} \varrho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} (d x)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} (d x)^3 = 0, \tag{71,19}$$

da im Unendlichen die Größen $q_{ik}^{(a)}$ verschwinden.

Nun berechnen wir das zweite Integral in (71,11). Die TAYLOR-Entwicklung des Potentials $U^{(a)}$ der übrigen Massen ergibt

$$\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k}\right)_a (x_k - a_k) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\right)_a (x_k - a_k)(x_l - a_l) + \cdots \tag{71,20}$$

Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit ϱ, integrieren über das Volumen der Masse (a) und benutzen (71,06). Dann wird

$$\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (d\,x)^3 = M_a \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a + \frac{1}{2} I_{kl}^{(a)} \left(\frac{\partial^3 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\right)_a + \cdots, \tag{71,21}$$

wobei wir mit $I_{kl}^{(a)}$ die Größen

$$I_{kl}^{(a)} = \int\limits_{(a)} \varrho\,(x_k - a_k)(x_l - a_l)(d\,x)^3 \tag{71,22}$$

bezeichnet haben, die wir die Trägheitsmomente der Masse (a) nennen (in der Mechanik meint man damit etwas andere Größen). Wir müssen jetzt den Wert des Potentials $U^{(a)}$ berechnen. Es ist

$$U^{(a)}(\mathfrak{r}) = \sum_b{}' \gamma \int\limits_{(b)} \frac{\varrho'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} (d\,x')^3, \tag{71,23}$$

wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die Masse (a) bei der Summation ausgelassen werden soll. Jedes Glied der Summe stellt das Potential der entsprechenden Masse dar. Wir betrachten eines davon, etwa

$$u_b(\mathfrak{r}) = \gamma \int\limits_{(b)} \frac{\varrho'(d\,x')^3}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}. \tag{71,24}$$

Setzen wir darin die Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} = \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|} - (x_k' - b_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|} + \\ + \frac{1}{2}(x_k' - b_k)(x_l' - b_l) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|} + \cdots \tag{71,25}$$

ein, integrieren gliedweise und benutzen die Formel (71,06) und die Bezeichnung (71,22), so erhalten wir

$$u_b(\mathfrak{r}) = \frac{\gamma M_b}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|} + \frac{1}{2} \gamma I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|} + \cdots. \tag{71,26}$$

Es wird also

$$U^{(a)}(\mathfrak{r}) = \sum_b{}' \frac{\gamma M_b}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|} + \frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma I_{kl}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|} + \cdots. \tag{71,27}$$

In diesem Ausdruck schätzen wir die Größenordnung der ersten und der zweiten Summe ab. Es sei L eine Länge, die die linearen Abmessungen der Körper kennzeichnet, und R eine andere Länge von der Größenordnung der Abstände zwischen ihnen (vgl. § 64). Ferner soll q die Größenordnung der Geschwindigkeiten der Körper charakterisieren. Wir nehmen an, daß größenordnungsmäßig gilt

$$q^2 \sim \frac{\gamma M}{R}. \tag{71,28}$$

Die Größenordnung der Trägheitsmomente ist offenbar

$$I_{kl} \sim M L^2. \tag{71,29}$$

Dann ist die erste Summe in (71,27) von der Ordnung q^2 und die zweite von der Ordnung $q^2 \frac{L^2}{R^2}$. Die nicht hingeschriebenen Glieder, die wir durch Punkte angedeutet haben, sind von höherer Ordnung in der kleinen Größe L/R und können vernachlässigt werden. Andererseits sieht man leicht, daß in der Formel (71,27) das zweite Glied im Verhältnis zum ersten von der Ordnung L^2/R^2 ist. Deshalb können wir bei der Berechnung des zweiten Gliedes im Potential $U^{(a)}$ Größen von der Ordnung $q^2 \frac{L^2}{R^2}$ weglassen, während wir diese bei der Berechnung des ersten Gliedes beibehalten müssen. Die Rechnung ergibt

$$\int_{(a)} \varrho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_b{}' \Big\{ \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} + \frac{\gamma}{2} (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} \Big\}. \tag{71,30}$$

Da die Größe

$$\frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} = -\frac{\delta_{kl}}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|^3} + \frac{3(a_k-b_k)(a_l-b_l)}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|^5} \tag{71,31}$$

in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ symmetrisch ist, so ist auch der Ausdruck in der geschweiften Klammer in (71,30) symmetrisch. Wenn wir die Doppelsumme

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \Big\{ \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} + \frac{\gamma}{2} (M_a I_{kl}^{(b)} + M_b I_{kl}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} \Big\} \tag{71,32}$$

einführen, so können wir daher schreiben

$$\int_{(a)} \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i} (dx)^3 = \int_{(a)} \varrho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \tag{71,33}$$

Die Gleichung (70,27), die wir noch einmal aufschreiben wollen:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho v_i (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i} (dx)^3, \tag{71,34}$$

hat also jetzt die Form

$$M_a \ddot{a}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \tag{71,35}$$

Die Größe Φ ist offenbar die NEWTONsche potentielle Energie unseres mechanischen Systems, ausgedrückt durch die Koordinaten und die Trägheitsmomente. Wir bemerken, daß bei der Ableitung dieser Gleichungen keine Voraussetzung über die Geschwindigkeitsverteilung im Inneren des Körpers [abgesehen von (71,01)] gemacht wurde.

Besitzen alle betrachteten Körper Kugelsymmetrie, so ist für jeden der Körper der Tensor der Trägheitsmomente I_{kl} dem Einheitstensor proportional

$$I_{kl} = I\delta_{kl}. \tag{71,36}$$

In diesem Fall enthält die potentielle Energie Φ die Trägheitsmomente nicht mehr, sondern hängt nur noch von den Koordinaten a_i (und natürlich von den konstanten Massen M_a) ab. Das Gleichungssystem (71,35) ist dann vollständig: Es enthält genau soviele Gleichungen wie unbekannte Koordinaten der Schwerpunkte der Massen. Es handelt sich um die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten, die sich nach dem NEWTONschen Gesetz anziehen.

Im allgemeinen Fall nicht-kugelsymmetrischer Körper treten jedoch in den Bewegungsgleichungen außer den Koordinaten der Schwerpunkte der Massen noch deren Trägheitsmomente auf, und das Gleichungssystem (71,35) ist nicht mehr vollständig. Man kommt dann zu einem vollständigen System, indem man voraussetzt, daß die Körper um ihre Schwerpunkte wie starre Körper rotieren. Das bedeutet, daß die Geschwindigkeitsverteilung im Inneren jedes Körpers die Form

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ji}^{(a)} (x_j - a_j) \tag{71,37}$$

hat, wo $\omega_{ji}^{(a)}$ der dreidimensionale, antisymmetrische Tensor der Winkelgeschwindigkeit des Körpers (a) ist. Lassen wir den Index (a) fort, so können wir für die Komponenten dieses Tensors auch schreiben

$$\omega_{23} = \omega_1; \quad \omega_{31} = \omega_2; \quad \omega_{12} = \omega_3. \tag{71,38}$$

Unter der Voraussetzung (71,37) erhält man ein vollständiges Gleichungssystem, wenn man zu (71,35) die Gleichungen hinzufügt, die die Änderung des Drehimpulses jedes Körpers beschreiben. Diese Gleichungen leiten wir im nächsten Paragraphen aus der Beziehung (70,29) ab.

§ 72 Die NEWTONschen Gleichungen für die Rotationsbewegung

Wir setzen

$$M_{ik}^{(a)} = \int_{(a)} \varrho\,[(x_i - a_i)\,v_k - (x_k - a_k)v_i](d\,x)^3. \tag{72,01}$$

Das ist offenbar der Drehimpuls des Körpers (a) in bezug auf seinen Schwerpunkt. Das Gesetz für die Änderung dieser Größe ergibt sich aus (70,29), wenn man die Terme, die sich auf den Bahndrehimpuls beziehen, abtrennt. Das geschieht mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{d}{dt}\left\{a_i \int_{(a)} \varrho v_k (dx)^3 - a_k \int_{(a)} \varrho v_i (dx)^3\right\} =$$

$$= a_i \int_{(a)} \varrho \frac{\partial U}{\partial x_k}(d\,x)^3 - a_k \int_{(a)} \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i}(d\,x)^3. \tag{72,02}$$

Diese ergibt sich aus den Bewegungsgleichungen (71,34) und der Formel (71,08), wonach gilt

$$\dot{a}_i \int_{(a)} \varrho v_k (d\,x)^3 - \dot{a}_k \int_{(a)} \varrho v_i (dx)^3 = 0. \tag{72,03}$$

Wir schreiben die Gleichung (70,29) noch einmal hin

$$\frac{d}{dt}\int_{(a)} \varrho\,(x_i v_k - x_k v_i)(d\,x)^3 = \int_{(a)} \varrho \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(d\,x)^3. \tag{72,04}$$

Subtrahieren wir davon die Beziehung (72,02), so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\int_{(a)} \varrho\,[(x_i - a_i)v_k - (x_k - a_k)v_i]\,(d\,x)^3 =$$

$$= \int_{(a)} \varrho\left[(x_i - a_i)\frac{\partial U}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right](d\,x)^3 \tag{72,05}$$

oder, mit der Bezeichnung (72,01),

$$\frac{d}{dt} M_{ik}^{(a)} = \int_{(a)} \varrho\left[(x_i - a_i)\frac{\partial U}{\partial x_k} - (x_k - a_k)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right](d\,x)^3. \tag{72,06}$$

Nun berechnen wir die Größe $M_{ik}^{(a)}$. Setzen wir in (72,01) den Ausdruck (71,37) für die Geschwindigkeit ein und benutzen die Bezeichnung (71,22) für den dreidimensionalen Tensor der Trägheitsmomente, so erhalten wir

$$M_{ik}^{(a)} = \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} - \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)}. \tag{72,07}$$

Ausführlicher geschrieben lauten diese Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} M_{23} &= (I_{22} + I_{33})\,\omega_{23} - I_{12}\omega_{31} - I_{13}\omega_{12}, \\ M_{31} &= -I_{12}\omega_{23} + (I_{33} + I_{11})\,\omega_{31} - I_{23}\omega_{12}, \\ M_{12} &= -I_{13}\omega_{23} - I_{23}\omega_{31} + (I_{11} + I_{22})\,\omega_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{72,08}$$

Dabei haben wir den oberen Index (a) der Kürze halber weggelassen. Diese Formeln, die aus der Mechanik des starren Körpers bekannt sind, verknüpfen den Drehimpuls mit der Winkelgeschwindigkeit.

Wir wollen jetzt die rechte Seite der Gleichung (72,06) berechnen, die offenbar das auf den Körper wirkende Drehmoment darstellt. Entsprechend der Zerlegung (71,10) des Potentials in einen inneren und einen äußeren Anteil betrachten wir zunächst das Moment der inneren Kräfte. Mit Hilfe der Beziehung (71,18) prüft man leicht nach, daß das Moment der inneren Kräfte verschwindet. Durch die gleiche Überlegung wie bei der Ableitung von (71,19) gelangt man nämlich zu der Gleichung

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(a)} \varrho \left\{ (x_i - a_i) \frac{\partial u_a}{\partial x_k} - (x_k - a_k) \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \right\} (d\,x)^3 = \\ &\qquad = \frac{1}{4\pi\gamma} \int\limits_{(\infty)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (x_i - a_i) q_{kj}^{(a)} - (x_k - a_k) q_{ij}^{(a)} \right\} (d\,x)^3 = 0. \end{aligned} \tag{72,09}$$

Nun muß noch das Moment der äußeren Kräfte berechnet werden. Mit Hilfe der Entwicklung (71,20), in der wir aber nur das konstante und das lineare Glied berücksichtigen, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(a)} \varrho \left[(x_i - a_i) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} - (x_k - a_k) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right] (dx)^3 = \\ &\qquad = I_{ij}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_k \partial x_j} \right)_a - I_{kj}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_a. \end{aligned} \tag{72,10}$$

In dem Ausdruck (71,27) für $U^{(a)}$, der in (72,10) einzusetzen ist, können wir uns auf seine erste Summe beschränken. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(a)} \varrho \left[(x_i - a_i) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k} - (x_k - a_k) \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right] (d\,x)^3 = \\ &\qquad = \sum_b{}' \gamma M_b \left\{ I_{ij}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_j} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} - I_{kj}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \right\}. \end{aligned} \tag{72,11}$$

Da nach (72,09) das Moment der äußeren Kräfte gleich dem gesamten Drehmoment ist, so können wir hier $U^{(a)}$ durch U ersetzen. Der Ausdruck (72,11) lie-

fert dann die rechte Seite der Gleichung (72,06), und wir können das Gesetz für die Änderung des Drehimpulses des Körpers (a) folgendermaßen schreiben[1])

$$\frac{d}{dt} M_{ik}^{(a)} = \sum_b{}' \gamma M_b \left\{ I_{ij}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_j} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} - I_{kj}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \right\}. \qquad (72,12)$$

Führen wir die expliziten Ausdrücke (71,31) für die zweiten Ableitungen ein, so können wir auch schreiben

$$\frac{d}{dt} M_{ik}^{(a)} = \sum_b{}' \frac{3\,\gamma M_b (a_j - b_j)}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^5} \left[(a_k - b_k) I_{ij}^{(a)} - (a_i - b_i) I_{kj}^{(a)} \right]. \qquad (72,13)$$

Diese Gleichungen ergänzen die oben abgeleiteten Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkte

$$M_a \ddot{a}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \qquad (72,14)$$

zu einem vollständigen System. Davon kann man sich auf verschiedene Weise überzeugen. Als Unbekannte, die die Bewegung jeder der Massen kennzeichnen, können wir die zwölf Größen

$$a_i, \quad I_{ij}^{(a)}, \quad \omega_{ij}^{(a)} \qquad (72,15)$$

ansehen [die Komponenten des Drehimpulses lassen sich durch sie nach den Formeln (72,07) ausdrücken]. Für diese Größen haben wir die drei Gleichungen (72,14) (Schwerpunktsbewegung), die drei Gleichungen (72,13) (Änderung des Drehimpulses) und weitere sechs Gleichungen

$$\frac{d I_{ik}^{(a)}}{dt} = \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} + \omega_{jk}^{(a)} I_{ij}^{(a)}, \qquad (72,16)$$

die für jeden Tensor gelten, dessen Komponenten in einem körperfesten Koordinatensystem konstant sind (die Ableitung geben wir weiter unten). Für die zwölf Unbekannten (72,15) haben wir also zwölf Gleichungen, so daß unser System vollständig ist.

Wir könnten auch anders vorgehen, indem wir für jeden Körper ein Koordinatensystem x_1^*, x_2^*, x_3^* einführen, das mit dem Körper zusammen rotiert [den oberen Index (a) haben wir der Einfachheit halber weggelassen]. Die α_{ri} seien die Richtungskosinus, die den Beziehungen

$$\alpha_{ri}\alpha_{rj} = \delta_{ij}; \qquad \alpha_{ri}\alpha_{si} = \delta_{rs} \qquad (72,17)$$

genügen. Dann können wir setzen

$$x_r^* = \alpha_{ri}(x_i - a_i); \qquad x_i - a_i = \alpha_{ri} x_r^*. \qquad (72,18)$$

---

[1]) Aus den EINSTEINschen Gleichungen wurde diese Gleichung zum ersten Mal (auf andere Weise) von KASCHKAROW [43] abgeleitet.

Die Ableitungen der Kosinus hängen mit den Komponenten der Winkelgeschwindigkeit folgendermaßen zusammen

$$\dot{\alpha}_{ri} = \alpha_{rj}\omega_{ji}; \qquad \omega_{ji} = \alpha_{rj}\dot{\alpha}_{ri}. \tag{72,19}$$

Nach bekannten Formeln aus der Kinematik eines starren Körpers lassen sich die neun Kosinus α_{ri} durch die drei EULERschen Winkel ϑ, φ und ψ ausdrücken. Für jede der Massen könnten wir also anstelle von (72,15) auch die sechs Größen

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \vartheta^{(a)},\, \varphi^{(a)},\, \psi^{(a)} \tag{72,20}$$

als unbekannte Funktionen benutzen und alle übrigen Größen, insbesondere die Größen (72,15), durch sie ausdrücken. So haben wir die Winkelgeschwindigkeit in (72,19) schon durch die Kosinus und ihre Ableitungen dargestellt. Die Trägheitsmomente lassen sich durch die Formeln

$$I_{ij} = \alpha_{ri}\alpha_{sj}I^*_{rs} \tag{72,21}$$

ausdrücken, wo I^*_{rs} die konstanten Werte der Komponenten dieses Tensors im körperfesten System sind. Für die sechs Größen (72,20), die sich jeweils auf eine der Massen beziehen, hätten wir die sechs Gleichungen (72,13) und (72,14); d. h. eine für die Vollständigkeit des Systems ausreichende Anzahl von Gleichungen.

Die hier durchgeführte Berechnung der Bewegungsgleichungen in der NEWTONschen Näherung setzt voraus, daß wir (abgesehen von relativistischen Korrekturen) Glieder von höherer Ordnung in der kleinen Größe L/R vernachlässigen dürfen. Sollten dagegen diese Glieder berücksichtigt werden, so müßten wir die Trägheitsmomente dritter und höherer Ordnung, zum Beispiel

$$I^{(a)}_{ikl} = \int\limits_{(a)} \varrho\,(x_i - a_i)(x_k - a_k)(x_l - a_l)(dx)^3, \tag{72,22}$$

betrachten. Dadurch würde aber die Vollständigkeit des Gleichungssystems nicht verletzt. Wir könnten nämlich die neu hinzukommenden Größen ebenfalls als Funktionen der EULERschen Winkel darstellen, etwa

$$I_{ikl} = \alpha_{ri}\alpha_{sk}\alpha_{ul}I^*_{rsu}, \tag{72,23}$$

wo die I^*_{rsu} konstant sind. Unbekannte Funktionen würden dann wie bisher die Größen (72,20) bleiben, so daß sich deren Anzahl nicht vergrößert. Bei der anderen Betrachtungsweise könnten wir die neu hinzukommenden Größen unter die unbekannten Funktionen aufnehmen und das Gleichungssystem entsprechend erweitern; zum Beispiel hätten wir für die Größen (72,22) die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}I^{(a)}_{ikl} = \omega^{(a)}_{ji}I^{(a)}_{jkl} + \omega^{(a)}_{jk}I^{(a)}_{ijl} + \omega^{(a)}_{jl}I^{(a)}_{ikj}. \tag{72,24}$$

Im allgemeinen Fall eines beliebigen dreidimensionalen Tensors $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, dessen Komponenten $A^*_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ in einem körperfesten Koordinatensystem konstant sind, gilt nämlich

$$\frac{d}{dt}A_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \omega_{j i_1}A_{j i_2 \ldots i_n} + \cdots + \omega_{j i_k}A_{i_1 \ldots i_{k-1} j i_{k+1} \ldots i_n} + \\ + \cdots + \omega_{j i_n}A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} j}. \tag{72,25}$$

Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus den Transformationsformeln

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \alpha_{r_1 i_1} \alpha_{r_2 i_2} \ldots \alpha_{r_n i_n} A^*_{r_1 r_2 \ldots r_n} \tag{72,26}$$

zusammen mit den Formeln (72,19).

Zum Schluß prüfen wir noch nach, ob das Gleichungssystem (72,13) und (72,14) dem Gesetz der Erhaltung der Energie genügt. Dazu führen wir die kinetische Energie der Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt

$$T_a = \frac{1}{2}\, \omega_{kj}^{(a)} \omega_{lj}^{(a)} I_{kl}^{(a)} = \frac{1}{4}\, M_{ik}^{(a)} \omega_{ik}^{(a)} \tag{72,27}$$

ein. Bei der Bildung der Ableitung von T_a nach der Zeit muß man beachten, daß wegen der Gleichungen (72,16) die Beziehung

$$\omega_{kj}^{(a)} \omega_{lj}^{(a)} \frac{d I_{kl}^{(a)}}{dt} = 0 \tag{72,28}$$

erfüllt ist, so daß bei der Differentiation von T_a die Größen $I_{kl}^{(a)}$ als konstant angesehen werden können. Damit erhalten wir leicht

$$\frac{d T_a}{dt} = \frac{1}{2}\, \omega_{ik}^{(a)} \frac{d M_{ik}^{(a)}}{dt}\,. \tag{72,29}$$

Setzen wir darin für die Ableitung von $M_{ik}^{(a)}$ den Ausdruck (72,12) ein und benutzen die Antisymmetrie von $\omega_{ik}^{(a)}$, so ergibt sich

$$\frac{d T_a}{dt} = \omega_{ik}^{(a)} \sum_b{}' \gamma M_b I_{ij}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \tag{72,30}$$

oder, wenn wir in j und k symmetrisieren und die Indizes umbenennen,

$$\frac{d T_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b{}' \gamma M_b \left(\omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} + \omega_{jk}^{(a)} I_{ij}^{(a)}\right) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \tag{72,31}$$

oder, wegen (72,16), schließlich

$$\frac{d T_a}{dt} = \frac{1}{2} \sum_b{}' \gamma M_b \frac{d I_{ik}^{(a)}}{dt} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}\,. \tag{72,32}$$

Wir erinnern an den Ausdruck (71,32) für die potentielle Energie

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \left\{ \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} + \frac{\gamma}{2} \left(M_a I_{ik}^{(b)} + M_b I_{ik}^{(a)}\right) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \right\}. \tag{72,33}$$

Die Größe Φ hängt über die Koordinaten a_i und die Trägheitsmomente $I_{ik}^{(a)}$ von der Zeit ab. Die letztere Abhängigkeit liefert in dem Ausdruck für die totale Ableitung von Φ nach der Zeit folgende Terme

$$\frac{d\Phi}{dt} - \sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \dot{a}_i = - \sum_a \frac{d T_a}{dt}, \tag{72,34}$$

wie man aus einem Vergleich von (72,33) mit (72,32) erkennt. Mit den Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkte der Massen erhalten wir daraus

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \Phi\right\} = 0 \tag{72,35}$$

und den Energieerhaltungssatz in der Form

$$\sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \Phi = E, \tag{72,36}$$

wo E die Energiekonstante ist. Wir bemerken, daß selbst bei einer sehr schnellen Rotation der Körper, bei der die Bahngeschwindigkeiten der Translation und der Rotation von der gleichen Ordnung sind, die Rotationsterme in der Energiebilanz (72,34) klein bleiben (von der Ordnung L/R gegenüber den Hauptermen), während sie in der integrierten Gleichung (72,36) von derselben Größenordnung wie die Hauptterme sind.

§ 73 Die innere Struktur der Körper. Die LIAPOUNOFFsche Gleichung

Die Gleichungen für die Translationsbewegung in Integralform haben wir am Ende von § 70 in zweiter Näherung gefunden. Wir wollen sie explizite hinschreiben. Setzen wir in die Bewegungsgleichungen (70,23) die Werte für die Komponenten des Massentensors eines elastischen Körpers (70,26) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \left\{\varrho v_i\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U\right) - \frac{1}{c^2} p_{ik} v_k\right\} (dx)^3 = \\ = \int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left\{\varrho + \frac{\varrho}{c^2}\left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U\right) - \frac{p_{kk}}{c^2}\right\}(dx) + \\ + \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) \varrho v_k (dx)^3 .\end{aligned} \tag{73,01}$$

Dabei genügt die Größe U^* nach (68,30) der Gleichung

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left\{\varrho + \frac{\varrho}{c^2}\left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U\right) - \frac{p_{kk}}{c^2}\right\}. \tag{73,02}$$

In erster Näherung stimmt U^* mit dem NEWTONschen Potential U überein. Wir müssen aber U^* in zweiter Näherung kennen, d. h. mit den Retardierungskorrekturen und unter Berücksichtigung der Zusatzglieder auf der rechten Seite von (73,02). Die Größen U_i jedoch, die den Gleichungen

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\varrho v_i \tag{73,03}$$

genügen, brauchen nur in erster Näherung bekannt zu sein.

Wie bereits in § 71 angedeutet, müssen wir, um aus (73,01) die relativistischen Bewegungsgleichungen in expliziter Form abzuleiten, die innere Struktur des Körpers in der NEWTONschen Näherung und damit die Gleichungen (71,03)

$$\varrho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - \varrho\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \tag{73,04}$$

betrachten. Wir beschränken uns auf den Fall, daß der Körper als Ganzes, d. h. wie ein starrer Körper rotiert. Die Geschwindigkeitsverteilung im Inneren des Körpers hat dann die Form [vgl. (71,37)]

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ji}(x_j - a_j) \tag{73,05}$$

[den Index (a) bei ω_{ji} haben wir weggelassen]. Für die Beschleunigung eines Teilchens im Inneren des Körpers

$$w_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{73,06}$$

ergibt sich daraus

$$w_i = \ddot{a}_i + (\dot{\omega}_{ji} - \omega_{ik}\omega_{jk})(x_j - a_j). \tag{73,07}$$

Wir zerlegen das in (73,04) auftretende NEWTONsche Potential U in den inneren Anteil (u_a) und den äußeren Anteil $(U^{(a)})$ und ersetzen das äußere Potential durch die ersten Glieder seiner TAYLOR-Entwicklung um den Punkt $x_j = a_j$. Für die Beschleunigung des Teilchens w_i setzen wir den Ausdruck (73,07) ein. Dann erhalten wir

$$\varrho\ddot{a}_i - \varrho\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a - \varrho\frac{\partial u_a}{\partial x_i} + \\ + \varrho\left[\dot{\omega}_{ji} - \omega_{ik}\omega_{jk} - \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a\right](x_j - a_i) = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \tag{73,08}$$

Darin schätzen wir die Größenordnung der verschiedenen Terme ab und behalten nur die Hauptterme bei. Aus den NEWTONschen Bewegungsgleichungen (71,35) folgert man leicht

$$\ddot{a}_i \sim \frac{q^2}{R}. \tag{73,09}$$

Von der gleichen Ordnung ist die im zweiten Term von (73,08) auftretende Größe $\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a$. Die Differenz dieser Größen aber ist klein. Vergleicht man (71,21) mit (71,33), so ergibt sich

$$\ddot{a}_i - \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a \sim \frac{q^2}{R} \frac{L^2}{R^2}. \tag{73,10}$$

(Für nahezu kugelförmige Massen ist diese Differenz noch kleiner, da ihr Wert durch die Verschiedenheit der Trägheitsmomente, und nicht durch diese Momente selbst bedingt wird.) Wir können deshalb annehmen, daß sich die ersten beiden Terme in (73,08) gegenseitig aufheben.

Wir schätzen nun die Terme in der eckigen Klammer ab. Der Hauptterm ist hier $\omega_{ik}\omega_{jk}$; er hat die Größenordnung des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit. Wir nehmen an, daß die Winkelgeschwindigkeit von der Ordnung

$$\omega \sim \frac{q}{L} \tag{73,11}$$

sei. Die Größenordnung der zeitlichen Ableitung der Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Gesetz für die Änderung des Drehimpulses. Man erhält unschwer die Abschätzung

$$\dot{\omega} \sim \frac{q^2}{R^2}. \tag{73,12}$$

Vergleichen wir das mit der Abschätzung für ω, so ergibt sich

$$\dot{\omega} \sim \omega^2 \frac{L^2}{R^2}. \tag{73,13}$$

Weiter ist die zweite Ableitung des äußeren Potentials nach den Koordinaten von der Ordnung

$$\left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a \sim \frac{q^2}{R^2}, \tag{73,14}$$

d. h. von der gleichen Ordnung wie $\dot{\omega}$. Vernachlässigen wir Größen dieser Ordnung[1]), so bleibt in der eckigen Klammer nur noch der Term $\omega_{ik}\,\omega_{jk}$ übrig. Nach diesen Vereinfachungen können wir die „inneren" Bewegungsgleichungen (73,08) in der Form

$$\varrho \left\{\frac{\partial u_a}{\partial x_i} + \omega_{ik}\omega_{jk}(x_j - a_j)\right\} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{73,15}$$

schreiben.

Wir setzen

$$u_a + \frac{1}{2}\omega_{ik}\omega_{jk}(x_i - a_i)(x_j - a_j) = V_a. \tag{73,16}$$

---

[1]) Eine solche Vernachlässigung wird nur in den Gleichungen für das innere Problem gemacht [vgl. (80,13)].

Das ist das Gravitationspotential, vermehrt um das Potential der Zentrifugalkräfte. Die Gleichung (73,15) läßt sich dann schreiben

$$\varrho \frac{\partial V_a}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{73,17}$$

Diese Gleichung kann man durch die Annahme erfüllen, daß der Tensor der Spannungen innerhalb des Körpers p_{ik} sich auf einen isotropen Druck p zurückführen läßt

$$p_{ik} = -p\,\delta_{ik} \tag{73,18}$$

(eine Flüssigkeit genügt dieser Bedingung stets). Würden wir in (73,08) die Größen $\dot{\omega}_{ji}$ nicht vernachlässigen, so müßten wir auch die nichtdiagonalen Elemente des Spannungstensors p_{ik} betrachten. Offensichtlich wird nämlich eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Rotation eines elastischen Körpers in ihm Spannungen hervorrufen, die sich nicht auf einen isotropen Druck reduzieren.

Unter der Bedingung (73,18) geht die Gleichung (73,17) in folgende über

$$\varrho \frac{\partial V_a}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{73,19}$$

Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_k}\frac{\partial V_a}{\partial x_i} - \frac{\partial \varrho}{\partial x_i}\frac{\partial V_a}{\partial x_k} = 0, \tag{73,20}$$

die zeigt, daß zwischen V_a und ϱ eine Abhängigkeit bestehen muß, die die Koordinaten nicht enthält. Wenn also ϱ eine Funktion eines einzigen Parameters α ist, so muß auch V_a eine Funktion dieses Parameters sein

$$\varrho = \varrho(\alpha); \qquad V_a = V_a(\alpha). \tag{73,21}$$

Das innere Potential u_a ist ein Funktional von ϱ; setzen wir seinen expliziten Ausdruck in (73,16) ein, so erhalten wir

$$\gamma \int\limits_{(a)} \frac{\varrho'(dx')^3}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} + \frac{1}{2}\omega_{ik}\omega_{jk}(x_i - a_i)(x_j - a_j) = V_a. \tag{73,22}$$

Die Aufgabe besteht dann darin, bei gegebener Dichte ϱ die Form des Körpers, d. h. die Form des Integrationsgebietes (a) zu finden. Diese Form muß so beschaffen sein, daß in jedem Punkt im Inneren des Körpers die Bedingung (73,21) erfüllt ist, d.h., daß der Wert der linken Seite von (73,22) nur von der Dichte (oder von dem Parameter, von dem die Dichte abhängt) abhängig ist. Auf der Oberfläche des Körpers muß insbesondere $\alpha = \text{const}$ und $V_a = \text{const}$ sein.

Rotiert der Körper nicht ($\omega_{ik} = 0$), so genügen eine kugelsymmetrische Dichteverteilung und eine Kugelform des Körpers offenbar allen Bedingungen.

Im Fall einer Rotation ($\omega_{ik} \neq 0$) dagegen ist die Bestimmung der Form des Körpers ein äußerst schwieriges mathematisches Problem, mit dem sich schon viele Mathematiker beschäftigt haben. Die vollständigsten Ergebnisse erhielt LIAPOUNOFF, der für eine rotierende inhomogene Flüssigkeit Gleichgewichtsfiguren untersuchte, die Ellipsoiden benachbart sind; dabei behandelte er auch die Frage ihrer Stabilität [23], [24]. Wir werden deshalb die Gleichung (73,22) LIAPOUNOFFsche Gleichung nennen.

Sind die Bedingungen (73,20) oder (73,21) erfüllt, so kann man den Druck p aus der Gleichung

$$dp = \varrho dV_a \tag{73,23}$$

oder

$$p = \int^{\alpha} \varrho(\alpha) \frac{dV_a}{d\alpha} d\alpha \tag{73,24}$$

erhalten. Die additive Konstante bestimmen wir aus der Bedingung, daß der Druck an der Oberfläche des Körpers verschwindet.

In den Ausdruck für den Massentensor und die Gleichungen (73,01) und (73,02) geht die elastische Energie der Masseneinheit Π ein, die sich nach (30,11) aus der Formel

$$\Pi = \int^{p} \frac{dp}{\varrho} - \frac{p}{\varrho} \tag{73,25}$$

bestimmt. Dabei ergibt das Integral wegen (73,23) einfach V_a oder eine Größe, die sich von V_a um eine Konstante unterscheidet. Diese Konstante kann man so bestimmen, daß

$$p = \varrho(V_a - \Pi) \tag{73,26}$$

wird. Diesen Ausdruck werden wir bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Integralbeziehungen (73,01) benutzen.

§ 74 Die Berechnung einiger Integrale, die die innere Struktur des Körpers kennzeichnen

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Integralbeziehungen (73,01) muß man eine Reihe von Integralen berechnen, deren Wert von der Dichteverteilung im Inneren des Körpers und allgemein von dessen innerer Struktur abhängt. Um die weiteren Ausführungen dann nicht zu unterbrechen, soll die Berechnung dieser Integrale in diesem Paragraphen durchgeführt werden.

Wir beginnen mit den Integralen, die von den Trägheitsmomenten des Körpers und von seiner Winkelgeschwindigkeit abhängen. Mit Ω_a bezeichnen wir das Potential der Zentrifugalkräfte

$$\Omega_a = \frac{1}{2} \omega_{ik}^{(a)} \omega_{jk}^{(a)} (x_i - a_i)(x_j - a_j). \tag{74,01}$$

Damit lautet die LIAPOUNOFFsche Gleichung (73,16)

$$u_a + \Omega_a = V_a. \tag{74,02}$$

Wir betrachten das Integral

$$T_a = \int \varrho \Omega_a (dx)^3. \tag{74,03}$$

Wir haben offenbar

$$T_a = \frac{1}{2} \omega_{ik}^{(a)} \omega_{jk}^{(a)} I_{ij}^{(a)}, \tag{74,04}$$

so daß T_a die kinetische Energie der Rotation des Körpers (a) ist. Wir betrachten auch die Momente erster Ordnung mit der Gewichtsfunktion $\varrho \Omega_a$, d. h. die Größen

$$T_{ai} = \int \varrho \Omega_a (x_i - a_i) (dx)^3. \tag{74,05}$$

Mit der Bezeichnung (72,22) können wir schreiben

$$T_{ai} = \frac{1}{2} \omega_{kj}^{(a)} \omega_{lj}^{(a)} I_{ikl}^{(a)}. \tag{74,06}$$

Diese Größen verschwinden, wenn der Körper drei Symmetrieebenen besitzt.

Nun betrachten wir das Integral

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2} \int \varrho u_a (dx)^3, \tag{74,07}$$

das die Energie der gegenseitigen Anziehung der Teilchen des Körpers (mit dem umgekehrten Vorzeichen) darstellt, und auch die Momente erster Ordnung

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{2} \int \varrho u_a (x_i - a_i) (dx)^3. \tag{74,08}$$

Auf Grund der POISSON-Gleichung (71,12) können wir die Größe ε_a in der Form

$$\varepsilon_a = \frac{1}{8\pi\gamma} \int\limits_{(\infty)} (\operatorname{grad} u_a)^2 (dx)^3 \tag{74,09}$$

darstellen. Entsprechend lassen sich auch die Momente ε_{ai} umformen, und zwar ist

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{8\pi\gamma} \int\limits_{(\infty)} (\operatorname{grad} u_a)^2 (x_i - a_i) (dx)^3. \tag{74,10}$$

Wir erinnern an die Definition (71,16) der Größen $q_{ik}^{(a)}$

$$q_{ik}^{(a)} = \frac{1}{2} \delta_{ik} (\operatorname{grad} u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_k} \tag{74,11}$$

und damit

$$q_{kk}^{(a)} = \frac{1}{2} (\text{grad } u_a)^2. \tag{74,12}$$

Wir können also statt (74,09) und (74,10) schreiben

$$\varepsilon_a = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{(\infty)} q_{kk}^{(a)} (d x)^3, \tag{74,13}$$

$$\varepsilon_{ai} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{(\infty)} q_{kk}^{(a)} (x_i - a_i)(d x)^3. \tag{74,14}$$

Das sind Spezialfälle der allgemeineren Integrale

$$B_{kl}^{(a)} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{(\infty)} q_{kl}^{(a)} (d x)^3, \tag{74,15}$$

$$B_{i,\,kl}^{(a)} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{(\infty)} q_{kl}^{(a)} (x_i - a_i)(d x)^3. \tag{74,16}$$

Außer den oben betrachteten Integralen

$$\varepsilon_a = B_{kk}^{(a)}; \qquad \varepsilon_{ai} = B_{i,\,kk}^{(a)} \tag{74,17}$$

kann man durch die Größen (74,15) und (74,16) auch andere Integrale ausdrücken, die wir im folgenden brauchen werden.

Wir betrachten das Volumenintegral des Druckes p

$$I = \int p (d x)^3. \tag{74,18}$$

Da der Druck außerhalb der Masse verschwindet, erhalten wir durch partielle Integration

$$3 I = - \int_{(a)} (x_i - a_i) \frac{\partial p}{\partial x_i} (d x)^3. \tag{74,19}$$

Auf Grund der Beziehung (73,19) können wir auch schreiben

$$3 I = - \int_{(a)} (x_i - a_i) \varrho \frac{\partial V_a}{\partial x_i} (d x)^3. \tag{74,20}$$

Nun folgt aus der LIAPOUNOFFschen Gleichung, da Ω_a eine homogene, quadratische Funktion der Differenzen $x_i - a_i$ ist,

$$(x_i - a_i) \frac{\partial V_a}{\partial x_i} = (x_i - a_i) \frac{\partial u_a}{\partial x_i} + 2 \Omega_a. \tag{74,21}$$

Andererseits gilt nach (71,18)

$$\varrho \frac{\partial u_a}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k}. \tag{74,22}$$

Setzen wir (74,21) in (74,20) ein und benutzen (74,22), so ergibt sich

$$3I = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int (x_i - a_i) \frac{\partial q_{ik}^{(a)}}{\partial x_k} (dx)^3 - 2 \int \varrho \Omega_a (dx)^3. \tag{74,23}$$

Durch partielle Integration und mit den Ausdrücken (74,03) und (74,13) für T_a und ε_a erhalten wir schließlich

$$3 \int_{(a)} p(dx)^3 = \varepsilon_a - 2T_a. \tag{74,24}$$

Diese Formel zeigt, daß bei einem rotierenden Körper der mittlere Druck im Inneren kleiner ist als bei einem nichtrotierenden, aber sonst gleichbeschaffenen Körper ist; das war auch zu erwarten.

Analog erhält man die Beziehung

$$2 \int_{(a)} p\,(x_i - a_i)(dx)^3 = \eta_{ai} - \dot{T}_{ai} \tag{74,25}$$

mit

$$\eta_{ai} = \frac{1}{8\pi\gamma} \int_{\infty} \left\{(x_k - a_k)\, q_{ik}^{(a)} + (x_i - a_i)\, q_{kk}^{(a)}\right\} (dx)^3 \tag{74,26}$$

oder, mit der Bezeichnung (74,16),

$$\eta_{ai} = \frac{1}{2}\left(B_{k,ik}^{(a)} + B_{i,kk}^{(a)}\right). \tag{74,27}$$

Die Formeln (74,15) und (74,16) stellen die Größen $B_{kl}^{(a)}$ und $B_{i,kl}^{(a)}$ als Integrale über den ganzen unendlichen Raum dar; man kann sie aber auch als Integrale über das von der Masse (a) erfüllte Volumen darstellen. Für diese Umformung führen wir eine Funktion w_a ein, die durch die Gleichung

$$w_a = \frac{\gamma}{2} \int_{(a)} \varrho' \,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|\, (dx')^3 \tag{74,28}$$

definiert ist; danach gilt

$$\Delta w_a = u_a. \tag{74,29}$$

Es läßt sich dann leicht die Gleichung

$$\frac{1}{4\pi\gamma} \int_{(\infty)} \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_k} (dx)^3 = \int_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (dx)^3 \tag{74,30}$$

beweisen, woraus wegen (74,11) folgt

$$B_{ik}^{(a)} = \int_{(a)} \varrho \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \Delta w_a - \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} \right) (d\,x)^3. \tag{74,31}$$

Darin wird das Integral nur noch über das Volumen der Masse (a) erstreckt. Setzen wir in (74,31) den Ausdruck (74,28) für w_a ein und führen die Differentiation aus, so können wir auch schreiben

$$B_{ik}^{(a)} = \frac{\gamma}{2} \iint_{(a)} \varrho \varrho' \frac{(x_i - x_i')(x_k - x_k')}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|^3} (d\,x)^3 (d\,x')^3. \tag{74,32}$$

Analog zur Formel (74,31), die man in der Form

$$\int_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (d\,x)^3 = \varepsilon_a \delta_{ik} - B_{ik}^{(a)} \tag{74,33}$$

schreiben kann, läßt sich auch die Formel

$$\int_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (x_j - a_j)(d\,x)^3 = \varepsilon_{aj} \delta_{ik} - B_{j,ik}^{(a)} \tag{74,34}$$

beweisen. Diese Beziehungen werden im folgenden ebenfalls gebraucht.

Zum Schluß bemerken wir, daß man auf Grund der Gleichungen (74,22) und der Bewegungsgleichungen (73,04) die durch $4\pi\gamma$ dividierte Größe $q_{ik}^{(a)}$ im Rahmen der NEWTONschen Theorie als Spannungstensor des Gravitationsfeldes der Masse (a) deuten kann.

§ 75 Umformung der Bewegungsgleichungen in der Integralform

Wir gehen von der am Anfang von § 73 angegebenen Integralform der Bewegungsgleichungen aus. Diese Gleichungen schreiben wir noch einmal hin und berücksichtigen, daß sich die Spannungen nach (73,18) auf den isotropen Druck p reduzieren. Es wird dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(a)} \left\{ \varrho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3\,U \right) \right] + \frac{1}{c^2} p v_i \right\} (d\,x)^3 = \\ = \int_{(a)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) \left[\varrho + \frac{\varrho}{c^2} \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) + \frac{3\,p}{c^2} \right] (d\,x)^3 + \\ + \frac{4}{c^2} \int_{(a)} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \varrho v_k (d\,x)^3, \end{aligned} \tag{75,01}$$

wobei gilt

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left[\varrho + \frac{\varrho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + \frac{3p}{c^2}\right], \tag{75,02}$$

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\varrho v_i. \tag{75,03}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sigma = \varrho + \frac{\varrho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + \frac{3p}{c^2}, \tag{75,04}$$

so können wir statt (75,02) schreiben

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma. \tag{75,05}$$

Unter Vernachlässigung kleiner Größen erhalten wir aus (75,01)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\left\{\varrho v_i\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{1}{c^2}pv_i\right\}(dx)^3 = \\ = \int\limits_{(a)}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 + \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\varrho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)(dx)^3 - \\ - \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\varrho v_k\frac{\partial U_k}{\partial x_i}(dx)^3.\end{aligned} \tag{75,06}$$

Wir bemerken zunächst, daß

$$\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)}\varrho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)(dx)^3 = \frac{4}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\varrho U_i(dx^3) \tag{75,07}$$

ist, so daß man diesen Term auf die linke Seite bringen und unter die zeitliche Ableitung setzen kann.

Wir betrachten nun den ersten Term auf der rechten Seite von (75,06); er ist eine Verallgemeinerung des in § 71 berechneten Ausdruckes (71,11), der der NEWTONschen Näherung entspricht. Zerlegen wir das Potential U^* analog zu (71,10) in einen inneren und einen äußeren Anteil

$$U^* = u_a^* + U^{*(a)}, \tag{75,08}$$

so erhalten wir

$$\int\limits_{(a)}\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 = \int\limits_{(a)}\frac{\partial u_a^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 + \int\limits_{(a)}\frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i}\sigma(dx)^3. \tag{75,09}$$

In der NEWTONschen Näherung würde der erste Term rechts als Resultierende der inneren Gravitationskräfte nach (71,19) verschwinden. In der relativistischen

Näherung dagegen, in der die POISSON-Gleichung durch die Gleichung (75,05) ersetzt werden muß, gilt das infolge der Retardierung nicht mehr. Setzen wir in das betrachtete Integral die Größe σ aus der Gleichung

$$\Delta u_a^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_a^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma \tag{75,10}$$

ein, die im Inneren der Masse (a) erfüllt ist, und berücksichtigen, daß das Integral über den Term, der den LAPLACE-Operator enthält, verschwindet, so erhalten wir

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2}\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_a^*}{\partial t^2}(dx)^3 \tag{75,11}$$

oder

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i}\frac{\partial u^*}{\partial t}(dx)^3, \tag{75,12}$$

denn es ist

$$\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial^2 u_a^*}{\partial x_i\partial t}\frac{\partial u_a^*}{\partial t}(dx)^3 = 0. \tag{75,13}$$

Auf Grund des kleinen Faktors vor dem Integral können wir auf der rechten Seite von (75,12) die Größe u_a^* durch das NEWTONsche Potential u_a ersetzen, also für die Formel (75,12) schreiben

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 = \frac{1}{4\pi\gamma c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_a}{\partial t}(dx)^3. \tag{75,14}$$

Führen wir nach (74,28) die Größe w_a ein, die mit u_a durch die Beziehung

$$\Delta w_a = u_a \tag{75,15}$$

zusammenhängt, so können wir das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (75,14) umformen und diese Gleichung folgendermaßen schreiben

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial u_a^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\partial t}(dx)^3. \tag{75,16}$$

Diese letzte Formel könnte man auch auf direktem Wege ableiten, indem man in das Integral auf der linken Seite die Näherungslösung der Gleichung (75,10) einsetzt.

Den ersten Term auf der rechten Seite von (75,06) kann man also folgendermaßen darstellen

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i}\sigma(dx)^3 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i\partial t}(dx)^3. \tag{75,17}$$

Das wollen wir noch weiter umformen. Dazu führen wir die Funktion

$$W = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_{(\infty)} \varrho' \, |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| \, (d\,x')^3 \tag{75,18}$$

ein, die eine Lösung der Gleichung

$$\Delta W = U \tag{75,19}$$

darstellt, wobei U das NEWTONsche Potential ist. Durch einen Vergleich von (74,28) mit (75,18) ergibt sich

$$W = \sum_{(a)} w_a, \tag{75,20}$$

ebenso wie das NEWTONsche Potential eine Summe der Potentiale der einzelnen Massen ist:

$$U = \sum_{(a)} u_a. \tag{75,21}$$

Der Zerlegung (71,10) des NEWTONschen Potentials in einen inneren und einen äußeren Anteil entspricht die Zerlegung

$$W = w_a + W^{(a)}. \tag{75,22}$$

Damit können wir statt (75,17) schreiben

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma\,(d\,x)^3 = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i}\sigma\,(d\,x)^3 - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t}(d\,x)^3 + \\ + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}(d\,x)^3. \tag{75,23}$$

Eine Wiederholung der Überlegungen, die uns auf die Formel (75,16) führten, für die Gesamtheit aller betrachteten Massen, liefert die Formel

$$\int\limits_{(\infty)} \frac{\partial U^*}{\partial x_i}\sigma\,(d\,x)^3 = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(\infty)} \varrho\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}(d\,x)^3. \tag{75,24}$$

Daraus folgt

$$\sum_{a}\left\{\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i}\sigma\,(d\,x)^3 - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho\,\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t}(d\,x)^3\right\} = 0. \tag{75,25}$$

Nun betrachten wir den letzten Term der Gleichung (75,06). Zerlegen wir das „Vektorpotential" U_k in einen inneren und einen äußeren Anteil

$$U_k = u_{ak} + U_k^{(a)}, \tag{75,26}$$

so können wir ebenso wie oben (vgl. §71) schließen, daß auf Grund der POISSON-Gleichung (75,03) die Beziehung

$$\int\limits_{(a)} \varrho v_k \frac{\partial u_{ak}}{\partial x_i} (dx)^3 = 0 \tag{75,27}$$

erfüllt ist. Folglich kann man den letzten Term in (75,06) schreiben

$$-\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} (dx)^3 = -\frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 . \tag{75,28}$$

Dabei ist

$$\int\limits_{(\infty)} \varrho v_k \frac{\partial U_k}{\partial x_i} (dx)^3 = 0. \tag{75,29}$$

Wir haben alle Terme auf der rechten Seite von (75,06) betrachtet. Von diesen bringen wir den Ausdruck (75,07) und den letzten Term auf der rechten Seite von (75,23), die beide die Form einer zeitlichen Ableitung haben, nach links, wodurch die Bewegungsgleichungen (75,06) die Form

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai} \tag{75,30}$$

annehmen. Dabei ist

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} \left\{ \varrho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U\right)\right] + \frac{1}{c^2} p v_i - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{c^2} \varrho U_i - \frac{1}{c^2} \varrho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} \right\} (dx)^3 \tag{75,31}$$

und

$$F_{ai} = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 - \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3. \tag{75,32}$$

Auf Grund der Gleichungen (75,25)—(75,29) gilt

$$\sum_{(a)} F_{ai} = 0 \tag{75,33}$$

und folglich

$$\sum_{(a)} P_{ai} \equiv P_i = \text{const}. \tag{75,34}$$

Die Größen P_{ai} kann man in Analogie zur NEWTONschen Mechanik als die Komponenten des Impulses der Masse (a) deuten. Dann sind die Größen F_{ai} die Komponenten der Kraft, die auf diese Masse wirkt. Diese Deutung, die in der NEWTONschen Näherung ganz natürlich ist, erscheint allerdings jetzt etwas künstlich, da der Impuls P_{ai} nach (75,31) nicht nur von der inneren Struktur des Körpers und seiner Geschwindigkeit, sondern auch von den Potentialen U, U_i und W abhängt.

In dem Ausdruck (75,31) für P_{ai} wollen wir die Terme abtrennen, die nur von der inneren Struktur abhängen. Aus den Gleichungen

$$\Delta u_a = -4\pi\gamma\varrho; \qquad \Delta u_{ai} = -4\pi\gamma\varrho v_i, \tag{75,35}$$

denen die Größen u_a und u_{ai} im Inneren der Masse (a) genügen, ergibt sich die Beziehung

$$\int\limits_{(a)} \varrho v_i u_a (dx)^3 = \int\limits_{(a)} \varrho u_{ai} (dx)^3. \tag{75,36}$$

Mit dieser Gleichung können wir den Ausdruck für P_{ai} in der Form

$$P_{ai} = \int\limits_{(a)} \left\{\varrho v_i + \frac{1}{c^2}\varrho v_i\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - u_a\right) + \frac{1}{c^2}p v_i - \frac{\varrho}{c^2}\frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t}\right\}(dx)^3 +$$
$$+ \frac{3}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho v_i U^{(a)} (dx)^3 - \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho U_i^{(a)} (dx)^3 - \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t}(dx)^3 \tag{75,37}$$

schreiben. Darin hängt das erste Integral nur von der Bewegung und der inneren Struktur des Körpers (a) ab, während die übrigen drei Integrale auch von den Potentialen des äußeren Feldes, d. h. von der Wechselwirkung des Körpers (a) mit den anderen Körpern abhängen. Die Berechnung dieser Integrale führen wir im nächsten Paragraphen durch.

§ 76 Die Berechnung des Impulses in zweiter Näherung

Im vorigen Paragraphen haben wir die Bewegungsgleichungen auf die Form

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai} \tag{76,01}$$

gebracht, wobei der Impuls P_{ai} und die Kraft F_{ai} als Integrale der Form (75,31) und (75,32) ausgedrückt wurden. Diese Integrale müssen wir nun berechnen und durch die Parameter ausdrücken, die die Bewegung der Körper als Ganzes kennzeichnen.

Zur Berechnung von P_{ai} benutzen wir seine Darstellung in der Form (75,37). Entsprechend der Zerlegung des Impulses in den „eigenen“ Anteil des betrachteten Körpers (a) und in den von der Wechselwirkung herrührenden Anteil schreiben wir

$$P_{ai} = (P_{ai})_{\text{eig.}} + (P_{ai})_{\text{wechs.}}, \tag{76,02}$$

$$(P_{ai})_{\text{eig.}} = \int\limits_{(a)} \varrho v_i (dx)^3 + \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} v_i\left(\frac{\varrho}{2}v^2 + \varrho\Pi - \varrho u_a + p\right)(dx)^3 -$$
$$- \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t}(dx)^3, \tag{76,03}$$

$$(P_{ai})_{\text{wechs.}} = \frac{3}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho v_i U^{(a)} (dx)^3 - \frac{4}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho U_i^{(a)} (dx) - \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t}(dx)^3. \tag{76,04}$$

Zuerst berechnen wir die in (76,03) auftretenden Integrale. Das erste von ihnen liefert den Impuls in der NEWTONschen Näherung; es hat den Wert

$$\int_{(a)} \varrho v_i (dx)^3 = M_a \dot{a}_i \tag{76,05}$$

in Übereinstimmung mit (71,08). Zur Berechnung des zweiten Integrals beachten wir die aus (73,26) und (74,02) folgende Beziehung

$$\varrho \Pi - \varrho u_a + p = \varrho \Omega_a \tag{76,06}$$

und die Formel

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \dot{a}_k^2 + \dot{a}_k \omega_{jk}^{(a)} (x_j - a_j) + \Omega_a, \tag{76,07}$$

die sich aus dem Ausdruck

$$v_i = \dot{a}_i + \omega_{ji}^{(a)} (x_j - a_j) \tag{76,08}$$

für die Geschwindigkeit im Inneren des Körpers (a) ergibt. Das zweite Integral hat den Wert

$$\int_{(a)} \varrho v_i \left(\frac{1}{2} v^2 + \Omega_a\right) (dx)^3 =$$
$$= \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_k^2\right) \dot{a}_i + 2 T_a \dot{a}_i + \omega_{ri}^{(a)} \omega_{sk}^{(a)} I_{rs}^{(a)} \dot{a}_k + 2 \omega_{ji}^{(a)} T_{aj}, \tag{76,09}$$

wobei wir die Bezeichnungen (74,03) und (74,05) benutzt haben. Das letzte Integral in (76,03) läßt sich auf folgende Form bringen

$$-\int_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 = \int_{(a)} \varrho v_k \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial x_k} (dx)^3. \tag{76,10}$$

Mit den Formeln (74,33) und (74,34) erhalten wir dann

$$-\int_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 w_a}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 = \varepsilon_a \dot{a}_i - B_{ik}^{(a)} \dot{a}_k + \omega_{ji}^{(a)} \varepsilon_{aj} - \omega_{jk}^{(a)} B_{j,ik}^{(a)}. \tag{76,11}$$

Nun fassen wir alle drei Integrale zusammen und führen folgende Bezeichnungen ein

$$Z_{ik}^{(a)} = (2 T_a + \varepsilon_a) \delta_{ik} + \omega_{ri}^{(a)} \omega_{sk}^{(a)} I_{rs}^{(a)} - B_{jk}^{(a)}, \tag{76,12}$$

$$Z_i^{(a)} = 2 \omega_{ji}^{(a)} T_{aj} + \omega_{ji}^{(a)} \varepsilon_{aj} - \omega_{jk}^{(a)} B_{j,ik}^{(a)}. \tag{76,13}$$

Dann erhalten wir für den „Eigenanteil" des Impulses den Ausdruck

$$(P_{ai})_{\text{eig.}} = M_a \dot{a}_i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_k^2\right) \dot{a}_i + \frac{1}{c^2} \left(Z_{ik}^{(a)} \dot{a}_k + Z_i^{(a)}\right). \tag{76,14}$$

Darin ist der erste Term, wie schon erwähnt, der NEWTONsche Ausdruck für den Impuls. Der zweite Term liefert den aus der Punktmechanik bekannten Zusatz. Der letzte Term läßt sich auf Grund des Begriffes des Tensors der effektiven Masse deuten (dieser Tensor ist durch die Matrix der Koeffizienten der Komponenten der Geschwindigkeit in dem Ausdruck für die Impulskomponenten gegeben).

Setzen wir

$$K = \sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \frac{1}{c^2} \sum_a \left[\frac{1}{8} M_a (\dot{a}_k^2)^2 + \frac{1}{2} Z_{ik}^{(a)} \dot{a}_i \dot{a}_k + Z_i^{(a)} \dot{a}_i\right], \quad (76,15)$$

so erhalten wir offensichtlich

$$(P_{ai})_{\text{eig.}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{a}_i}. \quad (76,16)$$

Diese Gleichung legt die Größe K bis auf eine Funktion fest, die nicht von den $\dot{a}_i$ abhängt. Wir haben in (76,15) die Terme $\sum_a T_a$ hinzugefügt, damit die Größe K in der nichtrelativistischen Näherung in den gewöhnlichen Ausdruck für die kinetische Energie eines Systems von Körpern übergeht.

Wir bemerken, daß für nichtrotierende, kugelsymmetrische Körper gilt

$$B_{ik}^{\prime(a)} = \frac{1}{3} \varepsilon_a \delta_{ik}; \qquad Z_{ik}^{(a)} = \frac{2}{3} \varepsilon_a \delta_{ik}; \qquad Z_i^{(a)} = 0. \quad (76,17)$$

Führen wir die effektive Masse

$$m_a = M_a + \frac{2}{3c^2} \varepsilon_a \quad (76,18)$$

ein, so erhalten wir also, bis auf kleine Größen,

$$K = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{a}_i^2 + \frac{1}{c^2} \sum_a \frac{1}{8} m_a (\dot{a}_k^2)^2, \quad (76,19)$$

genau wie für Massenpunkte. Die Formel (76,18) zeigt, daß sich der Tensor der effektiven Masse im betrachteten Fall auf einen Skalar reduziert.

Wir gehen nun zur Berechnung des Teiles des Impulses über, der von der Wechselwirkung abhängig ist. Zunächst schätzen wir die Größenordnung dieses Anteiles ab. Man sieht leicht, daß alle drei Terme in (76,04) von der gleichen Größenordnung sind, und zwar ist

$$(P_{ai})_{\text{wechs.}} = O\left(M \frac{q^3}{c^2}\right), \quad (76,20)$$

wobei q die schon mehrfach benutzte Größe von der Ordnung der Geschwindigkeit ist. Bei der Berechnung der Integrale in (76,04) berücksichtigen wir neben den Haupttermen, die von der erwähnten Ordnung sind, auch noch Glieder von der Ordnung L/R gegenüber den Haupttermen; Glieder höherer Ordnung in L/R sollen vernachlässigt werden.

Zur Berechnung der Integrale mit der erforderlichen Genauigkeit genügt in dem Ausdruck (71,27) für das NEWTONsche Potential das erste Glied; wir können also schreiben

$$U^{(a)}(\mathfrak{r}) = \sum_b{}' \frac{\gamma M_b}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|}. \tag{76,21}$$

In dem Ausdruck

$$U_i^{(a)}(\mathfrak{r}) = \sum_b{}' \gamma \int\limits_{(b)} \varrho' v'_i \frac{(d x')^3}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \tag{76,22}$$

für das Vektorpotential müssen wir neben dem Hauptglied noch ein weiteres berücksichtigen. Mit der Formel (71,25) erhalten wir

$$U_i^{(a)}(\mathfrak{r}) = \sum_b{}' \frac{\gamma M_b \dot{b}_i}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|} - \sum_b{}' \gamma \omega_{ri}^{(b)} I_{rk}^{(b)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|}. \tag{76,23}$$

Schließlich ist die Funktion

$$W^{(a)}(\mathfrak{r}) = \sum_b{}' \frac{1}{2} \gamma \int\limits_{(b)} \varrho' |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| (dx')^3 \tag{76,24}$$

mit der erforderlichen Genauigkeit gleich

$$W^{(a)}(\mathfrak{r}) = \frac{1}{2} \sum_b{}' \gamma M_b |\mathfrak{r} - \mathfrak{b}| + \frac{1}{4} \sum_b{}' \gamma I_{jk}^{(b)} \frac{\partial^2 |\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|}{\partial x_j \partial x_k}. \tag{76,25}$$

Wir haben hier neben dem Hauptglied noch ein weiteres behalten, damit in dem Ausdruck für die zeitliche Ableitung von $W^{(a)}$ die entsprechende Genauigkeit gewährleistet ist.

Setzen wir in das erste der Integrale (76,04) die TAYLOR-Entwicklung von $U^{(a)}(\mathfrak{r})$ an der Stelle $x_k = a_k$

$$U^{(a)}(\mathfrak{r}) = U^{(a)}(\mathfrak{a}) + (x_k - a_k) \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k}\right)_a + \cdots \tag{76,26}$$

ein, so ergibt sich

$$3 \int\limits_{(a)} \varrho v_i U^{(a)}(\mathfrak{r}) (d x)^3 = 3 M_a \dot{a}_i U^{(a)}(\mathfrak{a}) + 3 \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_k}\right)_a. \tag{76,27}$$

Hierin muß man den Ausdruck für das NEWTONsche Potential der äußeren Massen aus (76,21) einsetzen. Dann erhält man

$$3\int\limits_{(a)} \varrho v_i U^{(a)}(\mathfrak{r})(dx)^3 = \sum_b{}' \frac{3\gamma M_a M_b \dot{a}_i}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} + \sum_b{}' 3\gamma M_b \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}. \quad (76,28)$$

Analog läßt sich auch das zweite Integral in (76,04) berechnen. Wir finden

$$-4\int\limits_{(a)} \varrho U_i^{(a)}(\mathfrak{r})(dx)^3 = -4 M_a U_i^{(a)}(\mathfrak{a}) \quad (76,29)$$

und, wenn man den Ausdruck (76,23) für $U_i^{(a)}$ einsetzt,

$$-4\int\limits_{(a)} \varrho U_i^{(a)}(\mathfrak{r})(dx)^3 = -\sum_b{}' \frac{4\gamma M_a M_b \dot{b}_i}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|} + \sum_b{}' 4\gamma M_a \omega_{si}^{(b)} I_{sk}^{(b)} \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}. \quad (76,30)$$

Das letzte Integral in (76,04) schließlich lautet

$$-\int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t}(dx)^3 = -M_a \left(\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t}\right)_a. \quad (76,31)$$

Differenzieren wir (76,25) partiell nach der Zeit, so erhalten wir

$$\frac{\partial W^{(a)}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_b \dot{b}_k \frac{\partial|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|}{\partial x_k} + \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^2|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (76,32)$$

Die Terme mit dritten Ableitungen von $|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|$ können wir bei der geforderten Genauigkeit hier vernachlässigen. Die Größe $\dot{I}_{jk}^{(b)}$ hat nach (72,16) den Wert

$$\dot{I}_{jk}^{(b)} = \omega_{sj}^{(b)} I_{sk}^{(b)} + \omega_{sk}^{(b)} I_{sj}^{(b)}. \quad (76,33)$$

Durch Differentiation von (76,32) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} = -\frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_b \dot{b}_k \frac{\partial^2|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^3|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad (76,34)$$

und folglich

$$-\int \varrho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t}(dx)^3 = \frac{1}{2}\sum_b{}' \gamma M_a M_b \dot{b}_k \frac{\partial^2|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}{\partial a_i \partial a_k} - \frac{1}{4}\sum_b{}' \gamma M_a \dot{I}_{jk}^{(b)} \frac{\partial^3|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k}. \quad (76,35)$$

Nach (76,04) liefert die durch c^2 dividierte Summe der Ausdrücke (76,28), (76,30) und (76,35) die Größe $(P_{ai})_{\text{wechs.}}$.

Wir führen nun zwei Funktionen K_1 und K_2 ein, von denen die erste homogen und quadratisch in den Geschwindigkeiten und homogen vom Grade (-1) in

den Koordinaten ist, während die zweite linear und homogen in den Geschwindigkeiten und homogen vom Grade (-2) in den Koordinaten ist. Wir setzen

$$K_1 = \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} (3\,\dot{a}_i^2 + 3\,\dot{b}_i^2 - 8\dot{a}_i \dot{b}_i) + \\ + \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \gamma M_a M_b \dot{a}_i \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|; \tag{76,36}$$

$$K_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \gamma \left[M_b \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} (3\dot{a}_i - 4\dot{b}_i) - M_a \omega_{ji}^{(b)} I_{jk}^{(b)} (3\dot{b}_i - 4\dot{a}_i) \right] \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} + \\ + \frac{1}{8c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \gamma \left(M_b \dot{b}_j \dot{I}_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_j \dot{I}_{kl}^{(b)} \right) \frac{\partial^3 |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l}. \tag{76,37}$$

Dann prüft man leicht nach, daß folgende Beziehung gilt

$$(P_{ai})_{\text{wechs.}} = \frac{\partial K_1}{\partial \dot{a}_i} + \frac{\partial K_2}{\partial \dot{a}_i}. \tag{76,38}$$

Unter Beachtung der Abschätzungen

$$\omega \sim \frac{q}{L}; \quad I \sim M L^2; \quad \dot{I} \sim M q L \tag{76,39}$$

findet man für die Funktionen K_1 und K_2 leicht folgende Größenordnungen

$$K_1 \sim M \frac{q^4}{c^2}; \quad K_2 \sim M \frac{q^4}{c^2} \frac{L}{R}. \tag{76,40}$$

Die Funktion K_2 ist also klein gegen K_1.

Nach den Formeln (76,16) und (76,38) können wir für den Gesamtimpuls schreiben

$$P_{ai} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i} (K + K_1 + K_2), \tag{76,41}$$

wobei K, K_1 und K_2 die Werte (76,15), (76,36) und (76,37) haben.

§ 77 Die Berechnung der Kraft

Zur Berechnung der Integrale, die nach (75,32) in den Ausdruck für die Kraft

$$F_{ai} = \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{*(a)}}{\partial x_i} \sigma (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \varrho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 \tag{77,01}$$

eingehen, müssen wir vor allem das Potential U^* mit hinreichender Genauigkeit bestimmen; für die Potentiale W und U_k genügt die schon gefundene erste Näherung [Formeln (76,23) und (76,25)].

Nach (75,05) genügt das Potential U^* der Gleichung

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma, \tag{77,02}$$

wobei die Größe σ die Bedeutung

$$\sigma = \varrho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{2}\varrho v^2 + \varrho \Pi - \varrho U + 3p\right) \tag{77,03}$$

hat und sich nur wenig von ϱ unterscheidet. Ist das NEWTONsche Potential U, das der Gleichung

$$\Delta U = -4\pi\gamma\varrho \tag{77,04}$$

genügt, bekannt, so ergibt sich das verallgemeinerte NEWTONsche Potential U^* aus U, indem man zwei Korrekturen einführt, nämlich die Retardierung und die Ersetzung von ϱ durch σ. Die letztere Korrektur beträgt

$$U_{\text{add.}} = \gamma \int\limits_{(\infty)} \frac{(\sigma' - \varrho')}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} (dx')^3. \tag{77,05}$$

Was die Retardierungskorrektur betrifft, so läßt sie sich durch die oben [Formel (75,18)] eingeführte Funktion

$$W = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_{(\infty)} \varrho' |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| (dx')^3. \tag{77,06}$$

ausdrücken. Wir haben also

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + U_{\text{add.}}. \tag{77,07}$$

Wir beginnen mit der Berechnung von $U_{\text{add.}}$. Die Differenz $\sigma - \varrho$ schreiben wir in der Form

$$\sigma - \varrho = \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{2}\varrho v^2 + \varrho\Pi - \varrho u_a + 3p\right) - \frac{1}{c^2}\varrho U^{(a)}. \tag{77,08}$$

Darin hängt der erste Term nur von der inneren Struktur des Körpers (a) und dessen Geschwindigkeit ab, der zweite dagegen auch vom äußeren Potential. Unter Benutzung der Gleichungen (76,06) und (76,07) erhalten wir

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\varrho v^2 + \varrho\Pi - \varrho u_a + 3p\right)(dx)^3 = \frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a \tag{77,09}$$

mit

$$\xi_a = \int\limits_{(a)} (4\, \varrho \Omega_a + 2\, p)\,(d\,x)^3, \tag{77,10}$$

und für das Moment erster Ordnung

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\varrho v^2 + \varrho \Pi - \varrho u_a + 3p\right)(x_i - a_i)(dx)^3 = 3\,\dot{a}_k\, \omega_{jk}^{(a)}\, I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai} \tag{77,11}$$

mit

$$\xi_{ai} = \int\limits_{(a)} (4\, \varrho \Omega_a + 2\, p)(x_i - a_i)(dx)^3. \tag{77,12}$$

Die dabei auftretenden Integrale haben wir in § 74 berechnet, und zwar ist

$$\xi_a = \frac{2}{3}\varepsilon_a + \frac{8}{3} T_a, \tag{77,13}$$

$$\xi_{ai} = \eta_{ai} + 3\, T_{ai}. \tag{77,14}$$

Damit erhalten wir angenähert

$$\int\limits_{(a)} \left(\frac{3}{2}\varrho v^2 + \varrho \Pi - \varrho u_a + 3\,p\right)' \frac{(d\,x')^3}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a\right) \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + \left(3\,\dot{a}_k\, \omega_{jk}^{(a)}\, I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai}\right) \frac{x_i - a_i}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^3}. \tag{77,15}$$

Weiter ist mit der erforderlichen Genauigkeit

$$\int\limits_{(a)} \frac{\varrho'\, U^{(a)}(\mathfrak{r}')}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}(dx')^3 = \frac{M_a\, U^{(a)}(\mathfrak{a})}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|}. \tag{77,16}$$

Mit den gefundenen Formeln erhalten wir für die Größe (77,07) den Ausdruck

$$U_{\text{add.}} = \frac{\gamma}{c^2}\sum_a \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 - M_a U^{(a)}(\mathfrak{a}) + \xi_a\right)\frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} +$$

$$+ \frac{\gamma}{c^2}\sum_a \left(3\,\dot{a}_k\, \omega_{jk}^{(a)}\, I_{ji}^{(a)} + \xi_{ai}\right)\frac{x_i - a_i}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^3}. \tag{77,17}$$

In der Formel (77,01) für die Kraft, die auf die Masse (a) wirkt, tritt nicht das ganze Potential U^*, sondern nur derjenige Anteil auf, der von den äußeren Massen herrührt. Dieser Anteil ist

$$U^{*(a)} = U^{(a)} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial t^2} + U_{\text{add.}}^{(a)}, \tag{77,18}$$

wobei die Größen $U^{(a)}(\mathfrak{r})$ und $W^{(a)}(\mathfrak{r})$ weiter oben (§ 75) definiert worden sind; der Zusatzterm $U^{(a)}_{\text{add.}}$ beträgt

$$U^{(a)}_{\text{add.}} = \frac{\gamma}{c^2} \sum_b{}' \left(\frac{3}{2} M_b \dot{b}_k^2 - M_b U^{(b)}(\mathfrak{b}) + \xi_b\right) \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|} + \\ + \frac{\gamma}{c^2} \sum_b{}' \left(3 \dot{b}_k \omega_{jk}^{(b)} I_{ji}^{(b)} + \xi_{bi}\right) \frac{x_i - b_i}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|^3}. \tag{77,19}$$

Die gefundenen Werte der Potentiale müssen wir nun in den Ausdruck (77,01) für die Kraft einsetzen. Wir erhalten

$$F_{ai} = \int_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \varrho (dx)^3 + \int_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{add.}}}{\partial x_i} \varrho (dx)^3 + \int_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \varrho) (dx)^3 + \\ + \frac{1}{c^2} \int_{(a)} \varrho \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t^2} (dx)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (dx)^3 - \frac{4}{c^2} \int_{(a)} \varrho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3. \tag{77,20}$$

Darin ist das erste Integral der NEWTONsche Ausdruck für die Kraft; wir haben ihn schon in § 71 berechnet. Nach (71,33) gilt

$$\int_{(a)} \varrho \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (dx)^3 = - \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \tag{77,21}$$

wo Φ die NEWTONsche potentielle Energie des Systems von Körpern ist [Formel (71,32)]. Das zweite Integral ist mit der erforderlichen Genauigkeit gleich

$$\int_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{add.}}}{\partial x_i} \varrho (dx)^3 = M_a \left(\frac{\partial U^{(a)}_{\text{add.}}}{\partial x_i}\right)_a, \tag{77,22}$$

wobei wir unter $U^{(a)}_{\text{add.}}$ den Ausdruck (77,19) verstehen können. Das dritte Integral läßt sich mit Hilfe der Formeln (77,08)—(77,14) berechnen. Wir erhalten

$$\int_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \varrho)(dx)^3 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a \left(\frac{3}{2} M_a \dot{a}_k^2 + \xi_a\right) + \\ + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_a \left(3 \dot{a}_k \omega_{sk}^{(a)} I_{sj}^{(a)} + \xi_{aj}\right) - \frac{1}{c^2} M_a \left(U^{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a, \tag{77,23}$$

wo für $U^{(a)}$ der Ausdruck (76,21) zu nehmen ist.

Wir bilden die Summe der Ausdrücke (77,22) und (77,23) und stellen sie in der Form einer Ableitung nach a_i dar. In der Formel (77,23) können wir vor Ausführung der Differentiation $x_i = a_i$ setzen. In der Formel (77,22) dagegen

muß man berücksichtigen, daß eines der Glieder in $U^{(b)}(\mathfrak{b})$ selbst von a_i abhängt, nämlich

$$U^{(b)}(\mathfrak{b}) = \frac{\gamma M_a}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} + \cdots, \tag{77,24}$$

wo die Punkte Glieder bedeuten, die a_i nicht enthalten. Wegen (77,24) gilt

$$U^{(b)}(\mathfrak{b}) \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ U^{(b)}(\mathfrak{b}) \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} - \frac{1}{2} \frac{\gamma M_a}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^2} \right\}. \tag{77,25}$$

Mit dieser Beziehung erhalten wir

$$\int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}_{\text{add.}}}{\partial x_i} \varrho (dx)^3 + \int\limits_{(a)} \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} (\sigma - \varrho)(d x)^3 = \frac{\partial}{\partial a_i} (L_1 + L_2) - \frac{\partial \Psi}{\partial a_i}. \tag{77,26}$$

Dabei haben wir gesetzt

$$L_1 = \frac{1}{4 c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} [3 \gamma M_a M_b (\dot{a}_k^2 + \dot{b}_k^2) + 2 \gamma (\xi_b M_a + \xi_a M_b)] \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}, \tag{77,27}$$

$$L_2 = \frac{1}{2 c^2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} [3 \gamma M_a \omega_{s k}^{(b)} I_{s j}^{(b)} \dot{b}_k - 3 \gamma M_b \omega_{s k}^{(a)} I_{s j}^{(a)} \dot{a}_k + \\ + \gamma (M_a \xi_{b j} - M_b \xi_{a j})] \frac{a_j - b_j}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^3}. \tag{77,28}$$

Die Funktion Ψ hat den Wert

$$\Psi = \frac{1}{c^2} \sum_b{}' \left(\gamma M_a M_b U^{(b)}(\mathfrak{b}) \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} - \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{M_a^2 M_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^2} \right) + \frac{1}{2 c^2} M_a \left(U^{(a)}(\mathfrak{a}) \right)^2 + \cdots, \tag{77,29}$$

wo die Punkte Glieder bezeichnen, die nicht von a_i abhängen. Diese Glieder wählen wir so, daß die Funktion Ψ in allen Massen und den entsprechenden Radiusvektoren symmetrisch wird. Wir setzen

$$\Psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\gamma^2}{2 c_0^2} \frac{M_a M_b (M_a + M_b)}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^2}, \tag{77,30}$$

$$\Psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \frac{\gamma^2}{c_0^2} M_a M_b M_c \left(\frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|\,|\mathfrak{a} - \mathfrak{c}|} + \\ + \frac{1}{|\mathfrak{b} - \mathfrak{c}|\,|\mathfrak{b} - \mathfrak{a}|} + \frac{1}{|\mathfrak{c} - \mathfrak{a}|\,|\mathfrak{c} - \mathfrak{b}|} \right) \tag{77,31}$$

(hier haben wir vorübergehend für die Lichtgeschwindigkeit die Bezeichnung c_0 eingeführt, um eine Verwechslung mit dem Index bei der Masse M_c zu ver-

meiden). Man sieht dann leicht ein, daß die von a_i abhängigen Glieder in der Funktion

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \Psi (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \frac{1}{6} \sum_{\substack{a, b, c \\ (a \neq b,\, b \neq c,\, c \neq a)}} \Psi (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \tag{77,32}$$

dieselben wie in (77,29) sind. In der Formel (77,26) für die Summe der beiden Integrale kann man also unter Ψ den Ausdruck (77,32) verstehen. Die Glieder $\Psi (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ liefern eine eigenartige „ternäre Wechselwirkung" der Massen.

Wir betrachten nun diejenigen Integrale in dem Ausdruck (77,20), welche die Funktion $W^{(a)}$ enthalten. Offenbar ist

$$\frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t^2} (d x)^3 - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_{(a)} \varrho \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (d x)^3 = - \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \frac{\partial \varrho}{\partial t} \frac{\partial^2 W^{(a)}}{\partial x_i \partial t} (d x)^3 =$$

$$= - \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \varrho v_j \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j \partial t} (d x)^3 . \tag{77,33}$$

Der letzte Ausdruck läßt sich mit Hilfe der Formel (76,34) für die Ableitung von $W^{(a)}$ berechnen. Wir erhalten

$$- \frac{1}{c^2} \int\limits_{(a)} \varrho v_j \frac{\partial^3 W^{(a)}}{\partial x_i \partial x_j \partial t} (d x)^3 = \frac{\partial L_3}{\partial a_i} + \frac{\partial L_4}{\partial a_i} \tag{77,34}$$

mit

$$L_3 = \frac{1}{4 c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \gamma\, M_a M_b \dot{a}_j \dot{b}_k \frac{\partial^2 |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}{\partial a_j \partial a_k}, \tag{77,35}$$

$$L_4 = \frac{1}{8 c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \gamma \left(M_b \dot{b}_j \dot{I}_{kl}^{(a)} - M_a \dot{a}_j \dot{I}_{kl}^{(b)}\right) \frac{\partial^3 |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}{\partial a_j \partial a_k \partial a_l} . \tag{77,36}$$

Nun müssen wir noch das letzte Integral in (77,20) behandeln. Seine Berechnung macht keine Schwierigkeiten; wir erhalten

$$- \frac{4}{c^2} \int\limits_{(a)} \varrho v_k \frac{\partial U_k^{(a)}}{\partial x_i} (d x)^3 = \frac{\partial L_5}{\partial a_i} + \frac{\partial L_6}{\partial a_i} \tag{77,37}$$

mit

$$L_5 = - \frac{2}{c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma M_a M_b (\dot{a}_k \dot{b}_k)}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}, \tag{77,38}$$

$$L_6 = \frac{2}{c^2} \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b)}} \gamma \left(M_b \dot{b}_k \omega_{sk}^{(a)} I_{sj}^{(a)} - M_a \dot{a}_k \omega_{sk}^{(b)} I_{sj}^{(b)}\right) \frac{a_j - b_j}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^3} . \tag{77,39}$$

Fassen wir alle Integrale zusammen, so erhalten wir folgenden Ausdruck für die Kraft

$$F_{ai} = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial a_i} + \frac{\partial}{\partial a_i}(L_1 + L_3 + L_5) + \frac{\partial}{\partial a_i}(L_2 + L_4 + L_6). \tag{77,40}$$

Diesen Ausdruck für die Kraft wollen wir mit dem oben gewonnenen Ausdruck (76,41) für den Impuls vergleichen. Dazu setzen wir

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{a,b\\(a \neq b)}} \gamma\,(\xi_b M_a + \xi_a M_b)\frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}, \tag{77,41}$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{a,b\\(a \neq b)}} \gamma\,(\xi_{bj} M_a - \xi_{aj} M_b)\frac{a_j - b_j}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|^3}. \tag{77,42}$$

Diese Größen gehen (mit dem Minuszeichen) in die Ausdrücke (77,27) und (77,28) für L_1 und L_2 ein. Man prüft leicht nach, daß die Beziehungen

$$L_1 + L_3 + L_5 = K_1 - \Phi_1 \tag{77,43}$$

und

$$L_2 + L_4 + L_6 = K_2 - \Phi_2 \tag{77,44}$$

erfüllt sind, wobei K_1 und K_2 die Bedeutung (76,36) und (76,37) haben. Deshalb wird

$$F_{ai} = \frac{\partial}{\partial a_i}(K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi). \tag{77,45}$$

Andererseits haben wir nach (76,41)

$$P_{ai} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i}(K + K_1 + K_2), \tag{77,46}$$

wobei K der Ausdruck (76,15) ist.

In diesen Formeln ist die Größe K von den Koordinaten a_i, die Größen Φ, Φ_1, Φ_2 und Ψ dagegen von den Geschwindigkeiten $\dot{a}_i$ unabhängig. Mit

$$L = K + K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi \tag{77,47}$$

können wir deshalb schreiben

$$P_{ai} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i}; \quad F_{ai} = \frac{\partial L}{\partial a_i}, \tag{77,48}$$

wodurch die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d P_{ai}}{dt} = F_{ai} \tag{77,49}$$

die LAGRANGEsche Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \tag{77,50}$$

annehmen.

§ 78 Die Gleichungen für die Translationsbewegung in der LAGRANGEschen Form

In den vorhergehenden Paragraphen haben wir die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkte der Massen abgeleitet, die sich aus den Bedingungen

$$\int_{(a)} g \nabla_\alpha T^{\alpha i} (dx)^3 = 0 \tag{78,01}$$

ergeben. Diese folgen ihrerseits aus der Harmonizitätsbedingung (vgl. § 70). Die Gleichungen wurden unter der Voraussetzung abgeleitet, daß jede Masse wie ein starrer Körper um ihren Schwerpunkt rotiert. Wie wir sahen, kann man die Bewegungsgleichungen auf die LAGRANGEsche Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \tag{78,02}$$

bringen; die LAGRANGE-Funktion ergibt sich durch Einsetzen der oben gefundenen Ausdrücke für K, K_1, K_2, Φ, Φ_1, Φ_2 und Ψ [Formeln (76,15), (76,36), (76,37), (71,32), (77,41), (77,42) und (77,32)] in (77,47).[1])

Wir schreiben diese Formeln noch einmal hin. Es ist

$$L = K + K_1 + K_2 - \Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \Psi, \tag{78,03}$$

wobei die einzelnen Summanden folgende Bedeutung haben:

$$K = \sum_a \left(\frac{1}{2} M_a \dot{a}_i^2 + T_a\right) + \\ + \frac{1}{c^2} \sum_a \left(\frac{1}{8} M_a (\dot{a}_k^2)^2 + \frac{1}{2} Z_{ik}^{(a)} \dot{a}_i \dot{a}_k + Z_i^{(a)} \dot{a}_i\right). \tag{78,04}$$

Darin ist die erste Summe die gewöhnliche NEWTONsche kinetische Energie der Translations- und der Rotationsbewegung des Systems von Körpern. (Für die Bildung der linken Seite der LAGRANGEschen Gleichungen ist übrigens der Term T_a nicht wesentlich.) Die zweite Summe liefert die Korrektur zum „kinetischen“ (d. h. geschwindigkeitsabhängigen) Anteil der LAGRANGE-Funktion. Ist keine Rotation vorhanden, so stimmt diese Korrektur nach (76,19) mit dem gewöhnlichen Zusatzterm, der aus der Punktmechanik bekannt ist, überein; bei einer Rotation jedoch enthält diese Korrektur auch „gemischte“ Terme, die

---

[1]) Für nichtrotierende Massen wurde die Reduktion auf die LAGRANGEsche Form zum ersten Mal von FICHTENHOLZ [44] durchgeführt.

sowohl von den Geschwindigkeiten der Translationsbewegung als auch von den Winkelgeschwindigkeiten der Rotation der Körper abhängen. Von der Lage der Schwerpunkte der Körper hängt die Größe K nicht ab.

Nun schreiben wir die Ausdrücke für K_1 und K_2 hin. Nach (76,36) und (76,37) ist

$$K_1 = \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \left(3 \dot{a}_i^2 + 3 \dot{b}_i^2 - 8 \dot{a}_i \dot{b}_i\right) + \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \gamma M_a M_b \dot{a}_i \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|, \tag{78,05}$$

$$K_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \left[\gamma M_a \omega_{si}^{(b)} I_{sj}^{(b)} (3 \dot{b}_i - 4 \dot{a}_i) - \gamma M_b \omega_{si}^{(a)} I_{sj}^{(a)} (3 \dot{a}_i - 4 \dot{b}_i)\right] \frac{a_j - b_j}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^2} + \frac{1}{8c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \left(\gamma M_b \dot{b}_i \dot{I}_{kl}^{(a)} - \gamma M_a \dot{a}_i \dot{I}_{kl}^{(b)}\right) \frac{\partial^3 |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}{\partial a_i \partial a_k \partial a_l}. \tag{78,06}$$

Die Größen K_1 und K_2 hängen sowohl von den Koordinaten als auch von den Geschwindigkeiten ab und sind sozusagen das Resultat einer Wechselwirkung zwischen kinetischer und potentieller Energie. Wie schon in § 76 festgestellt, ist dabei die Größe K_1 homogen und quadratisch in den Geschwindigkeiten $\dot{a}_i$ der Translationsbewegung, während die Größe K_2 in den Geschwindigkeiten der Translationsbewegung und den Winkelgeschwindigkeiten

ende Term in der LAGRANGE-Funktion

$$-\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \gamma \left(M_a I_{ik}^{(b)} + M_b I_{ik}^{(a)}\right) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \tag{78,07}$$

stellt die NEWTONsche potentielle Energie des Systems von Körpern dar. Dazu kommen die beiden Korrekturen Φ_1 und Φ_2, die nach (77,41) und (77,42) lauten

$$-\Phi_1 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \gamma (\xi_b M_a + \xi_a M_b) \frac{1}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}, \tag{78,08}$$

$$-\Phi_2 = \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \gamma (\xi_{bj} M_a - \xi_{aj} M_b) \frac{a_j - b_j}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^3}. \tag{78,09}$$

Die Größe Φ_1 läßt sich deuten als das Ergebnis einer Ersetzung der Masse M_a durch die effektive Masse $M_a + \delta M_a$ mit

$$\delta M_a = \frac{1}{c^2} \xi_a \tag{78,10}$$

in der NEWTONschen potentiellen Energie Φ oder, genauer, in ihrem Hauptglied[1])

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}. \tag{78,11}$$

Die Größe Φ_2 kann man als das Resultat einer Verschiebung des Schwerpunktes der Masse (a), und zwar einer Ersetzung von a_i durch $a_i + \delta a_i$ mit

$$\delta a_i = \frac{1}{c^2 M_a} \xi_{ai} \tag{78,12}$$

deuten. Tatsächlich haben wir, bis auf kleine Größen,

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma (M_a + \delta M_a)(M_b + \delta M_b)}{|\mathfrak{a} + \delta\mathfrak{a} - \mathfrak{b} - \delta\mathfrak{b}|} = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2. \tag{78,13}$$

Wir bemerken, daß die in die Formel für die effektive Masse eingehende Größe ξ_a die Eigenenergie des Körpers (a) ist, die sich aus der kinetischen Energie der Rotation um seinen Schwerpunkt, aus der elastischen Energie des Körpers und aus der Gravitationsenergie seiner Bestandteile zusammensetzt. Tatsächlich kann man unter Benutzung der LIAPOUNOFFschen Gleichung und der Beziehung (73,26) zeigen, daß der Ausdruck

$$\xi_a = T_a + \int_{(a)} \varrho \Pi (dx)^3 - \frac{1}{2} \int_{(a)} \varrho u_a (dx)^3 \tag{78,14}$$

für die Eigenenergie in die Formel (77,10) für ξ_a übergeht.

Es ist zu erwarten, daß die Ponderabilität der Eigenenergie des Körpers nicht nur eine Änderung seiner effektiven Masse, sondern auch eine Verschiebung seines Schwerpunktes nach sich zieht. Da sich aber die kinetische Energie der Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt auf den Körper als Ganzes bezieht und nicht mit seinen einzelnen Teilen zusammenhängt, ist es schwierig, von vornherein einen geeigneten Ausdruck für die Schwerpunktsverschiebung anzugeben. Die Rechnung liefert jedoch dafür die Größe (78,12), wobei ξ_{ai} den Wert (77,12) hat.

Wir müssen nun noch den letzten Term in der LAGRANGE-Funktion aufschreiben. Die darin auftretenden drei (verschiedenen) Radiusvektoren bezeichnen wir zweckmäßigerweise mit den Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; deshalb verwenden

---

[1]) In der Formel (78,07) für Φ ist das Korrekturglied von der Ordnung L^2/R^2 gegenüber dem Hauptglied, so daß die relativistischen Korrekturen im Korrekturglied von einer Ordnung sind, die wir bereits vernachlässigen. Deshalb ist es gleichgültig, ob man sie in dengesamten Ausdruck für Φ oder nur in das Hauptglied Φ_0 einführt.

wir für die Lichtgeschwindigkeit die in § 77 eingeführte Bezeichnung c_0. Nach den Formeln (77,30), (77,31) und (77,32) haben wir

$$-\Psi = -\frac{\gamma^2}{4c_0^2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}}\frac{M_a M_b (M_a + M_b)}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|^2} - \frac{\gamma^2}{6c_0^2}\sum_{\substack{a,b,c\\(a\neq b,\, b\neq c,\, c\neq a)}} M_a M_b M_c \times$$

$$\times\left(\frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|\,|\mathfrak{a}-\mathfrak{c}|} + \frac{1}{|\mathfrak{b}-\mathfrak{c}|\,|\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|} + \frac{1}{|\mathfrak{c}-\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{c}-\mathfrak{b}|}\right). \tag{78,15}$$

Darin stellt die letzte Summe eine ternäre Wechselwirkung der Massen dar. Wie wir oben die Terme $(K_1 + K_2)$ als den „kinetisch-potentiellen" Anteil der LAGRANGE-Funktion bezeichnet haben, so können wir die Größe Ψ den „potentiell-potentiellen" Anteil nennen. Diese Bezeichnung betont den Umstand, daß in der zweiten Näherung der EINSTEINschen Gravitationstheorie die für die NEWTONsche Theorie charakteristische Additivität von kinetischem und potentiellem Anteil der LAGRANGE-Funktion nicht mehr gilt.

Die vollständige LAGRANGE-Funktion ist nach (78,03) die Summe der hier aufgeschriebenen Ausdrücke (78,04)—(78,09) und (78,15). Sie liefert mit der von uns betrachteten Genauigkeit die Gleichungen für die Translationsbewegung mit relativistischen Korrekturen.

Was die Gleichungen für die Rotationsbewegung betrifft, so lassen sie sich aus den Beziehungen (70,28)

$$-\int_{(a)} g\,(x_i \nabla_\alpha T^{\alpha k} - x_k \nabla_\alpha T^{\alpha i})\,(d\,x)^3 = 0 \tag{78,16}$$

gewinnen. In der NEWTONschen Näherung liefern diese Beziehungen, wie in § 72 gezeigt, das Gesetz für die Änderung des Drehimpulses

$$M_{ik}^{(a)} = \omega_{jk}^{(a)} I_{ji}^{(a)} - \omega_{ji}^{(a)} I_{jk}^{(a)} \tag{78,17}$$

jedes Körpers in der Form

$$\frac{d}{dt} M_{ik}^{(a)} = \sum_b{}' \frac{3\gamma M_b (a_j - b_j)}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|^5}\left[(a_k - b_k) I_{ij}^{(a)} - (a_i - b_i) I_{kj}^{(a)}\right] \tag{78,18}$$

[Formeln (72,07) und (72,13)]. Die relativistischen Korrekturen zu den NEWTONschen Gleichungen für die Rotationsbewegung kann man durch eine genauere Berechnung der linken Seite der Beziehungen (78,16) erhalten. Diese Rechnungen lassen sich analog zu denen durchführen, die wir in den vorstehenden Paragraphen für die Translationsbewegung ausgeführt haben, und bieten außer ihrer Kompliziertheit keine Schwierigkeiten. Da aber die relativistischen Korrekturen zur Rotationsbewegung der Himmelskörper eine ganz unbedeutende Rolle spielen und noch schwieriger zu beobachten sind als die Korrekturen zu deren Translationsbewegung, wollen wir sie hier nicht berechnen.

§ 79 Die Integrale der Bewegungsgleichungen eines Systems von Körpern

Ähnlich einem System von Teilchen, die durch das elektromagnetische Feld wechselwirken (§§ 26—28), hat ein System gravitierender Körper die Eigenschaft, daß seine Bewegungsgleichungen zehn klassische Integrale (Konstanten der Bewegung) besitzen, und zwar die Impuls- und Energieintegrale, sowie die Integrale des Drehimpulses und der Schwerpunktsbewegung.

Wir wollen jetzt die allgemeinen Ausdrücke für die Konstanten der Bewegung in der Form bestimmter Integrale ableiten. Dabei werden wir (wie am Anfang von § 71) für das innere Problem die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers in nichtrelativistischer Näherung benutzen. Diese schreiben wir noch einmal hin. Es gelten die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho v_i)}{\partial x_i} = 0\,, \tag{79,01}$$

die eigentlichen Bewegungsgleichungen

$$\varrho w_i - \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\,, \tag{79,02}$$

wo w_i die Beschleunigung

$$w_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{79,03}$$

ist, und schließlich die Beziehung für die elastische potentielle Energie Π

$$\varrho \frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{2} p_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \tag{79,04}$$

Die Voraussetzung, daß jeder der Körper wie ein starrer Körper rotieren soll, werden wir zunächst nicht einführen.

Um die Konstanten der Bewegung zu erhalten, kann man von denjenigen Beziehungen ausgehen, die, wie in § 70 gezeigt, aus der Harmonizitätsbedingung folgen. Und zwar liefern die Beziehungen

$$-\int\limits_{(\infty)} g\, \nabla_\alpha T^{\alpha i} (dx)^3 = 0\,, \tag{79,05}$$

über die Zeit integriert, die drei Impulsintegrale, während die Beziehung

$$-\int\limits_{(\infty)} g\, \nabla_\alpha T^{\alpha 0} (dx)^3 = 0\,, \tag{79,06}$$

ebenfalls über die Zeit integriert, das Energieintegral ergibt. Entsprechend erhält man aus den Beziehungen

$$-\int\limits_{(\infty)} g\, (x_i \nabla_\alpha T^{\alpha k} - x_k \nabla_\alpha T^{\alpha i})\, (dx)^3 = 0 \tag{79,07}$$

die drei Drehimpulsintegrale, während die Beziehungen

$$- \int_{(\infty)} g\, x_i\, \nabla_\alpha\, T^{\alpha 0}\, (d\,x)^3 + x_0 \int_{(\infty)} g\, \nabla_\alpha\, T^{\alpha i}\, (d\,x)^3 = 0 \tag{79,08}$$

[in denen übrigens das Verschwinden des zweiten Termes schon aus (79,05) folgt] zu den drei Integralen der Schwerpunktsbewegung des Massensystems führen.

Wir beginnen mit der Berechnung des Impulses. Zur Ableitung des Erhaltungssatzes aus (79,05) können wir die Ergebnisse des § 75 benutzen. In Verallgemeinerung der Formel (75,31) setzen wir

$$P_i = \int_{(\infty)} \left\{ \varrho v_i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3\,U \right) \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{c^2}\, p_{i\,k}\, v_k - \frac{4}{c^2}\, \varrho\, U_i - \frac{1}{c^2}\, \varrho\, \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\, \partial t} \right\} (d\,x)^3 \tag{79,09}$$

und bilden die Ableitung dieses Ausdruckes nach der Zeit. Auf Grund von (73,01) erhalten wir zunächst

$$\frac{d\,P_i}{d\,t} = \int \frac{\partial\, U^*}{\partial x_i}\, \sigma\, (d\,x)^3 - \frac{1}{c^2}\, \frac{d}{d\,t} \int \varrho\, \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\, \partial\, t}\, (d\,x)^3 - \frac{4}{c^2} \int \varrho\, v_k\, \frac{\partial\, U_k}{\partial x_i}\, (d\,x)^3, \tag{79,10}$$

wo

$$\sigma = \varrho + \frac{\varrho}{c^2} \left(\frac{3}{2}\, v^2 + \Pi - U \right) - \frac{p_{k\,k}}{c^2} \tag{79,11}$$

ist und die Funktion U^* der Gleichung

$$\Delta\, U^* - \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial^2\, U^*}{\partial\, t^2} = -\, 4\, \pi\, \gamma\, \sigma \tag{79,12}$$

genügt. Da alle Integrale in (79,10) über ein unendliches Volumen erstreckt werden, gelten für sie die Beziehungen (75,24) und (75,29), wonach

$$\int \frac{\partial\, U^*}{\partial x_i}\, \sigma\, (d\,x)^3 = \frac{1}{c^2}\, \frac{d}{d\,t} \int \varrho\, \frac{\partial^2\, W}{\partial x_i\, \partial\, t}\, (d\,x)^3, \tag{79,13}$$

$$\int \varrho\, v_k\, \frac{\partial\, U_k}{\partial x_i}\, (d\,x)^3 = 0 \tag{79,14}$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{d\,P_i}{d\,t} = 0; \quad P_i = \text{const}\,, \tag{79,15}$$

so daß P_i eine Konstante der Bewegung ist. Dieses Ergebnis erweitert die Formel (75,34) auf den allgemeinen Fall eines Systems elastischer Körper, die durch das Gravitationsfeld wechselwirken.

Wir wollen nun den Erhaltungssatz für den Drehimpuls eines solchen Systems formulieren. Führen wir in der Beziehung (79,07) den Ausdruck (70,22) für $g \nabla_\alpha T^{\alpha i}$ ein und benutzen die Formeln (70,26) für die Komponenten des Massentensors, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\left[\varrho+\frac{\varrho}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi+3U\right)\right](x_i v_k - x_k v_i) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{c^2}(p_{jk} v_j x_i - p_{ji} v_j x_k)\right\}(dx)^3 =$$
$$=\int\left(x_i\frac{\partial U^*}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)\sigma\,(dx)^3+\frac{4}{c^2}\int\varrho\left(x_i\frac{dU_k}{dt}-x_k\frac{dU_i}{dt}\right)(dx)^3 -$$
$$-\frac{4}{c^2}\int\varrho v_j\left(x_i\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)(dx)^3. \qquad (79,16)$$

Dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{dU_i}{dt}=\frac{\partial U_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \qquad (79,17)$$

Hätten wir in (79,16) alle Integrale über das von einer der Massen eingenommene Gebiet erstreckt, so würden wir eine Verallgemeinerung der Formel (72,04) erhalten, die das Gesetz für die Änderung des Drehimpnlses in der NEWTONschen Näherung darstellt. Uns interessiert jetzt aber der Gesamtdrehimpuls; deshalb müssen wir alle Integrale über den ganzen unendlichen Raum erstrecken.

Mit der Bezeichnung

$$G_i=\left[\varrho+\frac{\varrho}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi+3U\right)\right]v_i-\frac{1}{c^2}p_{ij}v_j-\frac{4}{c^2}\varrho U_i-\frac{1}{c^2}\varrho\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t} \qquad (79,18)$$

können wir die Formel (79,09) für den Gesamtimpuls schreiben

$$P_i=\int G_i\,(dx)^3. \qquad (79,19)$$

Dann läßt sich die Beziehung (79,16) in der Form

$$\frac{d}{dt}\int(x_i G_k - x_k G_i)(dx)^3=\int\left(x_i\frac{\partial U^*}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U^*}{\partial x_i}\right)\sigma\,(dx)^3 -$$
$$-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\varrho\left(x_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_k\,\partial t}-x_k\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}\right)(dx)^3 -$$
$$-\frac{4}{c^2}\int\varrho v_j\left(x_i\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)(dx)^3-\frac{4}{c^2}\int\varrho\,(v_i U_k - v_k U_i)(dx)^3 \qquad (79,20)$$

darstellen. Wir werden zeigen, daß sich darin die beiden ersten Integrale auf der rechten Seite gegeneinander wegheben, während die restlichen beiden Integrale einzeln verschwinden, so daß die ganze rechte Seite gleich Null ist.

Bei der Berechnung der Integrale der rechten Seite benutzen wir folgenden Hilfssatz: Läßt sich eine Funktion ψ durch eine Dichte μ nach der Formel

$$\psi = \int f(|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|)\, \mu(\mathfrak{r}')\, (d\,x')^3 \tag{79,21}$$

ausdrücken, wo f eine beliebige Funktion des Abstandes $|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|$ ist, so gilt die Beziehung

$$\int \left(x_i \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \mu\, (d\,x)^3 = 0\,. \tag{79,22}$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß in der Formel (79,21) die Differentiation unter dem Integralzeichen erlaubt ist. Zum Beweis genügt es, die Werte der Ableitungen von ψ aus (79,21) in (79,22) einzusetzen und zu beachten, daß der Integrand des so entstehenden Doppelintegrals antisymmetrisch in den Koordinaten der beiden Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ ist. Einer analogen Beziehung sind wir schon bei der Ableitung der Formel (71,14) begegnet.

Nach (77,07) können wir schreiben

$$U^* = U_\sigma + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\,, \tag{79,23}$$

wobei $U_\sigma = U + U_{\text{add.}}$ eine Lösung der Gleichung

$$\Delta\, U_\sigma = -\,4\,\pi\,\gamma\,\sigma \tag{79,24}$$

ist, während der zweite Term in (79,23), in dem die Funktion W den Wert

$$W = \frac{1}{2}\,\gamma \int\limits_{(\infty)} \varrho'\, |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|\, (d\,x')^3 \tag{79,25}$$

hat, die Retardierungskorrektur darstellt.

Wir betrachten das erste Integral auf der rechten Seite von (79,20). Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz ist

$$\int \left(x_i \frac{\partial U_\sigma}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U_\sigma}{\partial x_i} \right) \sigma\, (d\,x)^3 = 0\,. \tag{79,26}$$

Deshalb wird

$$\int \left(x_i \frac{\partial U^*}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \right) \sigma\, (dx)^3 = \frac{1}{c^2} \int \left(x_i \frac{\partial^3 W}{\partial t^2\, \partial x_k} - x_k \frac{\partial^3 W}{\partial t^2\, \partial x_i} \right) \varrho\, (d\,x)^3. \tag{79,27}$$

Andererseits liefert der Hilfssatz für

$$f = \frac{1}{2}\,\gamma\, |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|\,; \quad \mu = \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,; \quad \psi = \frac{\partial W}{\partial t} \tag{79,28}$$

die Beziehung

$$\int \left(x_i \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial x_k} - x_k \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial x_i} \right) \frac{\partial \varrho}{\partial t} (d x)^3 = 0 . \tag{79,29}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{d}{d t} \int \varrho \left(x_i \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial x_k} - x_k \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial x_i} \right) (d x)^3 = \\ = \int \varrho \left(x_i \frac{\partial^3 W}{\partial t^2\, \partial x_k} - x_k \frac{\partial^2 W}{\partial t^2\, \partial x_i} \right) (d x)^3 \tag{79,30}$$

und folglich

$$\int \left(x_i \frac{\partial U^*}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U^*}{\partial x_i} \right) \sigma\, (d x)^3 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{d t} \int \varrho \left(x_i \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial x_k} - x_k \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial x_i} \right) (d x)^3 , \tag{79,31}$$

so daß sich die ersten beiden Integrale auf der rechten Seite von (79,20) tatsächlich gegeneinander wegheben.

Daß das dritte Integral auf der rechten Seite von (79,20) verschwindet, erkennt man auf Grund des Hilfssatzes, wenn man

$$f = \frac{\gamma}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} ; \quad \mu = \varrho v_j ; \quad \psi = U_j \tag{79,32}$$

setzt. Das letzte Integral in (79,20) schließlich verschwindet infolge der Poisson-Gleichung für U_i. Damit ist also die ganze rechte Seite von (79,20) gleich Null, und wir haben

$$\frac{d}{d t} \int\limits_{(\infty)} (x_i G_k - x_k G_i)\, (d x)^3 = 0 . \tag{79,33}$$

Führen wir den Gesamtdrehimpuls des Systems

$$M_{ik} = \int\limits_{(\infty)} (x_i G_k - x_k G_i)\, (d x)^3 \tag{79,34}$$

ein, so gilt also

$$M_{ik} = \text{const} . \tag{79,35}$$

Wir erinnern daran, daß die Größe G_i in diesen Formeln den Wert (79,18) hat und sich nur wenig von der Impulsdichte ϱv_i unterscheidet.

Nun formulieren wir den Erhaltungssatz für die Energie des Mehrkörpersystems. Im Gegensatz zu den anderen Erhaltungssätzen führt die Beziehung (79,06) bei der angenommenen Genauigkeit der Rechnungen nur zur Newtonschen Näherung für dieses Gesetz. Eine genauere Form des Erhaltungssatzes kann man aus einer Untersuchung der Lagrangeschen Form der Bewegungs-

gleichungen des Systems von Körpern erhalten. Das werden wir für nichtrotierende Massen im nächsten Paragraphen durchführen.

Da die Hauptglieder der Komponenten $c^2 T^{00}$ und $c^2 T^{0i}$ (ϱ und ϱv_i) der Kontinuitätsgleichung (79,01) genügen, liefert die Beziehung (79,06) in der betrachteten Näherung genau dasselbe wie die Beziehung

$$c^2 \int \nabla_\alpha T^{\alpha 0} (dx)^3 = 0 . \tag{79,36}$$

Führen wir hier für die Divergenz den Ausdruck (65,23) ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int c^2 T^{00} (dx)^3 + \int \frac{\partial U}{\partial t} T^{00} (dx)^3 = 0 \tag{79,37}$$

und, mit dem Wert (70,26) für T^{00},

$$\frac{d}{dt} \int \varrho \left\{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U\right)\right\} (dx)^3 + \frac{1}{c^2} \int \varrho \frac{\partial U}{\partial t} (dx)^3 = 0 . \tag{79,38}$$

Da nun für sich

$$M^0 = \int \varrho (dx)^3 = \text{const} \tag{79,39}$$

ist, so muß

$$\frac{d}{dt} \int \varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - U\right) (dx)^3 + \int \varrho \frac{\partial U}{\partial t} (dx)^3 = 0 \tag{79,40}$$

sein. Um daraus den Erhaltungssatz im engeren Sinne zu gewinnen, müssen wir auch das zweite Integral in (79,40) als zeitliche Ableitung darstellen. Dies gelingt leicht, wenn man die Beziehung

$$\int \left(\varrho \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) (dx)^3 = 0 \tag{79,41}$$

berücksichtigt, die sich aus der POISSON-Gleichung für U ergibt. Subtrahieren wir von (79,40) die durch 2 dividierte Gleichung (79,41) und setzen

$$E = \int \varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - \frac{1}{2} U\right) (dx)^3, \tag{79,42}$$

so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = 0; \quad E = \text{const} . \tag{79,43}$$

Die Integrale der einzelnen Terme in (79,42) stellen die kinetische, die elastische und die Gravitationsenergie des Systems von Körpern in NEWTONscher Näherung dar.

Wenn wir von (79,38) den Term (79,39) nicht abtrennen und setzen

$$M = \int \varrho \left\{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - \frac{1}{2} U\right)\right\} (dx)^3, \tag{79,44}$$

so erhalten wir auch

$$M = \text{const}. \tag{79,45}$$

Die Größe M ist die Gesamtmasse des Systems von Körpern. Sie beträgt

$$M = M^0 + \frac{E}{c^2}, \tag{79,46}$$

wobei M^0 und E die Bedeutungen (79,39) und (79,42) haben.

Wir müssen nun noch die Integrale der Bewegung des Schwerpunktes des Systems von Körpern betrachten. Man erhält sie aus den Beziehungen (79,08). Das läuft auf eine Umformung des Ausdruckes

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int x_i\,\varrho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}(dx)^3 &= \\ = \int \varrho\, v_i\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}(dx)^3 &+ \\ +\frac{1}{c^2}\int x_i\,\varrho\, v_j\, w_j\,(dx)^3+\frac{1}{c^2}\int x_i\,\varrho\,\frac{d(\Pi-U)}{dt}\,(dx)^3\end{aligned} \tag{79,47}$$

mit Hilfe der Gleichungen (79,01)—(79,04) hinaus. Setzen wir in (79,47) den Wert ϱw_j aus (79,02) ein, so erhalten wir für die Summe der beiden letzten Integrale

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\int x_i\,\varrho\left\{v_j\,w_j+\frac{d\Pi}{dt}-\frac{dU}{dt}\right\}(dx)^3 &= \\ = -\frac{1}{c^2}\int p_{ji}\,v_j\,(dx)^3-\frac{1}{c^2}\int x_i\,\varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,(dx)^3.\end{aligned} \tag{79,48}$$

Mit der Bezeichnung (79,18) kann die Formel, die sich ergibt, wenn man (79,48) in (79,47) einsetzt, folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int x_i\,\varrho\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+\Pi-U\right)\right\}(dx)^3 &= \\ = \int G_i\,(dx)^3-\frac{4}{c^2}\int \varrho\, v_i\, U\,(dx)^3+\frac{4}{c^2}\int \varrho\, U_i\,(dx)^3 &+ \\ +\frac{1}{c^2}\int \varrho\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}\,(dx)^3-\frac{1}{c^2}\int x_i\,\varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,(dx)^3.\end{aligned} \tag{79,49}$$

Addieren wir hierzu die triviale Gleichung

$$\frac{1}{2c^2}\,\frac{d}{dt}\int x_i\,\varrho\, U\,(dx)^3 = \frac{1}{2c^2}\int x_i\left(\varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}+U\,\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)(dx)^3, \tag{79,50}$$

so können wir statt (79,49) schreiben

$$\frac{d}{dt}\int x_i \varrho \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - \frac{1}{2}U\right)\right\}(d x)^3 =$$
$$= \int G_i (d x)^3 - \frac{4}{c^2}\int \varrho v_i U (d x)^3 + \frac{4}{c^2}\int \varrho U_i (d x)^4 +$$
$$+ \frac{1}{c^2}\int \varrho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}(d x)^3 - \frac{1}{2 c^2}\int x_i \left(\varrho \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)(d x)^3. \tag{79,51}$$

Diese Formel gilt auch, wenn das Integrationsgebiet nur eine oder mehrere Massen umfaßt. Wird die Integration jedoch über den ganzen unendlichen Raum erstreckt, so ist infolge der POISSON-Gleichung für U und U_i

$$\int \varrho v_i U (d x)^3 = \int \varrho U_i (d x)^3 \tag{79,52}$$

und außerdem

$$\int \varrho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}(d x)^3 = \frac{1}{2}\int x_i \left(\varrho \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)(d x)^3. \tag{79,53}$$

Die letzte Gleichung läßt sich am einfachsten dadurch verifizieren, daß man beachtet, daß die Funktion

$$Q_i = x_i U - 2 \frac{\partial W}{\partial x_i} \tag{79,54}$$

einer POISSON-Gleichung der Form

$$\Delta Q_i = -4 \pi \gamma \varrho x_i \tag{79,55}$$

genügt.

Wegen (79,52) und (79,53) heben sich dann auf der rechten Seite der Gleichung (79,51) alle Integrale außer dem ersten gegeneinander auf, und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}\int x_i \varrho \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - \frac{1}{2}U\right)\right\}(dx)^3 = \int G_i (d x)^3 = P_i. \tag{79,56}$$

Hier ist P_i nach (79,15) eine Konstante. Deshalb läßt sich die Formel (79,56) integrieren, und zwar erhält man

$$\int x_i \varrho \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - \frac{1}{2}U\right)\right\}(d x)^3 - t P_i = K_i, \tag{79,57}$$

wo K_i eine neue Konstante ist. Beachten wir die Konstanz der Gesamtmasse M, die durch Formel (79,44) definiert ist, so können wir mit Hilfe der Beziehungen

$$M X_i = \int x_i \varrho \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - \frac{1}{2}U\right)\right\}(d x)^3 \tag{79,58}$$

drei Größen X_i einführen, die sich als die Koordinaten des Schwerpunktes des Massensystems deuten lassen. Die Formel (79,57), die jetzt lautet

$$M X_i - t P_i = K_i, \tag{79,59}$$

stellt also das Gesetz für die Bewegung des Schwerpunktes dar. Die Ausgangsgleichung (79,08) kann man als das Ergebnis einer Differentiation der Beziehung (79,59) nach der Zeit auffassen.

§ 80 Ergänzende Bemerkungen zum Problem der Bewegung eines Systems von Körpern. Die explizite Form der Bewegungsintegrale für den Fall nichtrotierender Massen

Im vorhergehenden Paragraphen wurden die Bewegungsintegrale eines Systems von Körpern unter der Voraussetzung abgeleitet, daß im Inneren jedes Körpers die nichtrelativistischen Bewegungsgleichungen für das Kontinuum (79,01)—(79,04) erfüllt sind. Es erhebt sich nun die Frage, ob die gefundenen Bewegungsintegrale gültig bleiben, wenn man die Bewegungsgleichungen für das Kontinuum innerhalb der Körper als nur angenähert erfüllt ansieht (wie in § 73) und stattdessen lediglich fordert, daß die Bewegungsgleichungen für die Körper als Ganzes befriedigt werden. Dabei muß man selbstverständlich zu der Annahme zurückkehren, daß die Körper wie starre rotieren.

Für den Impuls läßt sich diese Frage sehr einfach beantworten. Die in § 75 und § 77 erhaltenen Bewegungsgleichungen besagen ja, daß die Größen

$$P_{ai} = \int_{(a)} G_i \, (dx)^3 \tag{80,01}$$

der Beziehung

$$\frac{dP_{ai}}{dt} = F_{ai} \tag{80,02}$$

genügen, wobei nach (75,33)

$$\sum_a F_{ai} = 0 \tag{80,03}$$

ist. Die Konstanz der Größen

$$P_i = \int G_i \, (dx)^3 \tag{80,04}$$

ist also eine Folge der Bewegungsgleichungen für die Körper als Ganzes.

Dasselbe kann man von den Größen

$$M_{ik} = \int (x_i G_k - x_k G_i) \, (dx)^3 \tag{80,05}$$

sagen, die den Drehimpuls des Systems darstellen. Die Gleichungen für die Rotationsbewegung haben wir (in § 72) nur in NEWTONscher Näherung auf-

gestellt. Die genaueren Gleichungen für die Summe von Bahn- und Eigendrehimpuls lauten aber

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} (x_i G_k - x_k G_i)\,(dx)^3 = L_{ik}^{(a)}\,. \tag{80,06}$$

Dabei ist $L_{ik}^{(a)}$ die Summe der Integrale auf der rechten Seite von (79,20), die jetzt aber nicht über den ganzen unendlichen Raum, sondern nur über das Gebiet der Masse (a) erstreckt werden. Wie in § 79 bewiesen wurde, besteht die Gleichung

$$\sum_a L_{ik}^{(a)} = 0, \tag{80,07}$$

so daß die Konstanz der Größen M_{ik} eine Folge der Gleichungen (80,06) für die Rotationsbewegung ist.

Wir wollen nun die Gültigkeit der Beziehung

$$\int\limits_{(a)} g\,\nabla_\alpha T^{\alpha 0}\,(dx)^3 = 0 \tag{80,08}$$

prüfen. Diese Beziehung muß erfüllt sein, damit die entsprechende Harmonizitätsbedingung gilt. Ist sie andererseits erfüllt, so besteht auch die Beziehung (79,06), die mit dem Energieintegral zusammenhängt.

Die Umformungen, die uns von (79,06) zu (79,38) führten, bleiben auch in dem Fall gültig, daß alle Integrale über das Gebiet nur einer einzigen Masse erstreckt werden. Deshalb können wir sofort schreiben

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\,v^2 + \Pi - U\right)\right\}(dx)^3 + \frac{1}{c^2}\int\limits_{(a)} \varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,(dx)^3 = 0. \tag{80,09}$$

Da nun für sich

$$\int\limits_{(a)} \varrho\,(dx)^3 = M_a = \text{const} \tag{80,10}$$

ist, so muß auch

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)} \varrho\left(\frac{1}{2}\,v^2 + \Pi - U\right)(dx)^3 + \int\limits_{(a)} \varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,(dx)^3 = 0 \tag{80,11}$$

sein. Diese Beziehung gilt auf Grund der Bewegungsgleichungen (79,01)—(79,04) für das Kontinuum. Wir müssen nun zeigen, daß sie angenähert auch dann erfüllt ist, wenn die Bewegungsgleichungen für das Kontinuum nur im Mittel befriedigt werden und angenommen wird, daß der Körper wie ein starrer Körper, aber nicht unbedingt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, rotiert (vgl. § 73). Dann läuft das auf eine Nachprüfung der Beziehung

$$\int\limits_{(a)} \varrho\,v_i\left(w_i - \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)(dx)^3 = 0 \tag{80,12}$$

hinaus. Diese ergibt sich aus (80,11) durch Differentiation, wobei zu beachten ist, daß die elastische Energie konstant bleibt; w_i ist dabei die Beschleunigung, für die in § 73 der Ausdruck (73,07) angegeben wurde. Der Integrand in (80,12) ist die mit v_i multiplizierte linke Seite von (73,08). Die Gleichung (80,12) läßt sich mit Hilfe der Formel

$$\int\limits_{(a)} \varrho\, v_i \left[\dot{\omega}_{ji}^{(a)} - \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_a\right] (x_j - a_j)\, (d\,x)^3 = 0\,, \tag{80,13}$$

die sich auch in der Form

$$\frac{d\,T_a}{d\,t} = \frac{1}{2}\, \dot{I}_{ij}^{(a)} \left(\frac{\partial^2 U^{(a)}}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_a \tag{80,14}$$

schreiben läßt, leicht verifizieren. Diese Formel stimmt mit (72,32) überein und ist auf Grund der Gleichungen für die Rotationsbewegung des Körpers erfüllt. Bei der Nachprüfung der Beziehung (80,11) kann man auch folgendermaßen schließen. Zerlegt man das Potential U in einen inneren und einen äußeren Anteil und benutzt die Gleichungen (71,19) und (72,09), die das Verschwinden der Resultierenden der inneren Kräfte und ihrer Momente ausdrücken, so kann man schreiben

$$\int \varrho\, \frac{\partial u_a}{\partial t}\, (d\,x)^3 = - \int \varrho\, v_i\, \frac{\partial u_a}{\partial x_i}\, (d\,x)^3 = 0\,. \tag{80,15}$$

Außerdem gilt offenbar

$$\frac{d}{d\,t} \int\limits_{(a)} \varrho\, (\Pi - u_a)\, (d\,x)^3 = 0\,. \tag{80,16}$$

Die Gleichung (80,11) reduziert sich also auf eine Beziehung, in der nur das äußere Potential $U^{(a)}$ auftritt, nämlich auf

$$\frac{d}{d\,t} \int\limits_{(a)} \varrho \left(\frac{1}{2}\, v^2 - U^{(a)}\right) (d\,x)^3 + \int\limits_{(a)} \varrho\, \frac{\partial U^{(a)}}{\partial t}\, (d\,x)^3 = 0\,. \tag{80,17}$$

Setzen wir hier den Wert von $U^{(a)}(\mathfrak{r})$ aus (71,27) ein und benutzen die Gleichungen für die Translations- und die Rotationsbewegung (71,35) und (72,32), so können wir uns überzeugen, daß die Gleichung (80,17) erfüllt ist.

Die für die Gültigkeit der Harmonizitätsbedingung notwendige Beziehung (80,08) ist also schon infolge der anderen Beziehungen von der Form (70,21) erfüllt, ähnlich wie in der Punktmechanik der Energieerhaltungssatz aus den Bewegungsgleichungen folgt.

Entsprechend kann man nachweisen, daß die Gleichungen für die Translations- und die Rotationsbewegung für die Erfüllung der Beziehung (79,51) und damit auch für die Gültigkeit des Gesetzes der Schwerpunktsbewegung hinreichend sind.

Wie wir bereits in § 79 erwähnt haben, ergibt sich bei der angenommenen Genauigkeit der Rechnung das Energieintegral aus (79,06) nur in NEWTONscher Näherung. Für nichtrotierende Körper mit Kugelsymmetrie kann man aber das Energieintegral auch in der darauffolgenden Näherung leicht aufschreiben. In diesem Fall besteht die Bewegung nur in einer Translation, für welche wir die Gleichungen schon in der LAGRANGEschen Form aufgestellt haben; man kann also zur Ableitung des Energieintegrals von der in § 78 betrachteten LAGRANGE-Funktion ausgehen. Führen wir die effektive Masse

$$m_a = M_a + \frac{2}{3c^2}\varepsilon_a \tag{80,18}$$

ein, so läßt sich die LAGRANGE-Funktion nach Formel (78,03) schreiben:

$$L = K + K_1 - \Phi - \Psi. \tag{80,19}$$

Dabei ist nach (76,19)

$$K = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{a}_i^2 + \frac{1}{c^2}\sum_a \frac{1}{8} m_a (\dot{a}_i^2)^2. \tag{80,20}$$

K_1 hat die frühere Bedeutung (78,05), worin wir die Massen M_a, $M_b, \ldots$ durch die effektiven Massen m_a, $m_b, \ldots$ ersetzen können:

$$K_1 = \frac{1}{4c^2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}} \frac{\gamma\, m_a\, m_b}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}\left(3\dot{a}_i^2 + 3\dot{b}_i^2 - 8\dot{a}_i\dot{b}_i\right) +$$

$$+ \frac{1}{4c^2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}} \gamma\, m_a\, m_b\, \dot{a}_i\, \dot{b}_k \frac{\partial^2}{\partial a_i\, \partial a_k}|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|. \tag{80,21}$$

Φ ist die NEWTONsche potentielle Energie (mit effektiven Massen)

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}} \frac{\gamma\, m_a\, m_b}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}. \tag{80,22}$$

Nach (78,13) umfaßt dieser Ausdruck die Terme Φ_1 und Φ_2 (wegen der Kugelsymmetrie ist übrigens $\Phi_2 = 0$). Die Größe Ψ schließlich hat den früheren Wert (78,15), worin man ebenfalls die Massen durch ihre effektiven Werte ersetzen kann:

$$\Psi = \frac{\gamma^2}{4c_0^2}\sum_{\substack{a,b\\(a\neq b)}} \frac{m_a\, m_b\,(m_a+m_b)}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|^2} + \frac{\gamma^2}{6c_0^2}\sum_{\substack{a,b,c\\(a\neq b),\,(b\neq c),\,(c\neq a)}} m_a\, m_b\, m_c \times$$

$$\times\left(\frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|\,|\mathfrak{a}-\mathfrak{c}|} + \frac{1}{|\mathfrak{b}-\mathfrak{c}|\,|\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|} + \frac{1}{|\mathfrak{c}-\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{c}-\mathfrak{b}|}\right). \tag{80,23}$$

Nach der Formel

$$\sum_a \dot{a}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - L = E \tag{80,24}$$

erhalten wir für das Energieintegral (in nichtrelativistischer Normierung)

$$E = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{a}_i^2 + \frac{1}{c^2} \sum_a \frac{3}{8} m_a (\dot{a}_i^2)^2 + K_1 + \Phi + \Psi. \tag{80,25}$$

Die übrigen Bewegungsintegrale ergeben sich ebenfalls leicht aus der LAGRANGE-Funktion. Wir erhalten die Impulsintegrale

$$\sum_a P_{ai} = P_i \tag{80,26}$$

mit

$$P_{ai} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} = \dot{a}_i \left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2 - \frac{1}{2c^2} \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \right) + \\ + \frac{7}{2c^2} \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b (\dot{a}_i - \dot{b}_i)}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} - \frac{1}{2c^2} \sum_b{}' \gamma m_a m_b \dot{b}_k \frac{(a_i - b_i)(a_k - b_k)}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|^3}, \tag{80,27}$$

die Drehimpulsintegrale

$$\sum_a (a_i P_{ak} - a_k P_{ai}) = M_{ik} \tag{80,28}$$

und die Integrale der Schwerpunktsbewegung[1])

$$M X_i - P_i t = K_i = \text{const} \tag{80,29}$$

mit

$$M X_i = \sum_a a_i \left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2 - \frac{1}{2c^2} \sum_b{}' \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \right), \tag{80,30}$$

wobei

$$M = \sum_a \left(m_a + \frac{1}{2c^2} m_a \dot{a}_k^2 \right) - \frac{1}{2c^2} \sum_{\substack{a,b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \tag{80,31}$$

die Gesamtmasse des Systems ist. Der genauere Wert für die Gesamtmasse lautet

$$M = \sum_a m_a + \frac{E}{c^2}, \tag{80,32}$$

worin E die Bedeutung (80,25) hat.

---

[1]) Die Konstanten K_i in (80,29) dürfen nicht mit den Größen K_1 und K_2 verwechselt werden, die in der LAGRANGE-Funktion auftreten.

§ 81 Das Problem zweier Körper mit endlicher Masse

Für zwei Körper lassen sich die aus der LAGRANGE-Funktion (80,19) gewonnenen Bewegungsgleichungen integrieren. Es ist dabei zweckmäßig, zu neuen Bezeichnungen überzugehen, die in der Mechanik gebräuchlicher sind. Als Indizes der Massen benutzen wir nicht die Buchstaben a und b (die bei uns auch die Koordinaten der Massen bezeichnet haben), sondern die Zahlen 1 und 2. Die Koordinaten der Masse 1 sind jetzt die x_1, y_1, z_1, die Koordinaten der Masse 2 die x_2, y_2, z_2; wir benutzen dafür auch die Bezeichnungen der dreidimensionalen Vektorrechnung $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$.

In den neuen Bezeichnungen lauten die LAGRANGE-Funktion

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathfrak{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathfrak{r}}_2^2 + \frac{m_1}{8 c^2} (\dot{\mathfrak{r}}_1^2)^2 + \frac{m_2}{8 c^2} (\dot{\mathfrak{r}}_2^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2 c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} (3 \dot{\mathfrak{r}}_1^2 + 3 \dot{\mathfrak{r}}_2^2 - 7 (\dot{\mathfrak{r}}_1 \cdot \dot{\mathfrak{r}}_2)) - \\ & - \frac{1}{2 c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|^3} (\dot{\mathfrak{r}}_1 \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)) (\dot{\mathfrak{r}}_2 \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)) + \\ & + \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} - \frac{\gamma^2}{2 c^2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|^2} \end{aligned} \tag{81,01}$$

und das Energieintegral

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathfrak{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathfrak{r}}_2^2 + \frac{3 m_1}{8 c^2} (\dot{\mathfrak{r}}_1^2)^2 + \frac{3 m_2}{8 c^2} (\dot{\mathfrak{r}}_2^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2 c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} (3 \dot{\mathfrak{r}}_1^2 + 3 \dot{\mathfrak{r}}_2^2 - 7 (\dot{\mathfrak{r}}_1 \cdot \dot{\mathfrak{r}}_2)) - \\ & - \frac{1}{2 c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|^3} (\dot{\mathfrak{r}}_1 \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)) (\dot{\mathfrak{r}}_2 \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)) - \\ & - \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} + \frac{\gamma^2}{2 c^2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|^2}. \end{aligned} \tag{81,02}$$

Wir schreiben auch die Formel (80,27) für den Impuls einer der Massen in die neuen Bezeichnungen um. Die Komponente $P_x^{(1)}$ beträgt

$$\begin{aligned} P_x^{(1)} = {} & \dot{x}_1 \left(m_1 + \frac{1}{2 c^2} m_1 \dot{\mathfrak{r}}_1^2 - \frac{1}{2 c^2} \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} \right) + \\ & + \frac{7}{2 c^2} \frac{\gamma m_1 m_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|} - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{2 c^2 |\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|^3} (\dot{\mathfrak{r}}_2 \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)). \end{aligned} \tag{81,03}$$

Der Impuls der anderen Masse ergibt sich hieraus durch Vertauschung der Indizes 1 und 2; der Gesamtimpuls ist dann

$$P_x = P_x^{(1)} + P_x^{(2)} \quad \text{usw.} \tag{81,04}$$

Wir wollen auch eine Komponente des Gesamtdrehimpulses hinschreiben, etwa

$$M_{xy} = x_1\, P_y^{(1)} - y_1\, P_x^{(1)} + x_2\, P_y^{(2)} - y_2\, P_x^{(2)}\,. \tag{81,05}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} M_{xy} = {} & (x_1\,\dot y_1 - y_1\,\dot x_1)\left(m_1 + \frac{1}{2\,c^2}\,m_1\,\dot{\mathfrak r}_1^2 + \frac{3}{c^2}\,\frac{\gamma\, m_1\, m_2}{|\mathfrak r_1 - \mathfrak r_2|}\right) + \\ & + (x_2\,\dot y_2 - y_2\,\dot x_2)\left(m_2 + \frac{1}{2\,c^2}\,m_2\,\dot{\mathfrak r}_2^2 + \frac{3}{c^2}\,\frac{\gamma\, m_1\, m_2}{|\mathfrak r_1 - \mathfrak r_2|}\right) - \\ & - \frac{7\,\gamma\, m_1\, m_2}{2\,c^2\,|\mathfrak r_1 - \mathfrak r_2|}\,(x_1\,\dot y_2 - y_1\,\dot x_2 + x_2\,\dot y_1 - y_2\,\dot x_1) + \\ & + \frac{\gamma\, m_1\, m_2}{2\,c^2\,|\mathfrak r_1 - \mathfrak r_2|}\,((\dot{\mathfrak r}_1 + \dot{\mathfrak r}_2)\cdot(\mathfrak r_1 - \mathfrak r_2))\,(x_1\, y_2 - x_2\, y_1)\,. \end{aligned} \tag{81,06}$$

Führen wir ein Koordinatensystem ein, das mit dem Schwerpunkt verbunden ist, so können wir die Integrale der Schwerpunktsbewegung folgendermaßen schreiben

$$m_1\,\mathfrak r_1\left(1 + \frac{\dot{\mathfrak r}_1^2}{2\,c^2} - \frac{1}{2\,c^2}\,\frac{\gamma\, m_2}{|\mathfrak r_1 - \mathfrak r_2|}\right) + m_2\,\mathfrak r_2\left(1 + \frac{\dot{\mathfrak r}_2^2}{2\,c^2} - \frac{1}{2\,c^2}\,\frac{\gamma\, m_1}{|\mathfrak r_1 - \mathfrak r_2|}\right) = 0\,. \tag{81,07}$$

Wir führen nun die Schwerpunktskoordinaten im NEWTONschen Sinn

$$\mathfrak r_0 = \frac{m_1\,\mathfrak r_1 + m_2\,\mathfrak r_2}{m_1 + m_2} \tag{81,08}$$

sowie die Relativkoordinaten

$$\mathfrak r = \mathfrak r_1 - \mathfrak r_2 \tag{81,09}$$

ein. Dann wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak r_1 &= \mathfrak r_0 + \frac{m_2}{m_0}\,\mathfrak r\,, \\ \mathfrak r_2 &= \mathfrak r_0 - \frac{m_1}{m_0}\,\mathfrak r\,, \end{aligned}\right\} \tag{81,10}$$

wo

$$m_0 = m_1 + m_2 \tag{81,11}$$

die Gesamtmasse ist. Ferner führen wir die Bezeichnung

$$m^* = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} \tag{81,12}$$

für die reduzierte Masse ein und bemerken, daß

$$m_0\, m^* = m_1\, m_2 \tag{81,13}$$

ist. Wir haben dann

$$m_1 \dot{\mathfrak{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathfrak{r}}_2^2 = m_0 \dot{\mathfrak{r}}_0^2 + m^* \dot{\mathfrak{r}}^2, \tag{81,14}$$

$$\begin{aligned} m_1 (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + m_2 (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) = \\ = m_0 (x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0) + m^* (x \dot{y} - y \dot{x}), \end{aligned} \tag{81,15}$$

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = x_0 y - x y_0 . \tag{81,16}$$

Aus der Formel (81,07) geht unmittelbar hervor, daß der Radiusvektor des NEWTONschen Schwerpunktes sowie auch seine Geschwindigkeit ständig klein bleiben. Nehmen wir die Größenordnungen von $\mathfrak{r}$ und $\dot{\mathfrak{r}}$ zu R und q an, so wird

$$\mathfrak{r}_0 \sim R \frac{q^2}{c^2}; \quad \dot{\mathfrak{r}}_0 \sim \frac{q^3}{c^2}. \tag{81,17}$$

Deshalb können wir in allen Korrekturgliedern, die im Nenner c^2 enthalten, statt (81,10) schreiben

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{m_2}{m_0} \mathfrak{r}; \quad \mathfrak{r}_2 = - \frac{m_1}{m_0} \mathfrak{r} \tag{81,18}$$

und

$$\dot{\mathfrak{r}}_1 = \frac{m_2}{m_0} \dot{\mathfrak{r}}; \quad \dot{\mathfrak{r}}_2 = - \frac{m_2}{m_0} \dot{\mathfrak{r}} . \tag{81,19}$$

Führen wir diese Vernachlässigungen in der Gleichung (81,07) durch, so lautet sie[1])

$$m_0 \mathfrak{r}_0 = \frac{(m_1 - m_2)}{2 c^2 m_0} \mathfrak{r} \left(m^* \dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{\gamma m^* m_0}{r} \right). \tag{81,20}$$

Daraus ist ersichtlich, daß der NEWTONsche Schwerpunkt $\mathfrak{r}_0$ bei finiten Bewegungen um seine mittlere Lage oszilliert.

Wir wollen nun die Integrale der Energie und des Drehimpulses unter der Voraussetzung aufschreiben, daß $\mathfrak{r}_0$ klein ist. Sogar in den (NEWTONschen) Haupttermen der Ausdrücke (81,02) und (81,06) kann man die Größen $\mathfrak{r}_0$ und $\dot{\mathfrak{r}}_0$ vernachlässigen, da sie darin nach (81,14) und (81,15) quadratisch eingehen; das bedeutet, daß man überall die Werte (81,18) und (81,19) benutzen darf. Gehen wir mit diesen Werten in das Energieintegral (81,02) ein und dividieren das Ergebnis durch die reduzierte Masse m^*, so erhalten wir für die Größe

$$E_0 = \frac{E}{m^*} \tag{81,21}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} E_0 = \frac{1}{2} \dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{3}{8} \left(1 - \frac{3 m^*}{m_0} \right) (\dot{\mathfrak{r}}^2)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2 r} (3 m_0 + m^*) \dot{\mathfrak{r}}^2 + \frac{\gamma}{2 r^3} m^* (\mathfrak{r} \cdot \dot{\mathfrak{r}})^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2 r^2} \right\}. \end{aligned} \tag{81,22}$$

---

[1]) Diese Formel wurde zum ersten Mal in unserer Arbeit aus dem Jahre 1941 abgeleitet [42].

Jetzt gehen wir mit den obigen Werten für $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ in das Drehimpulsintegral ein. Wegen (81,16) und (81,20) ist der letzte Term in (81,06) mit großer Genauigkeit gleich Null, während die übrigen Terme liefern

$$\frac{1}{m^*} M_{xy} = \left\{1 + \frac{1}{2c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right)\dot{\mathfrak{r}}^2 + \frac{\gamma}{c^2 r}(3m_0 + m^*)\right\}(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (81,23)$$

Analoge Ausdrücke findet man für die anderen Komponenten des Drehimpulses. Aus diesen Ausdrücken geht hervor, daß die Bahn im Raum der relativen Koordinaten x, y, z eben ist. Wählen wir die Bahnebene als x, y-Ebene, so können wir wie gewöhnlich

$$z = 0; \quad \dot{z} = 0 \quad (81,24)$$

setzen und Polarkoordinaten r, φ nach den Formeln

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi \quad (81,25)$$

einführen. Wenn wir die Konstante auf der linken Seite von (81,23) mit μ bezeichnen, so haben wir

$$\mu = \left\{1 + \frac{1}{2c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right)\dot{\mathfrak{r}}^2 + \frac{\gamma}{c^2 r}(3m_0 + m^*)\right\} r^2\dot{\varphi}. \quad (81,26)$$

Bevor wir fortfahren, wollen wir die hier gefundenen Integrale für die Energie und den Drehimpuls mit denen vergleichen, die wir in § 58 bei der Untersuchung der Bewegung einer unendlich kleinen Masse im Feld einer großen oder endlichen Masse erhielten. Es ist zu erwarten, daß für $m^* = 0$ die Formeln des Zweikörperproblems in die des Einkörperproblems übergehen. Das wollen wir nachprüfen. Nach den Formeln (58,26)—(58,31) fanden wir in § 58 folgende Beziehungen

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon = 1 + \frac{E_0}{c^2}, \quad (81,27)$$

$$(r+\alpha)^2\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu. \quad (81,28)$$

Dabei ist

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r-\alpha}{r+\alpha} - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r+\alpha)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right], \quad (81,29)$$

und die Größe α ist der Gravitationsradius der großen Masse, der gleich

$$\alpha = \frac{\gamma m_0}{c^2} \quad (81,30)$$

gesetzt werden kann. Mit

$$v^2 = \dot{\mathfrak{r}}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (81,31)$$

können wir statt (81,29) angenähert schreiben

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r-\alpha}{r+\alpha}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(1+\frac{4\alpha}{r}\right)v^2\right]. \tag{81,32}$$

Daraus folgt

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{r+\alpha}{r-\alpha}}\left[1 + \frac{1}{2c^2}\left(1+\frac{4\alpha}{r}\right)v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}\right] \tag{81,33}$$

und weiter

$$\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\frac{dt}{d\tau} = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3\alpha}{2c^2 r}v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{\alpha^2}{2r^2}. \tag{81,34}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (81,27) ein und ersetzen die Größe α durch ihren Wert (81,30), so erhalten wir für E_0

$$E_0 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{8}v^4 + \frac{3}{2}\frac{\gamma m_0}{r}v^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2r^2}\right). \tag{81,35}$$

Der gefundene Ausdruck für E_0 stimmt mit der Formel (81,22) überein, wenn man in dieser $m^* = 0$ setzt. Um die Gleichungen (81,26) und (81,28) zu vergleichen, spalten wir in der letzteren den Faktor $r^2\dot{\varphi}$ ab und schreiben sie in der Form

$$\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2\frac{dt}{d\tau}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \mu. \tag{81,36}$$

Den Wert von $\frac{dt}{d\tau}$ kann man aus (81,33) entnehmen, wobei Glieder von der Ordnung v^4/c^4 weggelassen werden dürfen; dann wird

$$\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2\frac{dt}{d\tau} = 1 + \frac{3\alpha}{r} + \frac{v^2}{2c^2}. \tag{81,37}$$

Ersetzen wir darin den Gravitationsradius α durch seinen Wert (81,30) und gehen damit in (81,36) ein, so erhalten wir

$$\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3\gamma m_0}{c^2 r}\right)r^2\frac{d\varphi}{dt} = \mu. \tag{81,38}$$

Wenn man in der Gleichung (81,26) $m^* = 0$ setzt, so stimmt sie mit (81,38) überein.

Im Limes $m^* \to 0$ gehen also die Bewegungsintegrale des Problems zweier endlicher Massen tatsächlich in die entsprechenden Integrale der Gleichungen für die geodätische Linie über, die die Bewegung einer unendlich kleinen Masse im Feld einer endlichen Masse bestimmen. Ein solcher Vergleich war nur deshalb möglich, weil wir in beiden Fällen dieselben, nämlich harmonische Koordinaten benutzt haben.

Wir setzen nun die Untersuchung der Bewegungsgleichungen zweier endlicher Massen fort und suchen die Bahngleichung der Relativbewegung auf. Für das Quadrat der Geschwindigkeit (81,31) behalten wir die Bezeichnung v^2 statt $\dot{\mathfrak{r}}^2$ bei. Setzen wir noch

$$u = \frac{1}{r}, \tag{81,39}$$

so erhalten wir die Identität

$$v^2 = \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right). \tag{81,40}$$

Nach Multiplikation mit dem Quadrat des Faktors von $r^2\dot{\varphi}$ in der Formel (81,26) ergibt sich daraus

$$v^2 + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) v^4 + \frac{2\gamma}{c^2 r}(3\,m_0 + m^*) v^2 = \mu^2 \left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right). \tag{81,41}$$

Auf der linken Seite können wir für v^2 den Wert aus dem Energieintegral (81,22) benutzen, in das wir statt $(\mathfrak{r}\cdot\dot{\mathfrak{r}})^2$ den Ausdruck

$$(\mathfrak{r}\cdot\dot{\mathfrak{r}})^2 = r^2 v^2 - \mu^2 \tag{81,42}$$

einsetzen. Mit (81,42) lautet dann die Formel (81,22) für E_0

$$E_0 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{3}{8c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) v^4 + \\ + \frac{\gamma}{2c^2 r}(3m_0 + 2m^*) v^2 + \frac{\gamma^2 m_0^2}{2c^2 r^2} - \frac{\gamma m^* \mu^2}{2c^2 r^3}. \tag{81,43}$$

Diese Gleichung lösen wir angenähert nach v^2 auf und setzen den so gefundenen Wert für v^2 in (81,41) ein; dann erhalten wir, wenn wir noch u statt $1/r$ schreiben,

$$\mu^2\left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right) = 2E_0 + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{3m^*}{m_0}\right) E_0^2 + \\ + 2\gamma m_0\left(1 + \frac{1}{c^2}\left(4 - \frac{3m^*}{m_0}\right) E_0\right) u + \frac{3\gamma^2 m_0^2}{c^2}\left(2 - \frac{m^*}{m_0}\right) u^2 + \frac{\gamma m^*}{c^2}\mu^2 u^3. \tag{81,44}$$

Für $m^* = 0$ geht diese Gleichung mit der erforderlichen Genauigkeit in (58,36) über. Zur bequemeren Untersuchung dieser Gleichung führen wir anstelle der Integrationskonstanten E_0 und μ die beiden neuen Konstanten a und p ein, wobei

$$E_0 = -\frac{\gamma m_0}{2a}; \qquad \mu^2 = \gamma m_0 p \tag{81,45}$$

ist. Außerdem setzen wir, in Einklang mit (81,30),

$$\frac{\gamma m_0}{c^2} = \alpha; \qquad \frac{\gamma m^*}{c^2} = \alpha^*. \tag{81,46}$$

In der NEWTONschen Näherung stellen die Größen a und p die große Halbachse und den Parameter der Ellipse dar (wir beschränken uns hier auf den Fall einer finiten Bewegung). Mit den neuen Bezeichnungen lautet die Gleichung (81,44)

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{1}{a\,p} + \frac{\alpha - 3\alpha^*}{4\,a^2 p} + $$
$$+ \left(\frac{2}{p} - \frac{4\alpha}{a\,p} + \frac{3\alpha^*}{a\,p}\right) u - \left(1 - \frac{6\alpha}{p} + \frac{3\alpha^*}{p}\right) u^2 + \alpha^* u^3. \tag{81,47}$$

Das Polynom auf der rechten Seite von (81,47) hat (für $a > p$) die positiven Wurzeln u_1 und u_2, welche nahezu den Wurzeln der Gleichung

$$-\frac{1}{a\,p} + \frac{2}{p} u - u^2 = 0 \tag{81,48}$$

gleich sind; letztere lauten

$$u_1^0 = \frac{1+e}{p}; \qquad u_2^0 = \frac{1-e}{p} \tag{81,49}$$

mit

$$1 - e^2 = \frac{p}{a}. \tag{81,50}$$

Außerdem besitzt das Polynom noch die große Wurzel u_3, für die man leicht die Beziehung

$$\alpha^* u_3 = 1 - \frac{6\alpha - \alpha^*}{p} \tag{81,51}$$

findet. Deshalb läßt sich die Differentialgleichung (81,47) folgendermaßen schreiben

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = (u_1 - u)\,(u - u_2)\left(1 - \frac{6\,\alpha - \alpha^*}{p} - \alpha^* u\right). \tag{81,52}$$

Wir führen nun die Substitution

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2}\cos\psi \tag{81,53}$$

durch. Die Gleichung für ψ lautet dann

$$\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 = 1 - \frac{6\alpha}{p} - \frac{\alpha^* e}{p}\cos\psi. \tag{81,54}$$

In dem Korrekturterm haben wir für die Wurzeln die Näherungswerte (81,49) benutzt. Daraus ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = 1 + \frac{3\alpha}{p} + \frac{\alpha^* e}{2p}\cos\psi. \tag{81,55}$$

Einer Änderung von r von seinem größten bis zu seinem kleinsten Wert und wieder zurück entspricht eine Zunahme der Größe ψ um 2π. Während dieser Zeit nimmt der Winkel φ um etwas mehr als 2π zu, nämlich um $2\pi + \Delta\varphi$, mit

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\alpha}{p}. \tag{81,56}$$

Diese Formel stimmt mit der Formel (58,43) überein, die die Verschiebung des Perihels pro Umlauf angibt, jedoch haben die darin auftretenden Konstanten eine etwas andere Bedeutung. Bei gegebenem Wert des Parameters p hängt die Verschiebung nur von der Summe der Massen der beiden Komponenten des Systems (Doppelstern) ab. Von den Integrationskonstanten tritt in dem Ausdruck für die Verschiebung nur der Drehimpuls auf.

Das Auftreten eines kubischen Termes in der Differentialgleichung (81,47) hat zur Folge, daß die Bahn der Relativbewegung nicht mehr eine präzessierende Ellipse, sondern eine präzessierende Kurve höherer Ordnung ist, die allerdings nur wenig von einer Ellipse abweicht [21].

KAPITEL VII

NÄHERUNGSLÖSUNGEN, ERHALTUNGSSÄTZE UND EINIGE GRUNDSÄTZLICHE FRAGEN

§ 82 Die Gravitationspotentiale für nichtrotierende Massen (räumliche Komponenten)

Im vorigen Kapitel haben wir die Gravitationspotentiale nur mit der Genauigkeit bestimmt, mit welcher wir sie zur Herleitung der Bewegungsgleichungen eines Systems von Körpern brauchten. Jetzt wollen wir die Gravitationspotentiale genauer bestimmen, beschränken uns aber angesichts der Kompliziertheit des Problems auf den Fall nichtrotierender kugelsymmetrischer Massen.

In § 67 gaben wir die Formeln

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4\,U}{c^3} + \frac{4\,S}{c^5}, \tag{82,01}$$

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\,U_i}{c^3} + \frac{4\,S_i}{c^5}, \tag{82,02}$$

$$\mathfrak{g}^{ik} = -\,c\,\delta_{ik} + \frac{4\,S_{ik}}{c^3} \tag{82,03}$$

an, in denen U das NEWTONsche Potential und U_i das Vektorpotential der Gravitation ist; die Terme mit S, S_i und S_{ik} sind Korrekturterme. Wir haben diese Korrekturen nicht einzeln bestimmt, da wir zur Ableitung der Bewegungsgleichungen außer dem Vektorpotential U_i nur die Größe

$$U^* = U + \frac{1}{c^2}\,(S + S_{kk} - 2\,U^2) \tag{82,04}$$

kennen mußten [Formel (67,11)], die nach (68,30) der Gleichung

$$\Delta\,U^* - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = -\,4\,\pi\,\gamma\,(c^2\,T^{00} + T^{kk}) \tag{82,05}$$

genügt. Nun wollen wir auch die Korrekturterme berechnen; dabei gehen wir von der in § 68 abgeleiteten Näherungsform der EINSTEINschen Gleichungen

$$\frac{1}{2\,c}\,\Delta\,\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\,c^3}\,\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial t^2} + N^{\mu\nu} = \frac{8\,\pi\,\gamma\,g}{c^4}\,T^{\mu\nu} \tag{82,06}$$

aus. Zunächst betrachten wir die Gleichung für $\mathfrak{g}^{ik}$. Darin berücksichtigen wir die Terme bis zur vierten Ordnung in $1/c$, während wir Terme höherer Ordnung vernachlässigen.

Nach (66,07) können wir dann setzen

$$-g\,T^{ik} = \varrho v_i v_k - p_{ik}. \tag{82,07}$$

In dem Ausdruck (68,16) für N^{ik} genügt in dieser Näherung der Hauptterm

$$N^{ik} = -\frac{2}{c^4} Q_{ik}, \tag{82,08}$$

wobei wir, analog zu (71,16),

$$Q_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\,(\text{grad } U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k} \tag{82,09}$$

gesetzt haben. Die zweite Ableitung nach der Zeit in der Gleichung für $\mathfrak{g}^{ik}$ können wir weglassen. Statt $\mathfrak{g}^{ik}$ führen wir den Ausdruck (82,03) ein; multiplizieren wir dann noch mit $c^4/2$ und bringen den Term Q_{ik} auf die rechte Seite, so erhalten wir folgende Gleichung für S_{ik}

$$\Delta S_{ik} = Q_{ik} - 4\pi\gamma\,(\varrho\, v_i v_k - p_{ik}). \tag{82,10}$$

Wir erinnern daran, daß das Vektorpotential der Gravitation U_i der Gleichung

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\varrho\, v_i \tag{82,11}$$

genügt, und daß wegen der POISSON-Gleichung für das NEWTONsche Potential U die Beziehung

$$\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_k} = 4\pi\gamma\varrho\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{82,12}$$

erfüllt ist. Deshalb folgt aus den Gleichungen (82,10) und (82,11)

$$\Delta\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}\right) = -4\pi\gamma\left\{\frac{\partial(\varrho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho\, v_i v_k)}{\partial x_k} - \varrho\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right\} \tag{82,13}$$

und, wegen der Bewegungsgleichungen für ein Kontinuum in der Form (66,13),

$$\Delta\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}\right) = 0. \tag{82,14}$$

Da diese Gleichung im ganzen Raum gilt, so wird

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{82,15}$$

d. h., auch die Harmonizitätsbedingung ist erfüllt. Wenn wir über die expliziten Ausdrücke für S_{ik} verfügen, können wir auch durch direktes Einsetzen verifizieren, daß die Bedingung (82,15) wirklich befriedigt wird.

Die Funktionen S_{ik} suchen wir in der Form

$$S_{ik} = U_{ik} + V_{ik}, \tag{82,16}$$

wobei die U_{ik} und V_{ik} den Gleichungen

$$\Delta U_{ik} = -4\pi\gamma\,(\varrho v_i v_k - p_{ik}), \tag{82,17}$$

$$\Delta V_{ik} = Q_{ik} \tag{82,18}$$

genügen.

Setzen wir in der Formel (82,09) für Q_{ik} den Wert

$$U = \sum_a u_a \tag{82,19}$$

für das NEWTONsche Potential ein, so können wir schreiben

$$Q_{ik} = \sum_a Q_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} Q_{ik}^{(ab)} \tag{82,20}$$

mit[1])

$$Q_{ik}^{(aa)} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\,(\operatorname{grad} u_a)^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_a}{\partial x_k}, \tag{82,21}$$

$$Q_{ik}^{(ab)} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\,(\operatorname{grad} u_a \cdot \operatorname{grad} u_b) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_b}{\partial x_k} + \frac{\partial u_a}{\partial x_k}\frac{\partial u_b}{\partial x_i}\right). \tag{82,22}$$

Der Zerlegung (82,20) entsprechend suchen wir die Lösung V_{ik} der Gleichung (82,18) in der Form

$$V_{ik} = \sum_a V_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} V_{ik}^{(ab)}, \tag{82,23}$$

wobei die einzelnen Terme den Gleichungen

$$\Delta V_{ik}^{(aa)} = Q_{ik}^{(aa)}, \tag{82,24}$$

$$\Delta V_{ik}^{(ab)} = Q_{ik}^{(ab)} \tag{82,25}$$

genügen. Diese Gleichungen wollen wir für den Fall nichtrotierender kugelsymmetrischer Massen explizite lösen. In diesem Fall lautet das NEWTONsche Potential der Masse (a) im Außenraum

$$u_a = \frac{\gamma M_a}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|}, \tag{82,26}$$

---

[1]) Die Größe $Q_{ik}^{(aa)}$ haben wir in § 71 mit $q_{ik}^{(a)}$ bezeichnet.

und die Ausdrücke (82,21) und (82,22) für $Q_{ik}^{(aa)}$ und $Q_{ik}^{(ab)}$ nehmen folgende Form an

$$Q_{ik}^{(aa)} = \gamma^2 M_a^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta_{ik}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|^4} - \frac{(x_i - a_i)(x_k - a_k)}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|^6} \right\}, \tag{82,27}$$

$$Q_{ik}^{(ab)} = \gamma^2 M_a M_b \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x_j - a_j)(x_j - b_j)}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|^3 |\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|^3} \delta_{ik} - \right.$$
$$\left. - \frac{(x_i - a_i)(x_k - b_k) + (x_i - b_i)(x_k - a_k)}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|^3 |\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|^3} \right\}. \tag{82,28}$$

Diese Formeln gelten außerhalb der Massen; im Inneren der Massen müßte man strenggenommen die exakteren Ausdrücke (82,21) und (82,22) benutzen.

Der Unterschied zwischen den exakten und den angenäherten Werten für die Größen $Q_{ik}^{(ab)}$ hat jedoch keinen wesentlichen Einfluß auf den Wert der Funktionen $V_{ik}^{(ab)}$; das gilt zumindest dann, wenn die linearen Abmessungen der Massen klein gegenüber ihren gegenseitigen Abständen sind. Deshalb werden wir unter der Größe $Q_{ik}^{(ab)}$ auf der rechten Seite von (82,25) den Ausdruck (82,28) verstehen. Dieser Ausdruck hat in den Punkten $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{b}$ Singularitäten mit Dipol-Charakter, aber keine höheren Singularitäten. Infolgedessen besitzt die Gleichung (82,25) für $V_{ik}^{(ab)}$ eine Lösung, die im ganzen Raum, auch in den Punkten $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{b}$, endlich bleibt und im Unendlichen verschwindet.

Diese Lösung können wir in geschlossener Form angeben. Dazu schreiben wir den Ausdruck (82,28) als Ableitungen der Funktion $\frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|}$ nach den Parametern a_i und b_j:

$$Q_{ik}^{(ab)} = \gamma^2 \frac{M_a M_b}{2} \left(\delta_{ik} \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial b_j} - \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial b_k} - \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_i} \right) \frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|}. \tag{82,29}$$

Dann kann man die Gleichung (82,25) auf die einfachere Gleichung

$$\Delta \varphi = \frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|} \tag{82,30}$$

zurückführen. Ist nämlich φ eine Lösung von (82,30), so ist die Größe

$$V_{ik}^{(ab)} = \frac{\gamma^2 M_a M_b}{2} \left(\delta_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_j \partial b_j} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_i \partial b_k} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_k \partial b_i} \right) \tag{82,31}$$

eine Lösung der Gleichung (82,25).

Die Lösung der Gleichung (82,30) läßt sich aber leicht angeben. Wir bezeichnen mit s den Umfang des Dreiecks mit den Ecken $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$

$$s = |\mathfrak{r}-\mathfrak{a}| + |\mathfrak{r}-\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|. \tag{82,32}$$

Dann genügt die Funktion

$$\varphi = \lg s = \lg(|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}| + |\mathfrak{r}-\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|) \tag{82,33}$$

der Gleichung (82,30), denn es ist

$$\Delta \lg s = \frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|}. \tag{82,34}$$

Die gesuchte Lösung der Gleichung (82,25) hat also die Form

$$V_{ik}^{(ab)} = \frac{\gamma^2 M_a M_b}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j \partial b_j} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i \partial b_k} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_k \partial b_i}\right). \tag{82,35}$$

Man prüft leicht nach, daß dieser Ausdruck überall endlich bleibt und im Unendlichen verschwindet.

Wir wenden uns nun der Gleichung (82,24) für $V_{ik}^{(aa)}$ zu. Legen wir den Koordinatenursprung in den Punkt $\mathfrak{a}$ und beachten die Kugelsymmetrie, so können wir diese Gleichung in der Form

$$\Delta V_{ik}^{(aa)} = \left(\frac{1}{2}\,\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}\right)(u'(r))^2 \tag{82,36}$$

schreiben, wobei wir zur Abkürzung

$$u_a = u(r) \tag{82,37}$$

gesetzt haben. Die Lösung der Gleichung (82,36) suchen wir in der Form

$$V_{ik}^{(aa)} = -\,\delta_{ik} q_0(r) + \left(x_i x_k - \frac{1}{3}\,\delta_{ik} r^2\right) q_2(r). \tag{82,38}$$

Dann müssen q_0 und q_2 den Gleichungen

$$\frac{d^2 q_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dq_0}{dr} = -\frac{1}{6}\,(u'(r))^2, \tag{82,39}$$

$$\frac{d^2 q_2}{dr^2} + \frac{6}{r}\frac{dq_2}{dr} = -\frac{1}{r^2}\,(u'(r))^2 \tag{82,40}$$

genügen; daraus erhalten wir unter Beachtung der Randbedingungen

$$q_0(r) = \frac{1}{6}\int_r^\infty r(u'(r))^2\,dr + \frac{1}{6r}\int_0^r r^2(u'(r))^2\,dr, \tag{82,41}$$

$$q_2(r) = \frac{1}{5}\int_r^\infty \frac{1}{r}\,(u'(r))^2\,dr + \frac{1}{5r^5}\int_0^r r^4(u'(r))^2\,dr. \tag{82,42}$$

Ist L der Radius des Körpers, so gilt für $r > L$

$$u(r) = \frac{\gamma M_a}{r}, \tag{82,43}$$

und die Ausdrücke für $q_0(r)$ und $q_2(r)$ gehen über in

$$q_0(r) = -\frac{\gamma^2 M_a^2}{12 r^2} + \frac{\gamma \varepsilon_a}{3 r}, \tag{82,44}$$

$$q_2(r) = \frac{\gamma^2 M_a^2}{4 r^4} - \frac{\gamma^2 M_a^2}{5 r^5} \lambda_a. \tag{82,45}$$

Dabei ist

$$\lambda_a = L - \frac{1}{\gamma^2 M_a^2} \int_0^L r^4 (u'(r))^2 dr \tag{82,46}$$

eine Länge von der Größenordnung L, und die Größe

$$\varepsilon_a = \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\operatorname{grad} u_a)^2 (dx)^3 = \frac{1}{2\gamma} \int_0^\infty r^2 (u'(r))^2 dr \tag{82,47}$$

das Negative der Gravitationsenergie des Körpers. Setzen wir die gefundenen Werte für $q_0(r)$ und $q_2(r)$ in die Formel (82,38) ein, so erhalten wir

$$V_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma^2 M_a^2 x_i x_k}{4 r^4} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\gamma \varepsilon_a}{r} - \frac{\gamma^2 M_a^2 \lambda_a}{5 r^5} \left(x_i x_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} r^2 \right) \tag{82,48}$$

oder, wenn wir wieder x_i durch $x_i - a_i$ ersetzen,

$$V_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma^2 M_a^2 (x_i - a_i)(x_k - a_k)}{4 |\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^4} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\gamma \varepsilon_a}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} -$$
$$- \frac{\gamma^2 M_a^2 \lambda_a}{5 |\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^5} \left[(x_i - a_i)(x_k - a_k) - \frac{1}{3} \delta_{ik} (\mathfrak{r} - \mathfrak{a})^2 \right]. \tag{82,49}$$

Für Abstände von der Masse (a), die groß gegen deren Radius sind, wird der letzte Term klein im Vergleich mit dem ersten; strenggenommen müßte man ihn weglassen, da eine ähnliche Vernachlässigung schon bei der Berechnung von $V_{ik}^{(ab)}$ gemacht wurde.

Es bleibt noch die Gleichung (82,17) zu lösen. Für nichtrotierende Massen setzen wir

$$v_i = \dot{a}_i; \qquad p_{ik} = -p\,\delta_{ik}, \tag{82,50}$$

wobei sich p aus der Gleichung

$$dp = \varrho\, du_a \tag{82,51}$$

bestimmt; dabei ist nach (74,24)

$$\int_{(a)} p (dx)^3 = \frac{1}{3} \varepsilon_a. \tag{82,52}$$

Wir haben dann

$$U_{ik} = \sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i \dot{a}_k}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + \sum_a \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\gamma \varepsilon_a}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|}. \tag{82,53}$$

Die Dipolterme verschwinden hier wegen der Kugelsymmetrie der Körper, und Terme von höherer Ordnung in L/R [d. h. von der Ordnung des letzten Termes in (82,49)] vernachlässigen wir.

Wir setzen nun

$$S_{ik}^{(aa)} = \frac{\gamma M_a \dot{a}_i \dot{a}_k}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + \frac{\gamma^2 M_a^2 (x_i - a_i)(x_k - a_k)}{4 |\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^4}, \tag{82,54}$$

$$S_{ik}^{(ab)} = V_{ik}^{(ab)} = \frac{\gamma^2 M_a M_b}{2} \left(\delta_{ik} \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j \partial b_j} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i \partial b_k} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_k \partial b_i} \right), \tag{82,55}$$

bezeichnen mit S_{ik} die Summe

$$S_{ik} = \sum_a S_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_{ik}^{(ab)} \tag{82,56}$$

und gehen damit in die Formel

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4}{c^3} S_{ik} \tag{82,03}$$

ein; dann erhalten wir explizite Ausdrücke für die räumlichen Komponenten des Fundamentaltensors. Diese Ausdrücke gelten auch innerhalb (zwischen den Massen) des Systems von Körpern.

Für die gemischten Komponenten des Fundamentaltensors erhielten wir den angenäherten Ausdruck

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4}{c^3} U_i, \tag{82,57}$$

wo U_i eine Lösung der Gleichung (82,11) ist, die in der betrachteten Näherung lautet

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} \tag{82,58}$$

[vgl. Formel (76,23)].

Wir können nun zeigen, daß die gefundenen expliziten Ausdrücke für S_{ik} und U_i die Harmonizitätsbedingung (82,15) erfüllen. Wir haben

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial S_{ik}^{(aa)}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma M_a \ddot{a}_i}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|}. \tag{82,59}$$

Ferner läßt sich mit Hilfe der Formel

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j \partial b_j} = -\frac{(|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}| + |\mathfrak{r} - \mathfrak{b}| - |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|)}{2 |\mathfrak{r} - \mathfrak{a}| \, |\mathfrak{r} - \mathfrak{b}| \, |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \tag{82,60}$$

und zweier weiterer Formeln, die sich aus (82,60) durch Vertauschung der Buchstaben ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{r}$) ergeben, die Gleichung

$$\frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\,\gamma^2 M_a M_b \frac{a_i - b_i}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|^3}\left(\frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|} - \frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{b}|}\right) \tag{82,61}$$

verifizieren. Summieren wir dies über a und über b, so erhalten wir

$$\sum_{a\neq b} \frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \sum_{a\neq b} \gamma^2 M_a M_b \frac{(a_i - b_i)}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|^3}\,\frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|} \tag{82,62}$$

oder, wenn wir setzen

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{a\neq b} \frac{\gamma M_a M_b}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|}, \tag{82,63}$$

auch

$$\sum_{a\neq b} \frac{\partial S_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|}\,\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \tag{82,64}$$

Durch Addition der Gleichungen (82,59) und (82,64) erhalten wir schließlich

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|}\left(M_a \ddot{a}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}\right). \tag{82,65}$$

Die Größe Φ ist aber die NEWTONsche potentielle Energie des Systems von Körpern. Deshalb gilt auf Grund der NEWTONschen Bewegungsgleichungen

$$M_a \ddot{a}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0. \tag{82,66}$$

Folglich verschwindet auch der gesamte Ausdruck (82,65) in Übereinstimmung mit (82,15). Durch eine Modifikation unserer Überlegungen könnten wir (ähnlich dem Vorgehen in unserer Arbeit [36] vom Jahre 1939) aus (82,15) und (82,65) die NEWTONschen Bewegungsgleichungen (82,66) herleiten.

§ 83 Die Gravitationspotentiale für nichtrotierende Massen (gemischte und zeitliche Komponenten)

Wir wollen die auf die Formeln (82,57) und (82,58) folgende Näherung für die gemischten Komponenten $\mathfrak{g}^{0i}$ der Gravitationspotentiale bestimmen. In der Gleichung (82,06) müssen wir $\mu = 0$, $\nu = 1$ setzen und darin für N^{0i} den Wert aus (68,15) und für T^{0i} den Wert aus (66,07) benutzen, und zwar mit der Vereinfachung, daß sich die Spannungen p_{ik} auf einen isotropen Druck p reduzieren und daß die Geschwindigkeiten $v_i = \dot{a}_i$ innerhalb jedes Körpers konstant sind. Wir schreiben die Formel (68,15) für N^{0i} in der Form

$$N^{0i} = -\frac{2}{c^6}\,Q_i \tag{83,01}$$

mit

$$Q_i = -3\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial x_i} + 4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_j}. \tag{83,02}$$

Die Gleichungen (82,06) lauten dann

$$\frac{1}{2c}\,\Delta\,\mathfrak{g}^{0i} - \frac{1}{2c^3}\,\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2} = \frac{2}{c^6}\,Q_i - \frac{8\pi\gamma}{c^4}\,(c^2 + 4\,U)\;T^{0i}, \tag{83,03}$$

wobei nach (66,07) für den Fall eines isotropen Drucks p gilt

$$(c^2 + 4\,U)\;T^{0i} = v_i\left\{\varrho + \frac{\varrho}{c^2}\left(\frac{1}{2}\,v^2 + \Pi + 3U\right) + \frac{p}{c^2}\right\}. \tag{83,04}$$

In die Gleichung (83,03) setzen wir den Ausdruck

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\,U_i}{c^3} + \frac{4\,S_i}{c^5} \tag{83,05}$$

für $\mathfrak{g}^{0i}$ ein; dann können wir diese Gleichung befriedigen, indem wir fordern, daß

$$\Delta\,U_i - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = -\,4\pi\gamma\,(c^2 + 4\,U)\;T^{0i}, \tag{83,06}$$

$$\Delta\,S_i - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2} = Q_i \tag{83,07}$$

sein soll. Da in diesen Gleichungen noch die Lichtgeschwindigkeit c als Parameter auftritt, so haben darin die Größen U_i und S_i nicht mehr die Bedeutung von Koeffizienten der Entwicklung von $\mathfrak{g}^{0i}$ nach Potenzen von $1/c$. Diese Inkonsequenz in der Bezeichnungsweise ist aber unwesentlich, da die Gleichung (83,06) für U_i in erster Näherung mit (82,11) übereinstimmt.

Um die Lösung der Gleichung (83,06) im Gebiet außerhalb der Massen aufschreiben zu können, müssen wir den Wert des Integrals über ihre rechte Seite, das über das Volumen jedes Körpers erstreckt wird, kennen. Zur Berechnung dieses Integrals beachten wir die Beziehung

$$\varrho\,\Pi - \varrho u_a + p = 0, \tag{83,08}$$

die aus der Formel (73,26) für den rotationsfreien Fall folgt. Nach (74,07) und (74,24) haben wir

$$\int\limits_{(a)} \varrho\,u_a\,(d\,x)^3 = 2\varepsilon_a; \qquad \int\limits_{(a)} p\,(d\,x)^3 = \frac{1}{3}\,\varepsilon_a. \tag{83,09}$$

Die Beziehung (83,08) liefert also

$$\int\limits_{(a)} \varrho\,\Pi\,(d\,x)^3 = \frac{5}{3}\,\varepsilon_a. \tag{83,10}$$

Mit Hilfe dieser Formeln erhalten wir

$$\int_{(a)} (c^2 + 4\,U)\, T^{0i} (d\,x)^3 = M_a \dot{a}_i \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\, v_a^2 + 3\, U^{(a)}(\mathfrak{a})\right)\right\} + \frac{8}{c^2}\, \varepsilon_a \dot{a}_i, \qquad (83{,}11)$$

wo $U^{(a)}$ das in § 71 eingeführte äußere Potential ist. Die Rechnungen sind hier wesentlich einfacher als in § 76, da wir keine Rotation betrachten.

Die Größe (83,10) ist die innere (elastische) Energie des Körpers. Da seine Gravitationsenergie $(-\varepsilon_a)$ beträgt, so stellt die Summe beider, nämlich $\frac{2}{3}\varepsilon_a$, diejenige Energie dar, welche bei der Berechnung der effektiven Masse berücksichtigt werden muß. Letztere beträgt[1])

$$m_a = M_a + \frac{2}{3}\,\frac{\varepsilon_a}{c^2} \qquad (83{,}12)$$

in Übereinstimmung mit (76,18) und (80,18).

Mit Hilfe von (83,11) läßt sich die angenäherte Lösung der Gleichung (83,06) folgendermaßen schreiben

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma\, \dot{a}_i}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} \left\{ M_a + \frac{M_a}{c^2}\left(\frac{1}{2}\, v_a^2 + 3\, U^{(a)}(\mathfrak{a})\right) + \frac{8\,\varepsilon_a}{c^2} \right\} + $$
$$+ \frac{1}{2\,c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_a \gamma\, M_a \dot{a}_i\, |\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|. \qquad (83{,}13)$$

Darin stellt der letzte Term die Retardierungskorrektur dar.

Wir gehen nun zur Gleichung (83,07) für S_i über. In dieser Gleichung kann man die zweite Ableitung nach der Zeit vernachlässigen und schreiben

$$\Delta S_i = Q_i. \qquad (83{,}14)$$

Analog zu (82,20) läßt sich die Größe Q_i in der Form

$$Q_i = \sum_a Q_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} Q_i^{(ab)} \qquad (83{,}15)$$

darstellen, wobei $Q_i^{(aa)}$ eine quadratische Funktion der ersten Ableitungen des Potentials der Masse (a) ist und $Q_i^{(ab)}$ eine bilineare Funktion der ersten Ableitungen der Potentiale der Massen (a) und (b) darstellt. Entsprechend der Zerlegung (83,15) kann man die Lösung der Gleichung (83,14) in der Form

$$S_i = \sum_a S_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_i^{(ab)} \qquad (83{,}16)$$

---

[1]) Die Beziehung (83,12) muß man beim Vergleich der hier abgeleiteten Formeln mit denen unserer Arbeit [36] beachten.

schreiben, wobei die einzelnen Terme Lösungen der Gleichungen

$$\Delta S_i^{(aa)} = Q_i^{(aa)}, \tag{83,17}$$

$$\Delta S_i^{(ab)} = Q_i^{(ab)} \tag{83,18}$$

sind. Für $Q_i^{(aa)}$ benutzen wir den folgenden, zu (82,21) analogen Ausdruck, der auch im Inneren der betrachteten Masse gilt,

$$Q_i^{(aa)} = \dot{a}_j \left\{ -\frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_j} + 4\,\delta_{ij}\,(\operatorname{grad} u_a)^2 \right\}. \tag{83,19}$$

Für $Q_i^{(ab)}$ beschränken wir uns auf den zu (82,28) analogen Ausdruck, der außerhalb der Massen gilt, nämlich

$$Q_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) \frac{(x_j - a_j)(x_i - b_i)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^3\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|^3} + \right.$$

$$\left. + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j) \frac{(x_i - a_i)(x_j - b_j)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^3\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|^3} + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i) \frac{(x_j - a_j)(x_j - b_j)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^3\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|^3} \right\}. \tag{83,20}$$

Zur Lösung der Gleichung (83,17) stellen wir ihre rechte Seite folgendermaßen dar

$$Q_i^{(aa)} = \dot{a}_j Q_{ij}^{(aa)} + 7\,\dot{a}_i Q_{jj}^{(aa)}. \tag{83,21}$$

Die Lösung lautet dann offenbar

$$S_i^{(aa)} = \dot{a}_j V_{ij}^{(aa)} + 7\,\dot{a}_i V_{jj}^{(aa)}, \tag{83,22}$$

wobei $V_{ij}^{(aa)}$ die oben gefundene Lösung (82,38) oder (82,49) der Gleichung (82,24) ist.

Wir gehen zur Gleichung (83,18) über und schreiben ihre rechte Seite, d. h. den Ausdruck (83,20), in der Form

$$Q_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial b_i} + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial b_j} + \right.$$

$$\left. + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i) \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial b_j} \right\} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|}. \tag{83,23}$$

Wegen (82,34) lautet die Lösung der Gleichung (83,18)

$$S_i^{(ab)} = \frac{1}{2}\gamma^2 M_a M_b \left\{ (3\dot{a}_j - 4\dot{b}_j) \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j \partial b_i} + \right.$$

$$\left. + (3\dot{b}_j - 4\dot{a}_j) \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i \partial b_j} + 4(\dot{a}_i + \dot{b}_i) \frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_j \partial b_j} \right\}. \tag{83,24}$$

Wir wollen auch den Wert für $S_i^{(aa)}$ außerhalb der Massen aufschreiben. Dazu muß man in (83,22) den Wert $V_{ij}^{(aa)}$ aus (82,49) einsetzen, wobei man die Terme,

die λ_a enthalten und in großen Abständen schnell abnehmen, weglassen kann. In dem so für $S_i^{(aa)}$ gewonnenen Ausdruck trennt man zweckmäßigerweise den harmonischen Term ab und schreibt $S_i^{(aa)}$ in der Form

$$S_i^{(aa)} = -\frac{22}{3}\dot{a}_i \frac{\gamma\varepsilon_a}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|} + \overline{S}_i^{(aa)} \tag{83,25}$$

mit

$$\overline{S}_i^{(aa)} = \gamma^2 M_a^2 \left\{\dot{a}_j \frac{(x_i-a_i)(x_j-a_j)}{4|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|^4} + \frac{7}{4}\frac{\dot{a}_i}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|^2}\right\}. \tag{83,26}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Formel (83,16) erhalten wir einen Wert für S_i, der, in Verbindung mit dem weiter oben gefundenen Wert (83,13) für U_i, auch die Bestimmung von $\mathfrak{g}^{0i}$ nach der Formel (83,05) gestattet. Die Formel für $\mathfrak{g}^{0i}$ läßt sich auch in der Form

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\overline{U}_i}{c^3} + \frac{4\overline{S}_i}{c^5} \tag{83,27}$$

schreiben mit

$$\overline{U}_i = \sum_a \frac{\gamma\dot{a}_i}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|}\left\{M_a + \frac{2\varepsilon_a}{3c^2} + \frac{M_a}{c^2}\left(\frac{1}{2}v_a^2 + 3U^{(a)}(\mathfrak{a})\right)\right\} + $$
$$+ \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma M_a \dot{a}_i |\mathfrak{r}-\mathfrak{a}|, \tag{83,28}$$

$$\overline{S}_i = \sum_a \overline{S}_i^{(aa)} + \sum_{a \neq b} S_i^{(ab)}. \tag{83,29}$$

Danach unterscheiden sich die Größen $\overline{U}_i$ und $\overline{S}_i$ von U_i und S_i durch harmonische Terme, die ε_a enthalten. Die Größe ε_a geht übrigens in $\overline{U}_i$ nur über die effektive Masse (83,12) ein. Die Summe $\overline{S}_i$ ist eine homogene quadratische Funktion der Massen, während $\overline{U}_i$, abgesehen von den Termen mit $\overline{U}^{(a)}(\mathfrak{a})$, linear von den Massen abhängt.

Wir müssen nun noch einen expliziten Ausdruck für die zeitliche Komponente der Gravitationspotentiale, d. h. für die Größe $\mathfrak{g}^{00}$, ermitteln. Die Gleichungen, durch die $\mathfrak{g}^{00}$ bestimmt wird, haben wir bereits in § 68 aufgestellt. Nach (68,43) und (68,41) haben wir

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4}{c^3}\overline{U} + \frac{7}{c^5}\overline{U}^2, \tag{83,30}$$

wobei $\overline{U}$ das verallgemeinerte NEWTONsche Potential ist, das der Gleichung

$$\Delta\overline{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right)T^{00} \tag{83,31}$$

genügt; auf der rechten Seite dieser Gleichung steht der Ausdruck

$$\left(c^2 + \frac{1}{2}\,U\right) T^{00} = \varrho + \frac{\varrho}{c^2}\left(\frac{1}{2}\,v^2 + \Pi - \frac{1}{2}\,U\right), \tag{83,32}$$

der sich aus (66,07) ergibt und schon in § 79 benutzt wurde. Das Potential $\overline{U}$ läßt sich ähnlich dem Potential U^* in § 77 berechnen, jedoch mit der Vereinfachung, daß jetzt die Massen als kugelsymmetrisch und nichtrotierend vorausgesetzt werden. Mit (83,09) und (83,10) erhalten wir

$$\int\limits_{(a)} \left(c^2 + \frac{1}{2}\,U\right) T^{00}\,(dx)^3 = M_a + \frac{2\,\varepsilon_a}{3\,c^2} + \frac{M_a}{2\,c^2}\left(v_a^2 - U^{(a)}\,(\mathfrak{a})\right) \tag{83,33}$$

und folglich

$$\overline{U} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|}\left\{M_a + \frac{2\,\varepsilon_a}{3\,c^2} + \frac{M_a}{2\,c^2}\left(v_a^2 - U^{(a)}\,(\mathfrak{a})\right)\right\} + $$

$$+ \frac{1}{2\,c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_a \gamma M_a\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|. \tag{83,34}$$

Dieser Ausdruck liefert uns, in (83,30) eingesetzt, die Größe $\mathfrak{g}^{00}$. Damit ist die Bestimmung der Gravitationspotentiale in zweiter Näherung abgeschlossen.

Wir wollen uns nun noch überzeugen, daß die für $\mathfrak{g}^{00}$ und $\mathfrak{g}^{0i}$ gewonnenen Ausdrücke die Harmonizitätsbedingung

$$\frac{\partial\,\mathfrak{g}^{00}}{\partial t} + \frac{\partial\,\mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_i} = 0 \tag{83,35}$$

befriedigen. Differenzieren wir die Ausdrücke (83,34) und (83,28) für $\overline{U}$ und $\overline{U}_i$, so erhalten wir unmittelbar

$$\frac{\partial\,\overline{U}}{\partial t} + \frac{\partial\,\overline{U}_i}{\partial x_i} = \frac{7}{2\,c^2}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i\,U^{(a)}\,(\mathfrak{a})}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + $$

$$+ \frac{1}{c^2} \sum_a \frac{\gamma M_a}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|}\left(\dot{a}_i \ddot{a}_i - \frac{1}{2}\,\frac{d\,U^{(a)}\,(\mathfrak{a})}{dt}\right). \tag{83,36}$$

Ferner finden wir aus (83,26)

$$\frac{\partial\,\overline{S}_i^{(a\,a)}}{\partial x_i} = -\,\frac{7}{4}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\gamma^2 M_a^2}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|^2}. \tag{83,37}$$

Bei der Berechnung des Ausdruckes

$$\frac{\partial\,S_i^{(a\,b)}}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\,\gamma^2\,M_a M_b \left\{(3\,\dot{a}_j - 4\,\dot{b}_j)\,\frac{\partial}{\partial a_j}\,\frac{\partial^2 \lg s}{\partial b_i\,\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + (3\,\dot{b}_j - 4\,\dot{a}_j)\,\frac{\partial}{\partial b_j}\,\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i\,\partial x_i} + 4\,(\dot{a}_j + \dot{b}_j)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 \lg s}{\partial a_i\,\partial b_i}\right\} \tag{83,38}$$

müssen wir die Formel (82,60) und die beiden anderen Formeln benutzen, die sich daraus durch Vertauschung der Buchstaben a, b und x ergeben; außerdem haben wir bei der Umformung des Ausdruckes (83,38) zu beachten, daß $\lg s$ und die Ableitungen dieser Größe nur von den Koordinatendifferenzen abhängen, so daß zum Beispiel

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_j} + \frac{\partial}{\partial b_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \lg s = 0 \tag{83,39}$$

gilt. Fassen wir in dem Ausdruck (83,38) die Terme mit $|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|$, dann die Terme mit $|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|\,|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|$ und schließlich die Terme mit $|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|\,|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|$ zusammen, so können wir schreiben

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_i^{(ab)}}{\partial x_i} &= \frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b \left\{-7\dot{a}_j \frac{\partial}{\partial a_j} - 7\dot{b}_j \frac{\partial}{\partial b_j}\right\} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|} + \\ &+ \frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b \left\{-7\dot{a}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + (\dot{a}_j + \dot{b}_j)\frac{\partial}{\partial b_j}\right\} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|\,|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} + \\ &+ \frac{1}{4}\gamma^2 M_a M_b \left\{-7\dot{b}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + (\dot{a}_j + \dot{b}_j)\frac{\partial}{\partial a_j}\right\} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{b}|\,|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|}\,. \end{aligned} \tag{83,40}$$

Summieren wir diesen Ausdruck über a und über b (wobei wir die Glieder $a = b$ weglassen) und fügen die Summe über a von (83,37) hinzu, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{S}_i}{\partial x_i} &= -\frac{7}{2} U \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{7}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_a \frac{\gamma M_a \dot{a}_i U^{(a)}(\mathfrak{a})}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} + \\ &+ \sum_a \frac{\gamma M_a}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} \left\{\frac{1}{2}\frac{d U^{(a)}(\mathfrak{a})}{dt} - \dot{a}_i \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathfrak{r})}{\partial x_i}\right)_a\right\}. \end{aligned} \tag{83,41}$$

Ersetzen wir nun im Korrekturterm der Formel (83,30) $\overline{U}$ durch U, so unterscheidet sich die linke Seite der Harmonizitätsbedingung (83,35) nur um den Faktor $4/c^3$ von dem Ausdruck

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{7}{2} U \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \overline{S}_i}{\partial x_i}\right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_a \frac{\gamma M_a}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{a}|} \dot{a}_i \left\{\ddot{a}_i - \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathfrak{r})}{\partial x_i}\right)_a\right\}, \end{aligned} \tag{83,42}$$

dessen rechte Seite man erhält, wenn man zu (83,36) den durch c^2 dividierten Ausdruck (83,41) hinzufügt und einen der Terme nach links bringt.

Nun haben wir

$$M_a \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathfrak{r})}{\partial x_i}\right)_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \tag{83,43}$$

wobei Φ die NEWTONsche potentielle Energie

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{a \neq b} \gamma \frac{M_a M_b}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|} \tag{83,44}$$

ist. Deshalb gilt auf Grund der NEWTONschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{a}_i = \left(\frac{\partial U^{(a)}(\mathfrak{r})}{\partial x_i}\right)_a, \tag{83,45}$$

und die rechte Seite von (83,42) verschwindet. Die Harmonizitätsbedingung (83,35) wird also erfüllt.

Um für die Gravitationspotentiale $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ nicht allzu komplizierte explizite Ausdrücke zu erhalten, die auch innerhalb des Systems von Körpern (zwischen den Massen) gelten, mußten wir in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen ziemlich starke Einschränkungen machen: Wir haben die Massen als kugelsymmetrisch und nichtrotierend angenommen. Von diesen Beschränkungen werden wir uns im nächsten Paragraphen befreien, wo wir die Gravitationspotentiale in großen Abständen von dem System von Körpern betrachten.

§ 84 Die Gravitationspotentiale in großen Abständen von dem System von Körpern (räumliche Komponenten)

In diesem und dem folgenden Paragraphen werden wir für die Gravitationspotentiale explizite Ausdrücke gewinnen, die in „mäßiggroßen" Abständen von dem System von Körpern gelten. Unter „mäßiggroßen" Abständen verstehen wir solche, die zwar groß gegen die Abmessungen des Systems, aber immer noch klein im Vergleich zur Länge der vom System ausgestrahlten Wellen sind (vgl. § 64). Über die innere Struktur der Körper wollen wir hier ebenso allgemeine Annahmen machen wie das in § 79 bei der Herleitung der Integrale der Bewegungsgleichungen des Systems von Körpern geschehen ist.

Wir beginnen mit der Bestimmung der räumlichen Komponenten $\mathfrak{g}^{ik}$. Wie in § 82 haben wir

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{4}{c^3} S_{ik}, \tag{84,01}$$

wobei nach (82,16) — (82,18)

$$S_{ik} = U_{ik} + V_{ik} \tag{84,02}$$

ist und die Funktionen U_{ik} und V_{ik} den Gleichungen

$$\Delta U_{ik} = -4\pi\gamma\,(\varrho v_i v_k - p_{ik}), \tag{84,03}$$

$$\Delta V_{ik} = \frac{1}{2}\,\delta_{ik}\,(\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k} \tag{84,04}$$

genügen. Die rechte Seite der Gleichung (84,03) ist nur im Inneren der Massen von Null verschieden und besitzt, um einen mathematischen Ausdruck zu benutzen, Momente beliebiger Ordnung (vgl. § 70). (Man sagt, daß eine Funktion Momente beliebiger Ordnungen besitzt, wenn die über den ganzen unendlichen Raum erstreckten Integrale über die mit einem Produkt verschiedener Potenzen der Koordinaten multiplizierte Funktion konvergieren.) Deshalb kann man die

Lösung der Gleichung (84,03), und zwar die außerhalb des Massensystems gültige Form der Lösung, als eine Reihe nach Kugelfunktionen (Multipolen) schreiben. Den Koordinatenursprung legen wir in irgendeinen Punkt im Inneren des Systems von Körpern, der nicht unbedingt dessen Schwerpunkt zu sein braucht. Wir erhalten

$$U_{ik} = U^0_{ik} + U^{(1)}_{ik} + \cdots, \tag{84,05}$$

wobei die ersten beiden Terme lauten

$$U^0_{ik} = \frac{\gamma}{r} \int (\varrho v_i v_k - p_{ik}) (dx)^3, \tag{84,06}$$

$$U^{(1)}_{ik} = \frac{\gamma x_j}{r^3} \int (\varrho v_i v_k - p_{ik})\, x_j\, (dx)^3. \tag{84,07}$$

In der Gleichung (84,04) jedoch ist die rechte Seite im ganzen Raum von Null verschieden und nimmt nur umgekehrt proportional zur vierten Potenz der Entfernung ab. Deshalb existiert nur das Moment nullter Ordnung, so daß sich die Lösung dieser Gleichung nicht als eine zu (84,05) analoge Reihe darstellen läßt.

Um die Lösung zu finden, führen wir auf der rechten Seite von (84,04) den Ausdruck für das NEWTONsche Potential in Form eines Integrals

$$U = \gamma \int \frac{\varrho' (dx')^3}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \tag{84,08}$$

ein. Wir erhalten dann eine Formel, die man folgendermaßen schreiben kann

$$\Delta V_{ik} = \frac{1}{2} \gamma^2 \int\int \varrho' (dx')^3 \varrho'' (dx'')^3 \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_l' \partial x_l''} - \frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_k''} - \frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_i''} \right\} \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}''|}. \tag{84,09}$$

Aus § 82 wissen wir [Formeln (82,33) und (82,34)], daß die Funktion

$$\lg s = \lg (|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| + |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}''| + |\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|) \tag{84,10}$$

der Gleichung

$$\Delta \lg s = \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}''|} \tag{84,11}$$

genügt. Daraus schließt man leicht, daß diejenige Lösung der Gleichung (84,09), die überall endlich ist und im Unendlichen verschwindet, in der Form

$$V_{ik} = \frac{1}{2} \gamma^2 \int\int \varrho' (dx')^3 \varrho'' (dx'')^3 \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_l' \partial x_l''} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i' \partial x_k''} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_k' \partial x_i''} \right\} \tag{84,12}$$

dargestellt werden kann. Uns interessiert der Wert dieses Ausdruckes für große Abstände. Für seine Berechnung benutzen wir eine Entwicklung von s und $\lg s$ nach Potenzen von $1/r$, die für große r und für endliche r' und r'' gilt. Wir haben

$$s = 2r + \left(|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''| - \frac{x_i x_i'}{r} - \frac{x_i x_i''}{r}\right) + \\ + \frac{1}{2}(x_i' x_k' + x_i'' x_k'')\left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{x_i x_k}{r^3}\right) + \cdots \tag{84,13}$$

und damit

$$\lg s = \lg 2r + \frac{1}{2r}\left(|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''| - \frac{x_i(x_i' + x_i'')}{r}\right) + \\ + \frac{x_j}{4r^3}(x_j' + x_j'')|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''| + \frac{1}{8r^2}(r'^2 + r''^2 + 2x_j' x_j'') - \\ - \frac{x_i x_k}{8r^4}(3x_i' x_k' + 3x_i'' x_k'' + x_i'' x_k' + x_i' x_k'') + \cdots. \tag{84,14}$$

Durch Differentiation erhalten wir für den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil der zweiten Ableitungen nach x_i' und x_k'' die Ausdrücke

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i' \partial x_k''} + \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i'' \partial x_k'}\right) = \frac{1}{4r^2}\left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}\right) - \\ - \left(\frac{1}{2r} + \frac{x_j(x_j' + x_j'')}{4r^3}\right)\left(\frac{\delta_{ik}}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|} - \frac{(x_i' - x_i'')(x_k' - x_k'')}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|^3}\right), \tag{84,15}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i' \partial x_k''} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i'' \partial x_k'}\right) = \frac{x_k}{4r^3}\frac{x_i' - x_i''}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|} - \frac{x_i}{4r^3}\frac{x_k' - x_k''}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|}. \tag{84,16}$$

Dabei haben wir Terme, die stärker als $1/r^2$ abnehmen, weggelassen. Setzen wir in (84,15) $i = l$ und $k = l$ und summieren über l, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_l' \partial x_l''} = \frac{1}{2r^2} - \left(\frac{1}{r} + \frac{x_j(x_j' + x_j'')}{2r^3}\right)\frac{1}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|}, \tag{84,17}$$

in Einklang mit der exakten Formel

$$\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_l' \partial x_l''} = \frac{1}{2|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'||\mathfrak{r} - \mathfrak{r}''|} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} + \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}''|}\right)\frac{1}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|}. \tag{84,18}$$

Wir gehen mit (84,15) und (84,17) in (84,12) ein und betrachten zunächst die Terme, die wie $1/r$ abfallen. Bezeichnen wir den entsprechenden Term von V_{ik} mit V_{ik}^0, so erhalten wir

$$V_{ik}^0 = -\frac{\gamma^2}{2r}\int\int \varrho'(dx')^3 \varrho''(dx'')^3 \frac{(x_i' - x_i'')(x_k' - x_k'')}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|^3}. \tag{84,19}$$

Im Integranden ist nur der (in x' und x'') symmetrische Teil wesentlich. Wir ersetzen deshalb den Faktor $x_i' - x_i''$ durch $2x_i'$ und integrieren über x''. Dann erhalten wir

$$V_{ik}^0 = \frac{\gamma}{r} \int x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} \varrho \, (dx)^3 \tag{84,20}$$

oder, da wir von vornherein wissen, daß dieser Ausdruck in i und k symmetrisch ist,

$$V_{ik}^0 = \frac{\gamma}{2r} \int \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \varrho \, (dx)^3 \tag{84,21}$$

(vgl. auch den Hilfssatz in § 79). Wir bemerken, daß dieser Ausdruck gleich

$$V_{ik}^0 = -\frac{1}{4\pi r} \int \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} (\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) (dx)^3 \tag{84,22}$$

ist, wie auch zu erwarten war, da V_{ik} der Gleichung (84,04) genügt, und das Volumenintegral über die rechte Seite dieser Gleichung endlich ist.

Wir betrachten nun in (84,15) und (84,17) die Terme, die wie $1/r^2$ abnehmen. Darunter befinden sich Terme, die weder von x' noch von x'' abhängen. Diese Terme liefern zu V_{ik} den Beitrag

$$V_{ik}' = \frac{\gamma^2 M^2 x_i x_k}{4r^4}, \tag{84,23}$$

wo M die Gesamtmasse des Systems ist. Die übrigen Glieder von der Ordnung $1/r^2$ haben Dipol-Charakter. Sie lauten

$$V_{ik}^{(1)} = -\frac{\gamma^2 x_j}{2r^3} \int \varrho' \, (dx')^3 \, \varrho'' \, (dx'')^3 \, \frac{x_j' + x_j''}{2} \, \frac{(x_i' - x_i'')(x_k' - x_k'')}{|\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|^3}. \tag{84,24}$$

Nun gilt aber die Identität

$$\begin{aligned} &[x_i' x_j' (x_k' - x_k'') + x_k' x_j' (x_i' - x_i'') - x_i' x_k' (x_j' - x_j'')] + \\ &\quad + [x_i'' x_j'' (x_k'' - x_k') + x_k'' x_j'' (x_i'' - x_i') - x_i'' x_k'' (x_j'' - x_j')] = \\ &\quad = (x_j' + x_j'')(x_i' - x_i'')(x_k' - x_k''), \end{aligned} \tag{84,25}$$

in der die Ausdrücke in den beiden eckigen Klammern auf der linken Seite durch Vertauschung von x' und x'' auseinander hervorgehen. Bei der Integration von (84,24) können wir deshalb statt des Faktors (84,25) das Doppelte von einer der eckigen Klammern nehmen. Integrieren wir dann über diejenige Variable, die in der eckigen Klammer linear auftritt, so erhalten wir

$$V_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{2r^3} \int \left(x_j x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_j x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i x_k \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \varrho \, (dx)^3. \tag{84,26}$$

Wir fassen jetzt in U_{ik} und V_{ik} die Terme mit dem gleichen Pol-Charakter zusammen. Setzen wir

$$S_{ik}^0 = U_{ik}^0 + V_{ik}^0 \tag{84,27}$$

und addieren (84,06) und (84,21), so erhalten wir

$$S^0_{ik} = \frac{\gamma}{2r} \int \left\{ 2\varrho v_i v_k - 2p_{ik} + \varrho \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \right\} (dx)^3. \qquad (84,28)$$

Den Term, der p_{ik} enthält, schreiben wir in der Form

$$-2 \int p_{ik} (dx)^3 = \int \left(x_i \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_j} + x_k \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j} \right) (dx)^3 \qquad (84,29)$$

und benutzen die Bewegungsgleichungen des inneren Problems

$$\varrho w_i = \varrho \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}. \qquad (84,30)$$

Dann erhalten wir aus (84,28)

$$S^0_{ik} = \frac{\gamma}{2r} \int \varrho (x_i w_k + x_k w_i + 2 v_i v_k) (dx)^3 \qquad (84,31)$$

oder

$$S^0_{ik} = \frac{\gamma}{2r} \frac{d^2}{dt^2} \int \varrho x_i x_k (dx)^3. \qquad (84,32)$$

Wir haben also die Größe S^0_{ik} durch die zweite Ableitung nach der Zeit des entsprechenden Trägheitsmoments ausgedrückt.

Nun formen wir die Größe

$$S^{(1)}_{ik} = U^{(1)}_{ik} + V^{(1)}_{ik} \qquad (84,33)$$

um. Aus (84,07) und (84,26) ergibt sich

$$S^{(1)}_{ik} = \frac{\gamma x_j}{2r^3} \int \left\{ 2\varrho v_i v_k x_j - 2p_{ik} x_j + \right.$$
$$\left. + \varrho \left(x_j x_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + x_j x_k \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i x_k \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \right\} (dx)^3. \qquad (84,34)$$

Mit der Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_s} (x_j x_i p_{ks} + x_j x_k p_{is} - x_i x_k p_{js}) =$$
$$= 2 x_j p_{ik} + x_j x_i \frac{\partial p_{ks}}{\partial x_s} + x_j x_k \frac{\partial p_{is}}{\partial x_s} - x_i x_k \frac{\partial p_{js}}{\partial x_s} \qquad (84,35)$$

stellen wir das Integral, das p_{ik} enthält, in der Form

$$-2 \int p_{ik} x_j (dx)^3 = \int \left(x_j x_i \frac{\partial p_{ks}}{\partial x_s} + x_j x_k \frac{\partial p_{is}}{\partial x_s} - x_i x_k \frac{\partial p_{js}}{\partial x_s} \right) (dx)^3 \qquad (84,36)$$

dar. Unter Benutzung der Bewegungsgleichungen (84,30) können wir dann schreiben

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{2r^3} \int \varrho (2x_j v_i v_k + x_j x_i w_k + x_j x_k w_i - x_i x_k w_j)(dx)^3 \tag{84,37}$$

oder

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{\gamma x_j}{2r^3} \frac{d}{dt} \int \varrho (x_j x_i v_k + x_j x_k v_i - x_i x_k v_j)(dx)^3. \tag{84,38}$$

Nach der Formel

$$S_{ik} = S_{ik}^{(0)} + S_{ik}^{(1)} + V'_{ik} \tag{84,39}$$

erhalten wir daraus S_{ik}; setzen wir diesen Wert für S_{ik} in die Formel (84,01) ein, so ergibt sich der folgende endgültige Ausdruck für $\mathfrak{g}^{ik}$:

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\,\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \varrho x_i x_k (dx)^3 + \\ + \frac{2\gamma x_j}{c^3 r^3} \frac{d}{dt} \int \varrho (x_j x_i v_k + x_j x_k v_i - x_i x_k v_j)(dx)^3 + \frac{\gamma^2 M^2 x_i x_k}{c^3 r^4}. \tag{84,40}$$

Wir haben also explizite Ausdrücke für die räumlichen Komponenten der Gravitationspotentiale erhalten, die in (im oben erklärten Sinne) großen Abständen von dem System von Körpern gelten. Dabei haben wir von den Termen mit c^3 im Nenner diejenigen weggelassen, die stärker als $\frac{1}{r^2}$ abnehmen.

Für eine einzelne Zentralmasse reduziert sich der Ausdruck (84,40) auf denjenigen, der einer strengen Lösung der Gravitationsgleichungen entspricht [Formel (58,12)].

§ 85 Die Gravitationspotentiale in großen Abständen von dem System von Körpern (gemischte und zeitliche Komponenten)

Zur Bestimmung der gemischten Komponenten in großen Abständen gehen wir auf die am Anfang von § 83 abgeleiteten Gleichungen zurück. Es war

$$\frac{1}{2c} \Delta \mathfrak{g}^{0i} - \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2} = \frac{2}{c^6} Q_i - \frac{8\pi\gamma}{c^4} (c^2 + 4U) T^{0i}, \tag{85,01}$$

wo

$$Q_i = -3 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x_i} + 4 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U}{\partial x_j} \tag{85,02}$$

und, nach (66,07),

$$(c^2 + 4U) T^{0i} = \varrho v_i \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + 3U \right) \right\} - \frac{1}{c^2} p_{ik} v_k \tag{85,03}$$

ist. Wir setzen wie bisher

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\,U_i}{c^3} + \frac{4\,S_i}{c^5} \tag{85,04}$$

und unterwerfen die Größen U_i und S_i den Gleichungen

$$\Delta\, U_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = -\,4\pi\gamma\,(c^2 + 4\,U)\,T^{0i}, \tag{85,05}$$

$$\Delta\, S_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2} = Q_i. \tag{86,06}$$

Führen wir gemäß (75,18) die Größen

$$W = \frac{1}{2}\,\gamma \int \varrho'\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|\,(dx')^3 \tag{85,07}$$

sowie

$$W_i = \frac{1}{2}\,\gamma \int (\varrho v_i)'\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|\,(d\,x')^3 \tag{85,08}$$

ein, so können wir schreiben

$$U_i = \gamma \int \frac{\{(c^2 + 4\,U)\,T^{0i}\}'}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}\,(d\,x')^3 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}. \tag{85,09}$$

Der letzte Term stellt die Retardierungskorrektur dar. Entwickeln wir das Integral in eine Reihe nach Multipolen und beschränken uns auf die ersten beiden Glieder und auf einen angenäherten Wert für das dritte, so erhalten wir

$$U_i = \frac{\gamma}{r}\int (c^2 + 4\,U)\,T^{0i}\,(d\,x)^3 + \frac{\gamma\,x_j}{r^3}\int (c^2 + 4\,U)\,T^{0i}\,x_j\,(d\,x)^3 +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\,\frac{\gamma}{2r}\int \varrho\,v_i\,x_j\,x_k\,(d\,x)^3 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}. \tag{85,10}$$

In diesem Ausdruck kann man die Terme abtrennen, die den Impuls und den Drehimpuls des Systems enthalten. Diese Konstanten der Bewegung lassen sich nach den Formeln (79,19) und (79,34) durch die Funktion G_i ausdrücken, die nach der Definition (79,18) mit der Größe (85,03) gemäß der Beziehung

$$(c^2 + 4\,U)\,T^{0i} = G_i + \frac{\varrho}{c^2}\left(4\,U_i + \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t}\right) \tag{85,11}$$

zusammenhängt. Und zwar ist

$$P_i = \int G_i\,(d\,x)^3, \tag{85,12}$$

$$M_{ik} = \int (x_i G_k - x_k G_i)\,(d\,x)^3. \tag{85,13}$$

Die entsprechende Umformung führen wir erst nach der Berechnung der Größe S_i durch, da sich eine Reihe von Termen dieser Größe mit Termen von U_i zusammenfassen lassen.

In der Gleichung (85,06) für S_i vernachlässigen wir wie bisher die zweite Ableitung nach der Zeit und schreiben sie in der Form

$$\Delta S_i = Q_i. \tag{85,14}$$

Die Größe Q_i kann man, ähnlich (84,09), als ein zweifaches Volumenintegral darstellen

$$Q_i = \gamma^2 \iint (d\,x')^3\,(d\,x'')^3\,(\varrho v_k)'\varrho'' \left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i'\,\partial x_k''} + \frac{\partial^2}{\partial x_k'\,\partial x_i''}\right) + \right.$$
$$\left. + 4\,\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_s'\,\partial x_s''} - \frac{7}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i'\,\partial x_k''} - \frac{\partial^2}{\partial x_k'\,\partial x_i''}\right)\right\} \frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}''|}; \tag{85,15}$$

daraus erhält man sofort die gesuchte Lösung der Gleichung (85,14) in der Form

$$S_i = \gamma^2 \iint (d\,x')^3 (d\,x'')^3 (\varrho v_k)'\varrho'' \left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i'\,\partial x_k''} + \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_k'\,\partial x_i''}\right) + \right.$$
$$\left. + 4\,\delta_{ik}\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_l'\,\partial x_l''} - \frac{7}{2}\left(\frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_i'\,\partial x_k''} - \frac{\partial^2 \lg s}{\partial x_k'\,\partial x_i''}\right)\right\}. \tag{85,16}$$

Darin müssen wir die Ausdrücke (84,15) und (84,16) einsetzen und die Integration über x' und x'' durchführen.

Zunächst trennen wir den Term ab, der wie $1/r$ abnimmt. Man kann ihn folgendermaßen schreiben

$$S_i^0 = \frac{\gamma}{r}\left\{ -4 \int \varrho U_i\,(d\,x)^3 + \int \varrho v_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_k}\,(d\,x)^3 \right\}. \tag{85,17}$$

Andererseits erhalten wir aus der trivialen Gleichung

$$\int \varrho \frac{\partial W}{\partial x_i}\,(d\,x)^3 = 0 \tag{85,18}$$

durch Differentiation nach der Zeit

$$\int \varrho \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t} + v_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)(d\,x)^3 = 0. \tag{85,19}$$

Infolgedessen kann man auch schreiben

$$S_i^0 = \frac{\gamma}{r}\left\{ -4 \int \varrho\,U_i\,(d\,x)^3 - \int \varrho \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}\,(d\,x)^3 \right\}. \tag{85,20}$$

Wir betrachten nun in (85,16) die Terme, die wie $1/r^2$ abfallen. Unter diesen Termen befinden sich im Integranden solche, die weder von x' noch von x'' abhängen. Sie liefern

$$S_i' = \frac{7\gamma^2 M P_i}{4\,r^2} + \frac{\gamma^2 M P_k\,x_i\,x_k}{4\,r^4}. \tag{85,21}$$

Die übrigen Terme von der Ordnung $1/r^2$ haben Dipol-Charakter. Bezeichnen wir sie mit $S_i^{(1)}$, so wird

$$\begin{aligned} S_i^{(1)} = &-\frac{7}{4}\gamma^2\frac{x_j}{r^3}\iint(\varrho\, v_i)'\,\varrho''\,\frac{(x_j'+x_j'')}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3 - \\ &-\frac{1}{4}\gamma^2\frac{x_j}{r^3}\iint(\varrho\, v_k)'\,\varrho''\,\frac{(x_j'+x_j'')\,(x_i'-x_i'')\,(x_k'-x_k'')}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|^3}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3 - \\ &-\frac{7}{4}\gamma^2\frac{x_j}{r^3}\iint(\varrho\, v_j)'\,\varrho''\,\frac{(x_i'-x_i'')}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3 + \\ &+\frac{7}{4}\gamma^2\frac{x_j}{r^3}\delta_{ij}\iint(\varrho\, v_k)'\,\varrho''\,\frac{(x_k'-x_k'')}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3. \end{aligned} \tag{85,22}$$

Wir schreiben diesen Ausdruck in der Form

$$S_i^{(1)} = \frac{\gamma\, x_j}{r^3}\,(A_{ji}+B_{ji}), \tag{85,23}$$

wobei A_{ji} und B_{ji} den antisymmetrischen und den symmetrischen Anteil des entsprechenden Koeffizienten darstellen:

$$A_{ij} = -A_{ji}; \qquad B_{ij} = B_{ji}. \tag{85,24}$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} A_{ji} = &-\frac{7}{4}\gamma\iint(\varrho v_i)'\,\varrho''\,\frac{x_j''}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3 + \\ &+\frac{7}{4}\gamma\iint(\varrho v_j)'\,\varrho''\,\frac{x_i''}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3 - \\ &-\frac{1}{4}\gamma\iint(\varrho v_k)'\,\varrho''\,\frac{(x_j''x_i'-x_i''x_j')\,(x_k'-x_k'')}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|^3}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3, \end{aligned} \tag{85,25}$$

$$\begin{aligned} B_{ji} = &-\frac{7}{4}\gamma\iint(\varrho\, v_i)'\,\varrho''\,\frac{x_j'}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3 - \\ &-\frac{7}{4}\gamma\iint(\varrho\, v_j)'\,\varrho''\,\frac{x_i'}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3 - \\ &-\frac{1}{4}\iint(\varrho\, v_k)'\,\varrho''\,\frac{(x_i'x_j'-x_i''x_j'')\,(x_k'-x_k'')}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|^3}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3 + \\ &+\frac{7}{4}\gamma\,\delta_{ij}\iint(\varrho\, v_k)'\,\varrho''\,\frac{x_k'-x_k''}{|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}(d\,x')^3\,(d\,x'')^3. \end{aligned} \tag{85,26}$$

Für A_{ji} ergibt sich nach einiger Rechnung

$$A_{ji} = -2\int\varrho\,(x_j U_i - x_i U_j)\,(d\,x)^3 - \frac{1}{2}\int\varrho\left(x_j\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t} - x_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_j\,\partial t}\right)(d\,x)^3. \tag{85,27}$$

Dabei haben wir die Beziehung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W_k}{\partial x_k} = 0 \tag{85,28}$$

benutzt, die sich aus den Definitionen (85,07) und (85,08) der Größen W und W_i und aus der Kontinuitätsgleichung ergibt.

Für den symmetrischen Anteil B_{ji} des Dipol-Koeffizienten erhalten wir

$$B_{ji} = -\frac{7}{4}\int \varrho\,(x_j v_i + x_i v_j)\,U\,(d\,x)^3 + \\ + \frac{1}{4}\int \varrho\,x_i x_j \left(v_k \frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial t}\right)(d\,x)^3 + \frac{7}{2}\,\delta_{ij}\int \varrho\,\frac{\partial W}{\partial t}\,(d\,x)^3. \tag{85,29}$$

Hierbei haben wir die Beziehung (85,28) und eine analoge Beziehung für die Potentiale U, U_k benutzt.

Wir müssen jetzt noch die Summe $U_i + \frac{1}{c^2}\,S_i$ bilden und darin die ähnlichen Terme zusammenfassen. Bezeichnen wir den ersten Term in der Formel (85,10) mit U_i^0 und benutzen (85,20), so erhalten wir

$$U_i^0 + \frac{1}{c^2}\,S_i^0 = \frac{\gamma}{r}\int\left\{(c^2 + 4\,U)\,T^{0i} - \frac{\varrho}{c^2}\left(4\,U_i + \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t}\right)\right\}(d x)^3. \tag{85,30}$$

Wegen (85,11) und (85,12) ist aber dieser Ausdruck gleich

$$U_i^0 + \frac{1}{c^2}\,S_i^0 = \frac{\gamma\,P_i}{r}, \tag{85,31}$$

wobei P_i der Gesamtimpuls des Systems einschließlich der Korrekturen von der Ordnung $1/c^2$ ist. Wir betrachten nun diejenigen Dipolterme, die antisymmetrische Koeffizienten haben. Nach (85,27), (85,11) und (85,13) beträgt dieser Anteil

$$\frac{\gamma\,x_j}{r^3}\left\{\frac{1}{2}\int (c^2 + 4\,U)\,(x_j\,T^{0i} - x_i\,T^{0j})\,(d\,x)^3 + \frac{1}{c^2}\,A_{ji}\right\} = \frac{\gamma\,x_j}{2\,r^3}\,M_{ji}, \tag{85,32}$$

wobei M_{ji} der Gesamtdrehimpuls des Systems einschließlich der relativistischen Korrekturen ist.

Die Summe aller Dipolterme können wir in der Form

$$U_i^{(1)} + \frac{1}{c^2}\,S_i^{(1)} = \frac{\gamma\,x_j}{2\,r^3}\,(M_{ji} + \dot{D}_{ji}) \tag{85,33}$$

schreiben, wobei $\dot{D}_{ji}$ der symmetrische Anteil des Koeffizienten ist. Die Bezeichnungsweise (der Punkt darüber) ist dadurch gerechtfertigt, daß man diese Größe als zeitliche Ableitung einer Größe D_{ji} darstellen kann, die eine einfache

physikalische Bedeutung hat. Vergleicht man die letzte Formel mit (85,10) und (85,23), so erhält man für $\dot{D}_{ji}$ den Ausdruck

$$\dot{D}_{ji} = \int (c^2 + 4\,U)\,(T^{0i}\,x_j + T^{0j}\,x_i)\,(d\,x)^3 + \frac{2}{c^2}\,B_{ji}. \tag{85,34}$$

Setzen wir hier den Wert T^{0i} aus (85,03) und den Wert B_{ji} aus (85,29) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{D}_{ji} &= \int \varrho\,(v_i\,x_j + v_j\,x_i)\,(d\,x)^3 + \\ &+ \frac{1}{c^2}\int \varrho\left(\frac{1}{2}\,v^2 + \Pi - \frac{1}{2}\,U\right)(v_i\,x_j + v_j\,x_i)\,(d\,x)^3 - \\ &- \frac{1}{c^2}\int (p_{ik}v_k\,x_j + p_{jk}v_k\,x_i)\,(d\,x)^3 + \\ &+ \frac{1}{2c^2}\int \varrho\,x_i\,x_j\left(v_k\,\frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial t}\right)(d\,x)^3 + \frac{7}{c^2}\,\delta_{ij}\int \varrho\,\frac{\partial W}{\partial t}\,(d\,x)^3.\end{aligned} \tag{85,35}$$

Wir fügen hier den Ausdruck

$$\frac{1}{c^2}\int x_i\,x_j\,v_k\left(\varrho\,w_k - \varrho\,\frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{\partial\,p_{sk}}{\partial x_s}\right)(d\,x)^3 = 0 \tag{85,36}$$

hinzu, der infolge der inneren Bewegungsgleichungen verschwindet, und benutzen die Identität

$$\int \varrho\,\frac{\partial W}{\partial t}\,(d\,x)^3 = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\int \varrho\,W\,(d\,x)^3 \tag{85,37}$$

sowie die Formel (79,04) für die totale zeitliche Ableitung der elastischen Energie Π. Dann können wir die Größe $\dot{D}_{ji}$ in der Form

$$\dot{D}_{ji} = \frac{d\,D_{ji}}{dt} \tag{85,38}$$

schreiben mit

$$D_{ji} = \int \varrho\,x_i\,x_j\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\,v^2 + \Pi - \frac{1}{2}\,U\right)\right\}(d\,x)^3 + \frac{7}{2c^2}\,\delta_{ij}\int \varrho\,W\,(d\,x)^3. \tag{85,39}$$

Der erste Term dieses Ausdrucks ist das unter Berücksichtigung der Wägbarkeit der kinetischen und der potentiellen Energie berechnete Trägheitsmoment des Systems von Körpern.

Nun können wir den vollständigen Ausdruck für $U_i + \frac{1}{c^2}\,S_i$ aufschreiben. Nach (85,10), (85,21), (85,31) und (85,33) haben wir

$$\begin{aligned}U_i + \frac{1}{c^2}\,S_i &= \frac{\gamma}{r}\,P_i + \frac{\gamma\,x_j}{2r^3}\,M_{ji} + \frac{\gamma\,x_j}{2r^3}\,\frac{d\,D_{ji}}{dt} + \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\,\frac{\gamma}{2r}\int \varrho\,v_i\,x_j\,x_k\,(d\,x)^3 + \\ &+ \frac{7\,\gamma^2\,M P_i}{4c^2 r^2} + \frac{\gamma^2 M P_k x_i\,x_k}{4c^2 r^4} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{85,40}$$

und folglich

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\gamma}{c^3 r} P_i + \frac{2\gamma x_j}{c^3 r^3} M_{ji} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} \frac{2\gamma}{c^3 r} D_{ji} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{2\gamma}{c^3 r} \int \varrho v_i x_j x_k (dx)^3 +$$
$$+ \frac{7\gamma^2 M P_i}{c^5 r^2} + \frac{\gamma^2 M P_k x_i x_k}{c^5 r^4} + \frac{4}{c^5} \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}. \tag{85,41}$$

Es bleibt noch die zeitliche Komponente $\mathfrak{g}^{00}$ zu bestimmen, die sich durch das verallgemeinerte NEWTONsche Potential $\overline{U}$ nach der Formel (83,30) ausdrücken läßt. Nach (83,31) und (83,32) haben wir

$$\overline{U} = \frac{\gamma M}{r} + \frac{\gamma x_j}{r^3} M X_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\gamma}{r} D_{jk} -$$
$$- \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i} \frac{\gamma}{r} \int \varrho x_j x_k x_i (dx)^3 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \tag{85,42}$$

Dabei ist M die Gesamtmasse

$$M = \int \varrho \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - \frac{1}{2} U\right)\right] (dx)^3, \tag{85,43}$$

die nach (79,45) konstant ist, und X_j sind die Schwerpunktskoordinaten

$$M X_j = \int x_j \varrho \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - \frac{1}{2} U\right)\right] (dx)^3, \tag{85,44}$$

die nach (79,59) lineare Funktionen der Zeit sind. Die Größen D_{ij} werden durch die Formel (85,39) definiert; der letzte Term dieser Formel, der δ_{ij} proportional ist, fällt in dem Ausdruck (85,42) weg. In den Oktopolmomenten haben wir die relativistischen Korrekturen vernachlässigt. Der letzte Term in (85,42) stellt die Retardierungskorrektur dar.

Setzen wir den gefundenen Wert für $\overline{U}$ in die Formel

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4\overline{U}}{c^3} + \frac{7\overline{U}^2}{c^5} \tag{85,45}$$

ein, so erhalten wir $\mathfrak{g}^{00}$, und zwar

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{4\gamma x_j}{c^3 r^3} M X_j + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{2\gamma}{c^3 r} D_{jk} -$$
$$- \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{2\gamma}{3 c^3 r} \int \varrho x_i x_j x_k (dx)^3 + \frac{7\gamma^2 M^2}{c^5 r^2} + \frac{14\gamma^2 M^2 X_j x_j}{c^5 r^4} + \frac{4}{c^5} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \tag{85,46}$$

Durch direktes Einsetzen prüft man leicht nach, daß dieser Ausdruck zusammen mit dem oben gefundenen Ausdruck (85,41) für $\mathfrak{g}^{0i}$ die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_i} = 0 \tag{85,47}$$

exakt befriedigt. In der Formel (84,40) für die räumlichen Komponenten, die man in der Form

$$\mathfrak{g}^{ik} = - c\delta_{ik} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{2\gamma}{c^3 r} \int \varrho\, x_i\, x_k\, (dx)^3 -$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} \frac{2\gamma}{c^3 r} \int \varrho\, (x_j x_i v_k + x_j x_k v_i - x_i x_k v_j)\, (dx)^3 + \frac{\gamma^2 M^2 x_i x_k}{c^3 r^4} \tag{85,48}$$

schreiben kann, haben wir Glieder bis zur Ordnung $1/c^3$ (genauer: bis zur Ordnung q^4/c^3) berücksichtigt und Glieder höherer Ordnung weggelassen. Betrachtet man auch die Größe $\mathfrak{g}^{0i}$ mit derselben Genauigkeit, so ist, wie man leicht nachprüft, die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{85,49}$$

ebenfalls erfüllt.

§ 86 Die Lösung der Wellengleichung in der Wellenzone

Die vorstehenden Ausdrücke für die Gravitationspotentiale gelten für „mäßiggroße" Abstände von dem System von Körpern. Wie schon am Anfang von § 84 gesagt wurde, sind damit Abstände gemeint, die groß gegen die Abmessungen des Systems von Körpern, aber klein im Vergleich zur Länge der vom System emittierten Wellen sind. Sind dagegen die Abstände sogar groß gegen die Länge der vom System emittierten Wellen, so haben wir es mit der „Wellenzone" zu tun. In der Wellenzone ist es nicht mehr zulässig, den Term mit der zweiten Ableitung nach der Zeit als Korrektur aufzufassen, und die Lösung muß anders konstruiert werden.

Für das Sonnensystem sind die Abstände bis zu den nächsten Sternen „mäßiggroß", d. h. bis zu Raumgebieten, die so groß sind, daß man dort das System nicht mehr als isoliert ansehen kann. Deshalb braucht man praktisch bei der Untersuchung des Sonnensystems über das Gebiet „mäßiggroßer" Abstände nicht hinauszugehen. Dennoch sind bei einigen theoretischen Fragen, zum Beispiel bei dem Problem der Emission von Gravitationswellen oder dem Problem der Eindeutigkeit der Lösung der Gravitationsgleichungen, Abstände zu betrachten, die in die Wellenzone fallen und im mathematischen Sinne beliebig groß sind.

Bevor wir zur Lösung der EINSTEINschen Gleichungen für beliebig große Abstände übergehen, wollen wir die Begriffe „mäßiggroße Abstände" und „Wellenzone" am Beispiel der gewöhnlichen inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = - 4\pi\sigma \tag{86,01}$$

erläutern. In der Gravitationstheorie entspricht ψ der Differenz zwischen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ und seinem Grenzwert im Unendlichen.

Sieht man die „Dichte" σ als bekannt an, so kann man die uns interessierende Lösung als retardiertes Potential schreiben

$$\psi = \int \frac{[\sigma]}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} (d\,x')^3 \tag{86,02}$$

mit

$$[\sigma] = \sigma(t', \mathfrak{r}') \tag{86,03}$$

und

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| . \tag{86,04}$$

Daß wir gerade diese und keine andere Lösung benutzen, entspricht unseren Vorstellungen, daß das System isoliert ist und daß die alleinige Quelle der Wellen die Körper des Systems sind. Die genaue Form der Anfangsbedingungen ist hier unwesentlich; es genügt vorauszusetzen, daß die anfängliche Störung auf ein endliches Gebiet um das System konzentriert ist und daß wir Zeiten und Abstände betrachten, in denen die anfängliche Störung schon auseinandergelaufen ist.

Wir setzen voraus, daß die Dichte σ einerseits zeitliche Ableitungen verschiedener Ordnung und andererseits „Momente" verschiedener Ordnung besitzt; für letztere führen wir die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} \mu_0(\tau) &= \int \sigma(\tau, \mathfrak{r}')\,(d\,x')^3, \\ \mu_i(\tau) &= \int x'_i \sigma(\tau, \mathfrak{r}')\,(d\,x')^3, \\ \mu_{ik}(\tau) &= \int x'_i x'_k \sigma(\tau, \mathfrak{r}')\,(d\,x')^3 \end{aligned}\right\} \tag{86,05}$$

ein, wobei τ eine von $\mathfrak{r}'$ unabhängige Größe ist.

Das in den vorhergehenden Paragraphen zur Lösung der Wellengleichung benutzte Verfahren bestand in einer Entwicklung des Arguments t' in der Funktion σ und dieser Funktion selbst nach Potenzen von $1/c$. Da bei dieser Entwicklung unter dem Integral wachsende Potenzen von $|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|$ auftreten, ist es klar, daß dieses Verfahren nur für „mäßiggroße" Abstände r eine gut konvergierende Reihe liefert. (Das Gebiet schneller Konvergenz der Reihe kann auch zur Präzisierung dieses Begriffs „mäßiggroßer Abstand" dienen.) Jedes Glied der Reihe läßt sich seinerseits nach Potenzen von $1/r$ entwickeln, wobei in den Entwicklungskoeffizienten die „Momente" (86,05) mit $\tau = t$ auftreten.

Man kann aber in dem Ausdruck (86,04) für t' die Größe

$$\tau = t - \frac{r}{c} \tag{86,06}$$

abtrennen und t' in der Form

$$t' = \tau + \frac{1}{c}(r - |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|) \tag{86,07}$$

schreiben. Entwickelt man dann t' und σ nach Potenzen von $1/c$, und zwar *nur soweit diese Größe außerhalb τ auftritt*, so erhält man eine anders beschaffene Reihe, nämlich eine solche, die für beliebig große Werte von r konvergiert.

Nehmen wir von dieser Reihe nur die Gesamtheit der Glieder, die bei wachsendem r am langsamsten abnehmen, so erhalten wir einen Ausdruck für ψ, der in der Wellenzone, d. h. für sehr große Werte von r gilt. Daß wir nur die am langsamsten abnehmenden Glieder berücksichtigen, entspricht einer Ersetzung der Größe (86,07) durch den Ausdruck

$$t' = \tau + \frac{(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}')}{c}, \tag{86,08}$$

wo

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{r}}{r}; \quad n_i = \frac{x_i}{r} \tag{86,09}$$

der Einheitsvektor in Richtung von $\mathfrak{r}$ ist. Auf diese Weise erhalten wir für ψ einen Ausdruck von der Form

$$\psi = \frac{1}{r}\,\mu(\tau, \mathfrak{n}). \tag{86,10}$$

Die hier auftretende Funktion

$$\mu(\tau, \mathfrak{n}) = \int \sigma\left(\tau + \frac{(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}')}{c}, \mathfrak{r}'\right)(d\,x')^3 \tag{86,11}$$

hängt von *drei* Argumenten ab: der Größe τ und den beiden Winkeln, die $\mathfrak{n}$ festlegen. Für eine beliebige Funktion μ dieser drei Argumente ist ψ eine Näherungslösung der homogenen Wellengleichung.

Existieren die Momente (86,05), so können wir folgende Entwicklung für μ aufschreiben

$$\mu(\tau, \mathfrak{n}) = \mu_0 + \frac{n_i}{c}\,\dot{\mu}_i + \frac{1}{2}\,\frac{n_i n_k}{c^2}\,\ddot{\mu}_{ik} + \cdots \tag{86,12}$$

oder

$$\mu(\tau, \mathfrak{n}) = \mu_0 + \frac{x_i}{c\,r}\,\dot{\mu}_i + \frac{1}{2}\,\frac{x_i x_k}{c^2 r^2}\,\ddot{\mu}_{ik} + \cdots, \tag{86,13}$$

worin die Punkte über den Größen (86,05) die Ableitungen dieser Größen nach ihrem Argument τ oder, was auf dasselbe hinauskommt, nach der Zeit t bezeichnen.

Als Wellenzone kann man auch dasjenige Gebiet definieren, in dem sich die Lösung ψ der Wellengleichung mit großer Genauigkeit in der Form (86,10) ausdrücken läßt.

Sind die Abmessungen des Systems klein gegen die Länge der von ihm emittierten Wellen, so konvergiert die Entwicklung (85,12) schnell; das Hauptglied ist dabei das erste von Null verschiedene Glied. Ist dies das Glied μ_0, so besitzt die Funktion ψ Kugelsymmetrie.

§ 87 Die Gravitationspotentiale in der Wellenzone

Wir wenden uns nun den in § 68 aufgestellten EINSTEINschen Gleichungen zu. Nach (68,13) führen wir die Bezeichnung

$$N^{\mu\nu} = \left(\frac{-g}{c^2}\right)\left\{\Pi^{\mu,\alpha\beta}\,\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,y^{\mu}y^{\nu} + \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}L\right\} \tag{87,01}$$

ein, wo L die LAGRANGE-Funktion

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}\,y_\nu y^\nu \tag{87,02}$$

ist, während die anderen Größen folgende Bedeutung haben:

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\varrho}\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\varrho} + \mathfrak{g}^{\beta\varrho}\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\varrho} - \mathfrak{g}^{\mu\varrho}\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho}\right), \tag{87,03}$$

$$\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}g_{\alpha\lambda}\Pi^{\nu,\mu\lambda}, \tag{87,04}$$

$$y_\nu = \frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\nu}; \quad y^\nu = g^{\mu\nu}y_\mu. \tag{87,05}$$

Dann lauten die EINSTEINschen Gleichungen in harmonischen Koordinaten

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}R\right) = -\frac{1}{2c^2}\,\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma g}{c^4}\,T^{\mu\nu}. \tag{87,06}$$

Wir müssen die asymptotische Form der Lösungen dieser Gleichungen in großen Abständen untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst die Wellengleichung

$$\sqrt{-g}\,\Box\,\psi \equiv \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0 \tag{87,07}$$

und ersetzen darin die Koeffizienten $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ durch ihre „statischen" Werte, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß der Koordinatenursprung im Schwerpunkt des Massensystems liegt. Wir können dabei die Ausdrücke (85,41), (85,46) und (85,48) verwenden, in denen wir jedoch alle Terme weglassen, die schneller als $1/r$ abfallen; von den Termen der Ordnung $1/r$ lassen wir (vorerst) nur den statischen stehen. Führen wir den Gravitationsradius der Gesamtmasse

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2} \tag{87,08}$$

ein und gehen zu Kugelkoordinaten über, die mit den harmonischen durch die üblichen Formeln (57,03) verknüpft sind, so können wir die Wellengleichung (87,07) in der Form

$$\Box^0\psi = \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{4\alpha}{r}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\Delta^*\psi\right) = 0 \tag{87,09}$$

schreiben. Dabei ist $\Delta^*\psi$ der gewöhnliche LAPLACE-Operator auf der Kugel [Formel (57,06)]. Uns interessieren Lösungen vom Typ einer auslaufenden Welle. Für diese nimmt die Größe $\frac{\Delta^*\psi}{r^2}$ im Unendlichen schneller ab als die übrigen Terme der Gleichung, und wir können sie weglassen. Die Gleichung (86,22) lautet dann

$$\frac{1}{c^2}\left(1+\frac{4\alpha}{r}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0. \tag{87,10}$$

Unabhängige Variable sind dabei nur r und t, während die Winkel ϑ und φ lediglich als Parameter eingehen.

Führen wir die Substitution

$$r\psi = f \tag{87,11}$$

durch und statt r die Variable

$$r^* = r + 2\alpha\,(\lg r - \lg r_0) \tag{87,12}$$

ein, wobei r_0 eine positive Konstante ist, so erhalten wir, bis auf kleine Größen,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial r^{*2}}=0. \tag{87,13}$$

Eine Lösung vom Typ einer auslaufenden Welle ist

$$f = f\,(\tau, \mathfrak{n}), \tag{87,14}$$

wobei $\mathfrak{n}$ wie früher der Einheitsvektor (86,09) ist, während τ jetzt die Bedeutung

$$\tau = t - \frac{1}{c}\,r^* \tag{87,15}$$

oder

$$\tau = t - \frac{1}{c}\left(r + 2\alpha\lg\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) \tag{87,16}$$

hat. Die Lösung der Gleichung (87,09) vom Typ einer auslaufenden Welle hat also die asymptotische Form

$$\psi = \frac{1}{r}\,f\,(\tau, \mathfrak{n}), \tag{87,17}$$

wobei die Größe τ hier als endlich vorausgesetzt wird, während r unbegrenzt wächst.

Unter diesen Bedingungen dürfen die asymptotischen Werte der Ableitungen von ψ nach den Koordinaten und der Zeit so berechnet werden, als hinge die Funktion ψ von diesen nur über τ ab. Setzen wir

$$k_\alpha = \frac{\partial\tau}{\partial x_\alpha}, \tag{87,18}$$

so erhalten wir in der betrachteten Näherung

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = k_\alpha \dot{\psi} . \tag{87,19}$$

Vernachlässigen wir Terme von der Ordnung α/r gegenüber Eins, so können wir die Größen k_α zu

$$k_0 = 1 ; \quad k_i = -\frac{n_i}{c} \tag{87,20}$$

annehmen. In Übereinstimmung damit können wir setzen

$$k^0 = \frac{1}{c^2} ; \quad k^i = + \frac{n_i}{c} , \tag{87,21}$$

woraus folgt

$$k_\alpha k^\alpha = 0 . \tag{87,22}$$

Die Größen k_α sind den Komponenten eines vierdimensionalen Nullvektors proportional (im GALILEIschen Raum, der den Grenzwerten von $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ entspricht).

Wir fügen nun in den Koeffizienten der Wellengleichung (87,07) zu den statischen Werten von $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ den Wellenanteil $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ hinzu und setzen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\alpha}{cr} + \mathfrak{b}^{00} , \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \mathfrak{b}^{0i} , \\ \mathfrak{g}^{ik} &= - c\,\delta_{ik} + \mathfrak{b}^{ik} . \end{aligned}\right\} \tag{87,23}$$

Hinsichtlich der Größen $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ werden wir annehmen, daß sie im Wellengebiet entweder die Form (87,17) haben oder jedenfalls der Bedingung (87,19) genügen. Deshalb können wir die Ableitungen von $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ nach der Formel

$$\frac{\partial \mathfrak{b}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = k_\alpha \dot{\mathfrak{b}}^{\mu\nu} \tag{87,24}$$

berechnen; da die Ableitungen der statischen Terme in $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ wie $1/r^2$ abnehmen und weggelassen werden können, so ist auch

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = k_\alpha \dot{\mathfrak{b}}^{\mu\nu} . \tag{87,25}$$

Die Harmonizitätsbedingung für $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ lautet dann

$$k_\mu \dot{\mathfrak{b}}^{\mu\nu} = 0 \tag{87,26}$$

und kann über τ integriert werden. Da wir den statischen Anteil von $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ bereits abgetrennt haben, so können wir die Integrationskonstanten gleich Null setzen und erhalten

$$k_\mu \mathfrak{b}^{\mu\nu} = 0 . \tag{87,27}$$

Danach lassen sich die gemischten und die zeitliche Komponenten der Größe $b^{\mu\nu}$ durch die räumlichen Komponenten nach den Formeln

$$b^{0i} = \frac{n_k}{c} b^{ik}; \quad b^{00} = \frac{n_i n_k}{c^2} b^{ik} \tag{87,28}$$

ausdrücken. Die genauere Form des mit $\frac{1}{c}\sqrt{-g}$ multiplizierten D'ALEMBERT-Operators, die wir durch Einsetzen der Koeffizienten $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ aus (87,23) in die Formel (87,07) erhalten, lautet

$$\frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\Box\psi = \Box^\circ\psi + \frac{1}{c}\, b^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{87,29}$$

Ist aber ψ eine Funktion vom Typ einer auslaufenden Welle, die von den Koordinaten und der Zeit in erster Linie über τ abhängt und der Beziehung (87,19) genügt, so gilt wegen (87,27)

$$b^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = k_\alpha k_\beta b^{\alpha\beta}\ddot{\psi} = 0. \tag{87,30}$$

Der Zusatzterm im D'ALEMBERT-Operator (87,29) verschwindet also für sich, und wir können die Untersuchung der Lösungen vom Typ einer auslaufenden Welle so durchführen, als enthielten die Koeffizienten des D'ALEMBERT-Operators in der Wellengleichung (87,07) und in den EINSTEINschen Gleichungen (87,06) nur einen statischen Teil. Dadurch haben wir uns sozusagen von dem nichtlinearen Anteil der Terme befreit, die in den EINSTEINschen Gleichungen zweite Ableitungen enthalten.

Wir wollen nun die nichtlinearen Terme mit ersten Ableitungen betrachten. Diese dürfen wir nicht von Anfang an fortlassen, da sie in der Wellenzone nicht schneller als $1/r^2$ abklingen und das asymptotische Verhalten der Lösung stark beeinflussen können. Bei ihrer Berechnung können wir aber die Vereinfachungen einführen, die sich aus der Formel (87,25) und dem Umstand ergeben, daß man die Komponenten des Fundamentaltensors außerhalb des Ableitungssymbols durch ihre Grenzwerte ersetzen darf. Heben und senken wir die Indizes mit Hilfe dieser Grenzwerte, so können wir zum Beispiel schreiben

$$k^\alpha = g^{\alpha\beta} k_\beta; \quad \dot{b}^\mu_\alpha = g_{\nu\alpha}\dot{b}^{\mu\nu} \quad \text{usw.,} \tag{87,31}$$

als wären die entsprechenden Größen Tensoren. Unter Benutzung der exakten Formel

$$y_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\, g_{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \tag{87,32}$$

können wir dann schreiben:

$$y_\alpha = \frac{k_\alpha}{2c}\dot{b}^\nu_\nu; \quad y^\alpha = \frac{k^\alpha}{2c}\dot{b}^\nu_\nu. \tag{87,33}$$

Die Größen (87,03) und (87,04) lauten damit

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta} = -\frac{1}{2c}(k^\alpha \dot{b}^{\mu\beta} + k^\beta \dot{b}^{\mu\alpha} - k^\mu \dot{b}^{\alpha\beta}), \tag{87,34}$$

$$\Pi^\nu_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2c}(k_\alpha \dot{b}^\nu_\beta + k_\beta \dot{b}^\nu_\alpha - k^\nu \dot{b}_{\alpha\beta}). \tag{87,35}$$

Aus den Beziehungen (87,22) und (87,26) ergibt sich

$$k_\nu \Pi^\nu_{\alpha\beta} = 0; \quad y_\nu y^\nu = 0. \tag{87,36}$$

Deshalb hat die LAGRANGE-Funktion in der Wellenzone den Wert Null

$$L = 0 \tag{87,37}$$

genau wie bei elektromagnetischen Wellen.

Multiplizieren wir die drei Terme in (87,34) mit den drei Termen in (87,35), so erhalten wir neun Summen, von denen jedoch nur eine von Null verschieden, und zwar gleich

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{4c^2} k^\mu k^\nu \dot{b}^{\alpha\beta} \dot{b}_{\alpha\beta} \tag{87,38}$$

ist. Wenn wir die gefundenen Ausdrücke in (87,01) einsetzen und den Faktor $\left(\frac{-g}{c^2}\right)$ durch Eins ersetzen, so erhalten wir

$$N^{\mu\nu} = \frac{1}{4c^2} k^\mu k^\nu \left(\dot{b}^{\alpha\beta}\dot{b}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{b}^\alpha_\alpha \dot{b}^\beta_\beta\right). \tag{87,39}$$

Für uns sind folgende Eigenschaften des Ausdrucks $N^{\mu\nu}$ wesentlich. Einerseits ist er dem Produkt $k^\mu k^\nu$ porportional und kann nach Einsetzen in die EINSTEIN-Gleichungen (87,06) in den Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ und $\dot{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}$ sowie in $b^{\mu\nu}$ und $\dot{b}^{\mu\nu}$ nur Terme ergeben, die eben diesem Produkt proportional sind. Fügt man andererseits zu $\dot{b}^{\mu\nu}$ Terme hinzu, die zu $k^\mu k^\nu$ proportional sind, d. h., macht man die Substitution

$$\dot{b}^{\alpha\beta} \to \dot{b}^{\alpha\beta} + \lambda k^\alpha k^\beta, \tag{87,40}$$

so ändert sich die Größe $N^{\mu\nu}$ wegen der Harmonizitätsbedingung (87,26) und der Beziehung (87,22) nicht. Dies erlaubt es, die Bestimmung der asymptotischen Form von $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ bei Berücksichtigung der nichtlinearen Terme auf die Lösung linearer Gleichungen zurückzuführen.

Wir setzen

$$\sigma_g = \frac{1}{32\pi\gamma}\left(\dot{b}^{\alpha\beta}\dot{b}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{b}^\alpha_\alpha \dot{b}^\beta_\beta\right). \tag{87,41}$$

Wie sich im folgenden zeigen wird, spielt diese Größe die Rolle der Energiedichte der Gravitationswellen. Die Formel (87,39) lautet dann

$$N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\sigma_g k^\mu k^\nu. \tag{87,42}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die EINSTEINschen Gleichungen (87,06) ein und erhalten

$$\frac{1}{2c} \Box \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2} (T^{\mu\nu} + \sigma_g k^\mu k^\nu). \tag{87,43}$$

Bisher haben wir bei der Bildung des Massentensors die elektromagnetische Energie ganz vernachlässigt. Berücksichtigen wir dagegen die Energie der elektromagnetischen Ausstrahlung des Systems von Körpern, und bezeichnen wir deren Dichte mit σ_{em}

$$\sigma_{em} = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2), \tag{87,44}$$

so erhalten wir für den Tensor der elektromagnetischen Energie in der Wellenzone den Ausdruck

$$T^{\mu\nu} = \sigma_{em} k^\mu k^\nu. \tag{87,45}$$

[Wir haben für diesen Tensor die Bezeichnung $T^{\mu\nu}$ beibehalten, da sich in der Wellenzone der gesamte Massentensor auf die Form (87,45) reduziert, denn der Anteil, welcher der ponderablen Materie[1]) entspricht, ist dort gleich Null.] Die EINSTEINschen Gleichungen lassen sich also in der Wellenzone in der Form

$$\frac{1}{2c} \Box \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2} \sigma k^\mu k^\nu \tag{87,46}$$

schreiben. Dabei verstehen wir unter σ die Summe $\sigma_{em} + \sigma_g$, wenn wir die elektromagnetische Ausstrahlung berücksichtigen, oder nur σ_g, wenn wir es mit einem reinen Gravitationsproblem zu tun haben.

Zur Lösung der Gleichungen (87,46) spalten wir in $b^{\mu\nu}$ einen zu $k^\mu k^\nu$ proportionalen Term ab, schreiben also $b^{\mu\nu}$ in der Form

$$b^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + h k^\mu k^\nu. \tag{87,47}$$

Wie bereits erwähnt, ändert sich bei der Ersetzung von $b^{\mu\nu}$ durch $h^{\mu\nu}$ der Ausdruck (87,41) für σ_g nicht, so daß wir haben

$$\sigma_g = \frac{1}{32\pi\gamma} \left(\dot{h}^{\alpha\beta} \dot{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \dot{h}^{\alpha}_{\alpha} \dot{h}^{\beta}_{\beta} \right). \tag{87,48}$$

Auch die Beziehungen (87,27) und (87,28) bleiben in Kraft; wir können schreiben

$$k_\mu h^{\mu\nu} = 0. \tag{87,49}$$

Die in (87,47) auftretenden Größen $h^{\mu\nu}$ und h können wir den Gleichungen

$$\Box h^{\mu\nu} = 0, \tag{87,50}$$

$$\Box h = \frac{16\pi\gamma}{c} \sigma \tag{87,51}$$

---

[1]) D. h. den Körpern mit einer von Null verschiedenen Ruhmasse.

unterwerfen. Dabei kann man nach einer früheren Bemerkung den Operator $\Box$ durch den einfacheren Operator $\Box^\circ$ ersetzen [Formel (87,09)]. Die Größen $h^{\mu\nu}$ genügen dann einer *linearen* Wellengleichung, und auf Grund von (87,17) können wir für sie die asymptotische Form

$$h^{\mu\nu} = \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{\mu\nu}(\tau, \mathfrak{n}) \tag{87,52}$$

fordern. Der Koeffizient $2\gamma/c^3$ wurde hinzugefügt, um eine Abschätzung der Größenordnung von $h^{\mu\nu}$ zu erleichtern; die räumlichen Komponenten f^{ik} haben dann nämlich die Größenordnung der kinetischen Energie des Systems.

Setzen wir diese Werte von $h^{\mu\nu}$ in (87,48) ein, so erhalten wir für σ_g einen Ausdruck, der umgekehrt proportional zu r^2 ist. In der gleichen Weise hängt auch der elektromagnetische Anteil der Energiedichte von r ab. Infolgedessen hat auch die gesamte Energiedichte σ in der Gleichung (87,51) die Form

$$\sigma = \frac{\sigma_0(\tau, \mathfrak{n})}{r^2}. \tag{87,53}$$

Der Gravitationsanteil σ_{0g} der Funktion σ_0 läßt sich durch die Größen $f^{\mu\nu}$ nach einer zu (87,48) analogen Formel ausdrücken, nämlich

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left(\dot{f}^{\alpha\beta}\dot{f}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\dot{f}^{\alpha}_{\alpha}\dot{f}^{\beta}_{\beta}\right). \tag{87,54}$$

Setzen wir den Ausdruck (87,53) für σ in die Gleichung (87,51) ein, so erhalten wir für h die Gleichung

$$\Box h = \frac{16\pi\gamma}{c r^2}\sigma_0(\tau, \mathfrak{n}), \tag{87,55}$$

deren rechte Seite man als bekannt ansehen kann. Nicht nur die Größen $h^{\mu\nu}$, sondern auch die Größe h genügt also einer *linearen* Gleichung. Die asymptotische Form der Lösung dieser Gleichung lautet

$$h = \frac{8\pi\gamma \lg r}{r}\int_{\tau_0}^{\tau}\sigma_0(\tau, \mathfrak{n})\,d\tau + \frac{h_0(\tau, \mathfrak{n})}{r}. \tag{87,56}$$

Wir setzen

$$4\pi c\int_{\tau_0}^{\tau}\sigma_0(\tau, \mathfrak{n})\,d\tau = \Delta\mathcal{E}(\tau, \mathfrak{n}). \tag{87,57}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $\frac{d\Omega}{4\pi}$, wobei $d\Omega$ das Raumwinkelelement ist, so gibt er den Energiestrom in diesen Raumwinkel mit der Richtung $\mathfrak{n}$ und während der Zeit $\tau - \tau_0$ an. Setzt man den Ausdruck (87,57) in die vorstehende Formel ein, so läßt sich diese folgendermaßen schreiben

$$h = \frac{2\gamma}{c r}\left(\lg r\,\Delta\mathcal{E}(\tau, \mathfrak{n}) + \varepsilon(\tau, \mathfrak{n})\right). \tag{87,58}$$

Dabei kann man die Größe $\varepsilon(\tau, \mathfrak{n})$ als von der gleichen Ordnung wie $\Delta\mathcal{E}(\tau, \mathfrak{n})$ ansehen (man könnte auch diese Größe ganz fortlassen und in den Formeln für $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ die entsprechenden Terme zu $f^{\mu\nu}$ rechnen).

Setzen wir die Werte (87,52) und (87,58) für $h^{\mu\nu}$ und h in die rechte Seite der Formel (87,47) für $b^{\mu\nu}$ ein und diese dann in die Formeln (87,23) für $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, so erhalten wir die folgenden asymptotischen Ausdrücke für die Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ in der Wellenzone:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{00} + \frac{2\gamma}{c^5 r}(\lg r\Delta\mathcal{E} + \varepsilon), \\ \mathfrak{g}^{0i} &= \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{0i} + \frac{2\gamma}{c^4 r} n_i (\lg r\Delta\mathcal{E} + \varepsilon), \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} f^{ik} + \frac{2\gamma}{c^3 r} n_i n_k (\lg r\Delta\mathcal{E} + \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{87,59}$$

Hierbei lassen sich die Größen f^{0i} und f^{00} durch f^{ik} nach Formeln ausdrücken, die zu (87,28) analog sind, nämlich

$$f^{0i} = \frac{n_k}{c} f^{ik}; \qquad f^{00} = \frac{n_i n_k}{c^2} f^{ik}. \tag{87,60}$$

Wir vergleichen die Ausdrücke für die Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ in der Wellenzone mit ihren Ausdrücken in mäßig großen Abständen, die wir in § 85 erhalten haben. Dabei können wir zunächst die Terme vernachlässigen, die lg r enthalten und vom Energieverlust herrühren. Die übrigen Terme können wir so schreiben, daß sie in die entsprechenden Terme der Formeln (85,41), (85,46) und (85,48) übergehen. Zu diesem Zweck setzen wir

$$D_{ik}(t) = \int \varrho x_i x_k (dx)^3, \tag{87,61}$$

ersetzen darin t durch τ und verknüpfen f^{ik} mit $D_{ik}(\tau)$ durch die Beziehung

$$f^{ik} = \frac{d^2}{d\tau^2} D_{ik}(\tau). \tag{87,62}$$

Dann gehen die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}^{00} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{D_{ik}(\tau)}{r}, \\ \mathfrak{g}^{0i} &= -\frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial t} \frac{D_{ik}(\tau)}{r}, \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{D_{ik}(\tau)}{r} \end{aligned}\right\} \tag{87,63}$$

in der Wellenzone in (87,59) über (bis auf die Terme, die vom Energieverlust herrühren), während sie für „mäßiggroße" Abstände die Hauptterme der Formeln (85,41), (85,46) und (85,48) liefern. Dabei kann man für mäßig große Abstände in dem Ausdruck (87,15) für τ den logarithmischen Term weglassen (r^* kann durch r ersetzt werden).

§ 88 Allgemeine Bemerkungen über die Erhaltungssätze

Die Gravitationsenergie spielt in der Theorie der Schwerkraft eine ganz besondere Rolle, die sich von der aller übrigen Energieformen unterscheidet. Sie geht nicht explizite in den Energietensor ein, sondern wird indirekt über die Gravitationspotentiale berücksichtigt. Die Anwesenheit eines Gravitationsfeldes und der damit verbundenen Energie äußert sich, wie wir wissen, in einer Änderung der Eigenschaften von Raum und Zeit. Die Abtrennung der Gravitationsenergie im Energietensor in Form von Zusatztermen läßt sich nur künstlich durchführen, indem man das Koordinatensystem festlegt und die Problemstellung dahingehend modifiziert, daß man die Eigenschaften der Raum-Zeit von vornherein fixiert und das Gravitationsfeld als etwas darin[1]) Eingebettetes betrachtet (wie man das auch in der NEWTONschen Theorie tut). Die der Gravitationsenergie entsprechenden Zusatzterme im Energietensor sind nicht kovariant (d. h., sie bilden keinen Tensor). Je nach der Wahl des Koordinatensystems kann sich der Wert dieser zusätzlichen Terme in einem bestimmten Raum-Zeit-Punkt zu Null oder von Null verschieden ergeben (das kann bei einem Tensor nicht der Fall sein). Deshalb läßt sich die Gravitationsenergie nicht lokalisieren. Diese Eigenschaft der Gravitationsenergie tritt physikalisch dadurch in Erscheinung, daß man *das Gravitationsfeld nicht abschirmen kann.* Um sich von der Wirkung eines Gravitationsfeldes zu befreien, bleibt einem nichts anderes übrig, als sich weit genug von den Massen zu entfernen, die das Feld erzeugen. Das ist bei einem isolierten System von Massen auch möglich. Das von einem solchen System erzeugte Gravitationsfeld kann man als eine lokale Inhomogenität im unendlichen euklidischen Raum (oder in der GALILEIschen Raum-Zeit) auffassen. Bei dieser Betrachtungsweise lassen sich (unter Vernachlässigung der Ausstrahlung, von der noch die Rede sein wird) die zehn Integrale der EINSTEINschen Gleichungen bilden, die den zehn klassischen Integralen der Gleichungen der Mechanik entsprechen. Vier davon — die Integrale der Energie und des Impulses — bilden einen Vierervektor in der GALILEIschen Raum-Zeit, in die das Massensystem und sein Gravitationsfeld eingebettet sind. Die übrigen sechs Integrale bilden in dieser Raum-Zeit einen antisymmetrischen Tensor; es sind die Integrale des Drehimpulses und der Schwerpunktsbewegung des Systems.

Wichtig ist die Feststellung, daß die Existenz der zehn Integrale der Bewegung mit der Isotropie und Homogenität der GALILEIschen Raum-Zeit, in die das System eingebettet ist, zusammenhängt und folglich auch mit der Euklidizität des Raumes im Unendlichen. Der Verzicht auf die Forderung nach Isotropie, Homogenität und Euklidizität im Unendlichen hat die Verletzung aller oder einiger Erhaltungssätze, die durch die zehn Bewegungsintegrale ausgedrückt werden, zur Folge. Vom physikalischen Standpunkt aus ist das ganz natürlich, denn die Isotropie und die Homogenität im Unendlichen sind der Ausdruck für die Isoliertheit des Systems, und man kann nur dann erwarten, daß die Erhaltungssätze erfüllt sind, wenn das System isoliert ist.

Wir müssen noch auf eine Ursache hinweisen, auf Grund derer ein System sich bewegender Massen niemals im aktiven Sinne völlig isoliert sein kann

[1]) D. h. in eine Raum-Zeit mit fixierten Eigenschaften.

(d. h. bezüglich der Abgabe von Energie, nicht aber in bezug auf deren Aufnahme von außen). Diese Ursache besteht darin, daß das System elektromagnetische und Gravitationswellen (und vielleicht auch noch andere Wellenarten) ausstrahlt. Jedoch ist für Systeme, die dem Sonnensystem ähnlich sind, der Energieverlust durch Ausstrahlung sogar innerhalb geologischer Zeiträume sehr klein gegenüber dem vorhandenen Energievorrat, obwohl er absolut genommen einen bedeutenden Wert hat (bei der Sonne entspricht die emittierte Leistung der sekundlichen Zerstrahlung von 4000000 Tonnen ponderabler Materie). Was die Ausstrahlung von Gravitationswellen im besonderen betrifft, so ist diese vollkommen unbedeutend: Eine grobe Abschätzung nach Formeln, die auf den Ergebnissen des vorigen Paragraphen basieren, zeigt, daß die vom Sonnensystem in Form von Gravitationswellen emittierte Leistung 10^{23} bis 10^{24} mal kleiner ist als die in Form elektromagnetischer Wellen emittierte und insgesamt etwa 1 kW beträgt. (Eine solche Abschätzung wird in § 90 durchgeführt.) Deshalb kann man bei allen Überlegungen, außer vielleicht rein theoretischen, den Einfluß der Gravitationswellen ganz vernachlässigen. Dieses Ergebnis zeigt insbesondere, daß das in Kapitel VI betrachtete Problem der Bewegung eines Systems von gravitierenden Massen mit sehr großer Genauigkeit als ein reines Problem der Mechanik (ohne Berücksichtigung der Ausstrahlung) aufgefaßt werden kann, und zwar nicht nur in der Näherung, in welcher es dort gelöst wurde, sondern auch in den darauffolgenden Näherungen (für die jedoch kein praktisches Interesse besteht).

§ 89 Die Formulierung der Erhaltungssätze

In einer Theorie, die mit der GALILEIschen Raum-Zeit arbeitet, lassen sich die klassischen Erhaltungssätze in differentieller Form schreiben, und zwar in Form der Beziehungen (31,10). Ihre Verallgemeinerung ist die Relation

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{89,01}$$

die man nach (41,25) in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \tag{89,02}$$

schreiben kann. Jedoch führt die Beziehung (89,01) für sich allein nicht zu Erhaltungssätzen. Mathematisch hat das seinen Grund darin, daß die Existenz des zweiten Termes in (89,02), der außerhalb des Ableitungssymbols steht, im allgemeinen Fall den Schluß auf die Konstanz irgendeines Volumenintegrals unmöglich macht (siehe jedoch § 49). Die physikalische Ursache aber ist der Umstand, daß das Schwerefeld selbst eine Energie besitzt, die nicht explizite in $T^{\mu\nu}$ eingeht, aber nichtsdestoweniger in der allgemeinen Bilanz berücksichtigt werden muß.

Um eine Beziehung zu erhalten, in der auch die Gravitationsenergie berücksichtigt wird, betrachten wir die am Anfang von § 87 aufgeschriebenen EINSTEINschen Gravitationsgleichungen. Wir haben

$$\left(\frac{-g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) = -\frac{1}{2c^2} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + N^{\mu\nu}, \tag{89,03}$$

wobei $N^{\mu\nu}$ durch die Formeln (87,01)—(87,05) definiert wird. Andererseits ist in einem harmonischen Koordinatensystem

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}. \qquad (89,04)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{1}{2c^2}$ und addieren sie zur vorhergehenden, so erhalten wir

$$\left(-\frac{g}{c^2}\right)\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = L^{\mu\nu} \qquad (89,05)$$

mit

$$L^{\mu\nu} = N^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}. \qquad (89,06)$$

In einem beliebigen Koordinatensystem wird die Gleichung (89,05) eine Identität, wenn man unter $L^{\mu\nu}$ den Ausdruck

$$L^{\mu\nu} = N^{\mu\nu} + \frac{1}{2c^2}\left(-\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\mu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\beta\nu}}{\partial x_\beta}\right) \qquad (89,07)$$

versteht, der in den vorhergehenden übergeht, wenn das Koordinatensystem harmonisch ist. Zum Beweis der Identität (89,05) muß man für den EINSTEIN-Tensor den vollständigen Ausdruck (B, 87) verwenden, der im Anhang B abgeleitet wird.

Wenn wir die EINSTEINschen Gleichungen

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{\mu\nu} \qquad (89,08)$$

benutzen und setzen

$$U^{\mu\nu} = \left(-\frac{g}{c^2}\right)T^{\mu\nu} + \frac{c^2}{8\pi\gamma}L^{\mu\nu}, \qquad (89,09)$$

so können wir die Formel (89,05) in der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\alpha\mu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}) = 16\pi\gamma U^{\mu\nu} \qquad (89,10)$$

schreiben. Darin steht links ein Ausdruck, der dem in § 31 behandelten KRUTKOW-Tensor ähnlich ist; die Summe der Ableitungen der linken Seite von (89,10) nach x_μ verschwindet identisch. Wir haben also

$$\frac{\partial U^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (89,11)$$

Die Gesamtheit der Größen $U^{\mu\nu}$ bildet keinen allgemein-kovarianten Tensor. Sie ist nur in bezug auf lineare Transformationen ein Tensor; insbesondere ist $U^{\mu\nu}$ in einem harmonischen Koordinatensystem ein Tensor. Stellt man sich

auf den etwas unnatürlichen Standpunkt, der als „modifizierte Problemstellung" am Anfang des vorigen Paragraphen erwähnt wurde, so kann man in der Formel (89,09) den mit c^2 multiplizierten zweiten Term als den Tensor der Energie des Gravitationsfeldes deuten, dagegen den mit c^2 multiplizierten ersten Term als den Energietensor der ponderablen Materie und aller übrigen Felder außer dem Schwerefeld. Läßt man neben dem harmonischen auch noch andere Koordinatensysteme zu, so ist diese Auffassung nicht ganz eindeutig, wenn man das Gebiet im Inneren des Massensystems betrachtet. In großen Abständen von den Massen jedoch, wo die Raum-Zeit nahezu pseudoeuklidisch ist und die Koordinaten nach Vereinbarung GALILEIsch sind, wird die physikalische Bedeutung der Größen $U^{\mu\nu}$ in jedem Fall eindeutig.

Die Erhaltungssätze in Integralform ergeben sich aus (89,11) völlig eindeutig und enthalten keinerlei Willkür, die mit den innerhalb des Massensystems zugelassenen Abweichungen des Koordinatensystems vom harmonischen zusammenhängt. Wie weiter unten gezeigt wird, liegt das daran, daß sich die Volumenintegrale, die die Energie, den Impuls und die anderen Größen ausdrücken, in Integrale über eine Oberfläche umwandeln lassen, die das Massensystem umschließt.

Wir wollen nun die Integralform der Erhaltungssätze herleiten. Dazu multiplizieren wir die linke Seite von (89,11) mit dem euklidischen Volumenelement

$$dx_1 dx_2 dx_3 = (dx)^3 \tag{89,12}$$

und integrieren über ein hinreichend großes Volumen, welches das Massensystem einschließt. Die Größe des Integrationsgebietes lassen wir vorläufig unbestimmt.

Durch Anwendung des GAUSSschen Satzes erhalten wir Gleichungen von der Form

$$\frac{d}{dt}\int U^{00}(dx)^3 = -\int n_i U^{0i} dS, \tag{89,13}$$

$$\frac{d}{dt}\int U^{0i}(dx)^3 = -\int n_k U^{ik} dS, \tag{89,14}$$

wo n_i der Normalenvektor zur Oberfläche ist. Ist die Fläche, die das Volumen begrenzt, eine Kugel, so können wir setzen

$$n_i = \frac{x_i}{r} \;; \quad dS = r^2\, d\omega, \tag{89,15}$$

wo $d\omega$ das Raumwinkelelement ist.

Infolge der Symmetrie der Größen $U^{\mu\nu}$ in bezug auf die Indizes μ und ν ergeben sich aus der Formel (89,11) auch Beziehungen, die zu (31,06) und (31,07) analog sind und nach Integration liefern

$$\frac{d}{dt}\int (x_i U^{0k} - x_k U^{0i})(dx)^3 = -\int n_j (x_i U^{jk} - x_k U^{ji}) dS, \tag{89,16}$$

$$\frac{d}{dt}\int (x_i U^{00} - t\, U^{0i})(dx)^3 = -\int n_j (x_i U^{j0} - t U^{ji}) dS. \tag{89,17}$$

Wir wollen die physikalische Bedeutung der Volumenintegrale auf der linken Seite dieser Gleichungen klären. Wir setzen[1])

$$\overset{*}{M} = c^2 \int U^{00} (d\,x)^3, \tag{89,18}$$

$$\overset{*}{P}{}^i = c^2 \int U^{0i} (d\,x)^3, \tag{89,19}$$

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = c^2 \int (x_i U^{0k} - x_k U^{0i}) (d\,x)^3, \tag{89,20}$$

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = c^2 \int (x_i U^{00} - t\, U^{0i}) (d\,x)^3. \tag{89,21}$$

[Wir haben die Größen (89,18)—(89,21) mit einem Sternchen versehen, damit sie nicht mit den Konstanten verwechselt werden, die wir bei der Lösung der Gleichungen der Mechanik eingeführt haben.] Die Größe $\overset{*}{M}$ ist die Gesamtmasse des Systems einschließlich der Masse, die dem Feld innerhalb des betrachteten Volumens zukommt. Die Größen $\overset{*}{P}{}^i$ stellen den Impuls, die Größen $\overset{*}{M}{}^{ik}$ den Drehimpuls des Systems dar. Die Größen $\overset{*}{M}{}^{i0}$ kann man in der Form

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = \overset{*}{M} \overset{*}{X}{}^i - \overset{*}{P}{}^i t \tag{89,22}$$

schreiben, wobei die $\overset{*}{X}{}^i$ die Koordinaten des Schwerpunktes des Systems sind. Daraus ergibt sich, daß die $\overset{*}{M}{}^{i0}$ die Größen sind, die in das Bewegungsgesetz für den Schwerpunkt eingehen.

Der Wert der Volumenintegrale (89,18)—(89,21) kann sich in Abhängigkeit von der Größe des Integrationsgebietes etwas ändern. Das rührt davon her, daß auch das Feld eine Energie, einen Impuls usw. besitzt. Es wird jedoch aus dem folgenden (§ 90) deutlich, daß die sich hieraus ergebende Unsicherheit in den Werten der Integrale bei entsprechender Wahl des Integrationsgebietes gegenüber diesen Werten selbst äußerst geringfügig ist.

Wir wollen nun zeigen, daß nicht nur die zeitlichen Ableitungen der Größen (89,18)—(89,21), sondern auch diese Größen selbst als Oberflächenintegrale dargestellt werden können. Dazu betrachten wir die Struktur der Ausdrücke (89,10) für die $U^{\mu\nu}$. Setzen wir $\mu = \nu = 0$, so erhalten wir

$$16\,\pi\,\gamma\, U^{00} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} (\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{\beta 0}). \tag{89,23}$$

Für $\alpha = \beta = 0$ sowie für $\alpha = 0$, $\beta = i$ (wobei $i = 1, 2, 3$ ist) verschwindet der Ausdruck auf der rechten Seite. Deshalb durchlaufen die Indizes α, β in (89,23) in Wirklichkeit nur die räumlichen Werte, und wir können schreiben

$$16\,\pi\,\gamma\, U^{00} = \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k} (\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0}). \tag{89,24}$$

---

[1]) Wir schreiben hier bei M^{ik}, P^i, X^i obere Indizes.

Daraus folgt

$$\overset{*}{M} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0})\,dS. \tag{89,25}$$

Analog zu (89,24) finden wir

$$16\pi\gamma U^{0i} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_j}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}), \tag{89,26}$$

wobei j nur die räumlichen Werte durchläuft, während α auch den Wert $\alpha = 0$ annimmt (dafür fehlt aber der Wert $\alpha = i$). Durch Einsetzen von (89,26) in das Volumenintegral (89,19) erhält man

$$\overset{*}{P}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji})\,dS. \tag{89,27}$$

Aus der Formel (89,26) ergibt sich leicht die Beziehung

$$16\pi\gamma(x_i U^{0k} - x_k U^{0i}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k}\Big\}, \tag{89,28}$$

deren rechte Seite eine Summe von Ableitungen nach den räumlichen Koordinaten darstellt. Setzen wir (89,28) in (89,20) ein und benutzen den Gaussschen Satz, so erhalten wir für den Drehimpuls einen Ausdruck von der Form eines Oberflächenintegrals:

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j\Big\{x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k}\Big\}\,dS. \tag{89,29}$$

Schließlich läßt sich der erste Term des Ausdrucks (89,22) für $\overset{*}{M}{}^{i0}$ folgendermaßen schreiben

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j\Big\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{k0}) + \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{i0} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{00}\Big\}\,dS. \tag{89,30}$$

Damit haben wir alle Größen (89,18)—(89,21) als Oberflächenintegrale dargestellt. Ihre Werte hängen nur vom Verhalten der Gravitationspotentiale in großen Entfernungen ab.

Bei der Aufstellung der Erhaltungssätze in der differentiellen Form haben wir ein symmetrisches System[1]) von Größen $U^{\mu\nu}$ benutzt, das durch die Formel

[1]) Ein anderes symmetrisches System von Größen wird in dem Buch von Landau und Lifschitz „Theorie der Felder" benutzt [25].

(89,09) definiert wird; wie erwähnt, stellen diese Größen ein Analogon zu einem kontravarianten, symmetrischen Tensor dar. In der Literatur jedoch, angefangen von den ersten Arbeiten EINSTEINS, wird ein anderes System von Größen verwendet, die ein Analogon zu einem gemischten (unsymmetrischen) Tensor darstellen und in der folgenden Weise definiert werden.[1])

Am Ende von § 60 wurde eine Formel für die Variation des Wirkungsintegrals abgeleitet, wonach

$$\delta \int L\sqrt{-g}\,(dx) = \int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right)\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,(dx) \tag{89,31}$$

ist. Dabei ist L die LAGRANGE-Funktion (60,23), und (dx) bezeichnet das Produkt der vier Differentiale

$$(dx) = dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{89,32}$$

Wegen

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\,g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{89,33}$$

kann man die Formel (89,31) auch in der Form

$$\delta \int L\sqrt{-g}\,(dx) = -\int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,(dx) \tag{89,34}$$

schreiben. Wir setzen

$$g_\sigma^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \tag{89,35}$$

und können dann die „partiellen Ableitungen" nach $g_\sigma^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ durch die Formel

$$\delta(L\sqrt{-g}) = \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\delta g_\sigma^{\mu\nu} + \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} \tag{89,36}$$

definieren. Gehen wir mit (89,36) in (89,34) ein und integrieren partiell, so erhalten wir für den mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten konservativen Tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{89,37}$$

den Ausdruck

$$\sqrt{-g}\,G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} - \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{89,38}$$

---

[1]) Der Leser, der nicht speziell an dem Vergleich unserer Form der Erhaltungssätze mit der EINSTEINschen Form interessiert ist, kann die folgenden, ziemlich komplizierten Rechnungen (bis zum Ende des § 89) überschlagen.

Wir führen nun ein System von Größen w_ϱ^σ ein, die durch die Formel

$$2\sqrt{-g}\, w_\varrho^\sigma = g_\varrho^{\mu\nu} \frac{\partial(L\sqrt{-g})}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} - \delta_\varrho^\sigma (L\sqrt{-g}) \tag{89,39}$$

definiert werden. Bilden wir die Summe der Ableitungen von (89,39) nach x_σ und benutzen (89,38), so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, w_\varrho^\sigma)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} G_{\mu\nu}. \tag{89,40}$$

Nun gilt aber für jeden symmetrischen Tensor

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} G^{\mu\nu} = -\Gamma_{\nu\varrho}^{\iota} G_\mu^\nu. \tag{89,41}$$

Deshalb kann man die vorhergehende Formel auch in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, w_\varrho^\sigma)}{\partial x_\sigma} = -\Gamma_{\nu\varrho}^{\mu} G_\mu^\nu \tag{89,42}$$

schreiben. Andererseits hat die Divergenz des konservativen Tensors (die identisch verschwindet) die Form

$$\nabla_\sigma G_\varrho^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, G_\varrho^\sigma)}{\partial x_\sigma} - \Gamma_{\nu\varrho}^{\mu} G_\mu^\nu = 0. \tag{89,43}$$

Darin stimmt der zweite Term mit der rechten Seite von (89,42) überein. Eliminieren wir ihn aus (89,42) und (89,43), so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x_\varrho} (\sqrt{-g}\, G_\varrho^\sigma + \sqrt{-g}\, w_\varrho^\sigma) = 0. \tag{89,44}$$

Wenn wir G_ϱ^σ nach den Gravitationsgleichungen durch T_ϱ^τ ausdrücken und setzen

$$-\frac{c^2}{8\pi\gamma} w_\varrho^\sigma = t_\varrho^\sigma, \tag{89,45}$$

so können wir die vorstehende Gleichung folgendermaßen schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} (\sqrt{-g}\, T_\varrho^\tau + \sqrt{-g}\, t_\varrho^\sigma) = 0. \tag{89,46}$$

Diese Gleichung stellt die Differentialform der Erhaltungssätze in der Gestalt dar, in welcher sie meistens in der Literatur angegeben wird. Die Größe

$$\overset{*}{U}_\varrho^\sigma = \frac{\sqrt{-g}}{c} (T_\varrho^\sigma + t_\varrho^\sigma) \tag{89,47}$$

entspricht unserem $U^{\mu\nu}$, ist aber in ihren Indizes nicht symmetrisch. Deshalb lassen sich aus der Beziehung

$$\frac{\partial \overset{*}{U}{}_{\varrho}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = 0 \tag{89,48}$$

keine Formeln ableiten, die den Erhaltungssätzen für den Drehimpuls und die Schwerpunktsbewegung entsprechen. Für die Erhaltungssätze für Energie und Impuls liefern beide Formulierungen [ausgehend von (89,11) bzw. von (89,48)] ein äquivalentes Ergebnis. Das wollen wir jetzt beweisen, wobei wir alle Rechnungen übergehen, da sie recht kompliziert sind.

Aus der Definition (89,39) für die Größen w_{ϱ}^{σ} folgt

$$2\, w_{\varrho}^{\sigma} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\varrho}} - \delta_{\varrho}^{\sigma} L + y_{\alpha} \frac{\partial g^{\sigma\alpha}}{\partial x_{\varrho}} + (y^{\sigma} - \Gamma^{\sigma})\, y_{\varrho}. \tag{89,49}$$

Unter Verwendung von Formeln des Anhangs B erhalten wir daraus

$$2 \sqrt{-g}\,(G_{\varrho}^{\sigma} + w_{\varrho}^{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[\frac{g_{\varrho\tau}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\mathfrak{g}^{\sigma\alpha} \mathfrak{g}^{\tau\beta} - \mathfrak{g}^{\sigma\tau} \mathfrak{g}^{\alpha\beta}) \right] \tag{89,50}$$

und, nach Multiplikation mit $(-c)$,

$$16\, \pi \gamma\, \overset{*}{U}{}_{\varrho}^{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[\frac{c\, g_{\varrho\tau}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\mathfrak{g}^{\sigma\tau} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\sigma\alpha} \mathfrak{g}^{\tau\beta}) \right]. \tag{89,51}$$

Diese Formel ist zu (89,10) analog. Aus ihr erhalten wir

$$\int \overset{*}{U}{}_{\varrho}^{0}\, (d\,x)^3 = \frac{c}{16\, \pi \gamma} \int \frac{g_{\varrho\tau}}{\sqrt{-g}}\, n_j \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\mathfrak{g}^{\alpha j} \mathfrak{g}^{0\tau} - \mathfrak{g}^{\alpha 0} \mathfrak{g}^{j\tau})\, d\,S. \tag{89,52}$$

Da die Integration über eine weit draußen gelegene Oberfläche erfolgt, so können wir dabei den Grenzwert von $\frac{g_{\varrho\tau}}{\sqrt{-g}}$ vor das Integralzeichen ziehen. Vergleichen wir die so erhaltenen Ausdrücke mit (89,25) und (89,27), so können wir schreiben:

$$c \int \overset{*}{U}{}_{\varrho}^{0}\, (d\,x)^3 = \left(\frac{g_{\varrho\tau}}{\sqrt{-g}} \right)_{\infty} \overset{*}{P}{}^{\tau}, \tag{89,53}$$

wobei $\overset{*}{P}{}^{0} = \overset{*}{M}$ ist und $\overset{*}{P}{}^{i}$ den Wert (89,27) hat. Die letzte Formel können wir auch in der Form

$$\int \overset{*}{U}{}_{\varrho}^{0} (d\,x)^3 = \left(\frac{c\, g_{\varrho\tau}}{\sqrt{-g}} \right)_{\infty} \int U^{0\tau} (d\,x)^3 \tag{89,54}$$

schreiben. Diese Beziehungen bestätigen, daß trotz der Unterschiede in den differentiellen Formen der Erhaltungssätze ihre Integralformen einander

äquivalent sind. Außerdem zeigt das Auftreten der Größen $(g_{\varrho\tau})_\infty$ in den Beziehungen (89,54) anschaulich, daß Gesamtenergie und Gesamtimpuls des Systems einen Vierervektor in der GALILEIschen Raum-Zeit darstellen, in die das System eingebettet ist.

§ 90 Die Ausstrahlung von Gravitationswellen und ihre Rolle in der Energiebilanz

In § 89 haben wir die Erhaltungssätze für die Energie und die anderen Größen in Form von Gleichungen geschrieben, die die Bilanz für die betreffende Größe zum Ausdruck bringen, d. h. die Tatsache, daß eine Änderung der in einem bestimmten Volumen eingeschlossenen Gesamtmenge der betreffenden Größe nur auf Grund eines Stromes dieser Größe durch die Oberfläche, die dieses Volumen begrenzt, stattfinden kann. Wir wollen nun die Frage untersuchen, inwieweit man den Strom durch die Oberfläche vernachlässigen und die betreffende Größe als konstant betrachten kann, mit anderen Worten, inwieweit man von Erhaltungssätzen im engeren Sinne sprechen kann. Dabei beschränken wir uns auf die Erhaltungssätze für Energie und Impuls.

Wenn wir die Bezeichnung (89,18) und (89,19) für die Masse und den Impuls benutzen und als Integrationsfläche die Oberfläche einer Kugel wählen, so können wir wegen (89,13)—(89,15) schreiben

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -c^2 \int n_k U^{0k} r^2 \, d\omega, \tag{90,01}$$

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = -c^2 \int n_k U^{ik} r^2 \, d\omega, \tag{90,02}$$

wobei über den Raumwinkel integriert wird. Wir können die Integrationsfläche als so weit entfernt ansehen, daß sie vollständig in der Wellenzone liegt. Auf Grund der Ergebnisse von § 87 folgert man leicht, daß dort die Größen $L^{\mu\nu}$, die durch die Formeln (89,06) oder (89,07) definiert sind, in $N^{\mu\nu}$ übergehen. Verwenden wir für $N^{\mu\nu}$ die Werte (87,42) und für $T^{\mu\nu}$ die Werte (87,45), die einer elektromagnetischen Strahlung entsprechen, so können wir setzen

$$U^{\mu\nu} = \sigma k^\mu k^\nu, \tag{90,03}$$

wobei σ die in § 87 eingeführte Dichte der (elektromagnetischen und Gravitations-) Energie ist. Unter Benutzung der Formel (87,53), die die Abhängigkeit der Energiedichte σ vom Abstand r ausdrückt, können wir auch schreiben

$$U^{\mu\nu} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathfrak{n})}{r^2} k^\mu k^\nu. \tag{90,04}$$

Mit den Werten (87,21) für k^ν haben wir dann

$$U^{0k} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathfrak{n})}{c^3 r^2} n_k; \qquad U^{ik} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathfrak{n})}{c^2 r^2} n_i n_k \tag{90,05}$$

und folglich

$$n_k U^{0k} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathfrak{n})}{c^3 r^2}; \qquad n_k U^{ik} = \frac{\sigma_0(\tau, \mathfrak{n})}{c^2 r^2} n_i. \tag{90,06}$$

Setzen wir diese Werte in (90,01) und (90,02) ein, so erhalten wir

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -\frac{1}{c}\int \sigma_0(\tau, \mathfrak{n})\, d\omega, \tag{90,07}$$

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = -\int n_i \sigma_0(\tau, \mathfrak{n})\, d\omega. \tag{90,08}$$

Die Dichte σ_0 ist aber sowohl für das elektromagnetische als auch für das Gravitationsfeld eine gerade Funktion von n_i. Deshalb ergibt die Formel (90,08)

$$\frac{d\overset{*}{P}{}^i}{dt} = 0. \tag{90,09}$$

In der Formel (90,07) verschwindet das Integral nicht, weil σ_0 eine positive Größe ist und mit wachsendem r nicht gegen Null strebt. Deshalb wird immer ein Verlust an Masse stattfinden.

Wir betrachten zunächst den Anteil des Massenverlustes, der auf der Emission von Gravitationswellen beruht. Wir müssen dann σ_0 durch den Ausdruck σ_{0g} aus (87,54) ersetzen, worin wir für $f^{\alpha\beta}$ die Werte aus (87,60) und (87,62) einsetzen. Zur Abkürzung setzen wir

$$A_{ik} = \frac{d^3}{d\tau^3} D_{ik}(\tau). \tag{90,10}$$

Dann liefert die Formel (87,54)

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\pi c^6}\left\{A^2 - 2\, A_i A_i + A_{ik} A_{ik} - \frac{1}{2}(A - A_{jj})^2\right\}, \tag{90,11}$$

wobei wir die abkürzenden Bezeichnungen

$$A_i = A_{ik} n_k; \qquad A = A_i n_i = A_{ik} n_i n_k \tag{90,12}$$

eingeführt haben. Man kann zeigen, daß die Größe σ_{0g} nicht von den sechs Größen A_{ik}, sondern nur von 5 Kombinationen aus ihnen abhängt, nämlich von den Größen

$$B_{ik} = A_{ik} - a\delta_{ik}; \qquad a = \frac{1}{3} A_{jj}, \tag{90,13}$$

die durch die Beziehung

$$B_{11} + B_{22} + B_{33} = 0 \tag{90,14}$$

verknüpft sind. Die Größen B_{ik} sind die Werte der dritten Ableitungen der Quadrupolmomente

$$\overset{*}{D}_{ik}(t) = \int \varrho \left(x_i x_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} r^2 \right) (d\,x)^3 \tag{90,15}$$

für $t = \tau$. Drücken wir die A_{ik} durch die B_{ik} aus und gehen damit zunächst in (90,12) und dann in (90,11) ein, so sehen wir, daß die Größe a aus dieser Formel herausfällt, und wir erhalten

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\,\pi c^6} \left\{ B_{ik} B_{ik} - 2\,B_i B_i + \frac{1}{2}\,B^2 \right\}. \tag{90,16}$$

Wir beweisen nun, daß diese Größe stets positiv ist. Da sie gegenüber dreidimensionalen Drehungen invariant ist, braucht man den Beweis nur für irgendeine feste Richtung des Vektors $\mathfrak{n}$ zu führen, der in B_i und B eingeht. Setzen wir

$$n_1 = 1; \qquad n_2 = 0; \qquad n_3 = 0 \tag{90,17}$$

und benutzen (90,14), so erhalten wir aus (90,16)

$$\sigma_{0g} = \frac{\gamma}{8\,\pi c^6} \left\{ \frac{1}{2}\,(B_{22} - B_{33})^2 + 2\,B_{23}^2 \right\}, \tag{90,18}$$

also eine positive Größe.

In der Formel (90,07) tritt ein Integral über den Raumwinkel mit dem Ausdruck (90,16) als Integrand auf. Zu dessen Berechnung benutzen wir die Beziehungen

$$\frac{1}{4\pi} \int n_i n_k d\omega = \frac{1}{3} \delta_{ik}, \tag{90,19}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int n_i n_k n_l n_m d\omega = \frac{1}{15} (\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}), \tag{90,20}$$

die man am einfachsten erhält, wenn man in der Identität

$$\frac{1}{4\pi} \int (a_i n_i)^{2p} d\omega = \frac{1}{2p+1} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^p \tag{90,21}$$

zuerst $p = 1$ und dann $p = 2$ setzt und die Koeffizienten der gleichen Potenzen und Produkte der Größen a_i aufsucht. Die Integration in (90,21) läßt sich in Koordinaten, deren Polarachse die Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ hat, leicht ausführen.

Mit den Beziehungen (90,19) und (90,20) finden wir

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(B_{ik} B_{ik} - 2\,B_i B_i + \frac{1}{2}\,B^2 \right) d\omega = \frac{2}{5}\,B_{ik} B_{ik}. \tag{90,22}$$

Gehen wir mit (90,16) in (90,07) ein und benutzen (90,22), so erhalten wir

$$\frac{d\overset{*}{M}}{dt} = -\frac{\gamma}{5\,c^7} B_{ik} B_{ik}. \tag{90,23}$$

Dieser Ausdruck gibt den Massenverlust pro Sekunde infolge der Emission von Gravitationswellen an. Eine entsprechende Formel für den sekundlichen Energieverlust erhält man durch Multiplikation von (90,23) mit c^2

$$\frac{d\overset{*}{W}}{dt} = -\frac{\gamma}{5\,c^5} B_{ik} B_{ik}. \tag{90,24}$$

Dieser Verlust an Masse und Energie ist wegen des sehr großen Wertes der Konstanten

$$\frac{5\,c^3}{\gamma} = 2 \cdot 10^{39}\ \text{g/sec} \tag{90,25}$$

gänzlich unbedeutend. Wenn B die Größenordnung von B_{ik} kennzeichnet, so kann man für das System Sonne—Jupiter ungefähr setzen

$$\frac{B}{c^2} = 10^{14}\ \text{g/sec}, \tag{90,26}$$

denn die Masse, die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufs des Jupiters um die Sonne und das durch c^2 dividierte Quadrat seiner Bahngeschwindigkeit betragen

$$m_J = 2 \cdot 10^{30}\ \text{g}; \quad \omega_J = 2 \cdot 10^{-8}\ \text{sec}^{-1}; \quad \frac{v_J^2}{c^2} = 2 \cdot 10^{-9}. \tag{90,27}$$

Dividieren wir das Quadrat der Zahl (90,26) durch den Wert der Konstante (90,25), so erhalten wir für den Massenverlust $5 \cdot 10^{-12}$ g/sec, was, in energetische Einheiten umgerechnet, die äußerst geringe Leistung von 450 W darstellt. Zum Vergleich erwähnen wir, daß die Leistung der elektromagnetischen Ausstrahlung der Sonne ungefähr $4 \cdot 10^{12}$ g/sec beträgt, also etwa 10^{24} mal größer ist. Diese Abschätzung bestätigt vollauf unsere Schlußfolgerung am Ende von § 88, daß bei dem Problem der Gravitationswechselwirkung schwerer Massen die Gravitationswellen keine Rolle spielen.

Wir wollen noch die Frage untersuchen, mit welcher Genauigkeit man ein System schwerer Massen als konservativ ansehen kann, wenn man von der elektromagnetischen Strahlung absieht. Bei der Lösung des Problems der Mechanik in Kapitel VI haben wir die Bewegungsgleichungen mit einer Genauigkeit abgeleitet, die Energiekorrekturen von der Größenordnung $M\frac{q^4}{c^2}$ zu bestimmen gestattet, wobei q eine charakteristische Geschwindigkeit ist. Die Formel (90,24) zeigt, daß man bei Vernachlässigung der elektromagnetischen Ausstrahlung noch weiter, nämlich bis zu den Termen der Ordnung $M\frac{q^6}{c^4}$ gehen

kann. Mit dieser Genauigkeit kann also das Vielkörperproblem als Problem der Mechanik mit den zehn klassischen Integralen formuliert werden. Wir erinnern daran, daß bei dem Problem der wechselwirkenden elektrischen Ladungen (§§ 26 — 28) die größtmögliche Genauigkeit der Ordnung $M\frac{q^4}{c^2}$ entspricht, weil dort die Strahlung eine weitaus größere Rolle spielt.

§ 91 Der Zusammenhang zwischen den Erhaltungssätzen für das Feld und den Integralen der Mechanik

In § 89 haben wir Formeln für die zeitlichen Ableitungen der Größen $\overset{*}{M}$, $\overset{*}{P}{}^i$, $\overset{*}{M}{}^{ik}$ und $\overset{*}{M}{}^{i0}$ aufgestellt und für diese Größen Darstellungen in Form von Flächenintegralen gefunden. Die Ausdrücke für die Gesamtmasse und für den Impuls haben die Form

$$\overset{*}{M} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0})\,dS, \tag{91,01}$$

$$\overset{*}{P}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji})\,dS. \tag{91,02}$$

Der Drehimpuls wird durch die Formel

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0k} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{jk}) - \right.$$
$$\left. - x_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{g}^{\alpha j}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\mathfrak{g}^{ji}) + \mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k}\right\} dS \tag{91,03}$$

ausgedrückt. Die Größe $\overset{*}{M}{}^{i0}$, die in dem Bewegungsgesetz des Schwerpunktes auftritt, ist gleich

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = \overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i - \overset{*}{P}{}^i t, \tag{91,04}$$

wobei $\overset{*}{P}{}^i$ den Wert (91,02) besitzt, während der erste Term in dem Ausdruck (91,04) lautet

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int n_j\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{k0}) + \mathfrak{g}^{j0}\mathfrak{g}^{i0} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{00}\right\} dS. \tag{91,05}$$

In Abhängigkeit davon, wie weit wir die Integrationsfläche S hinausverlegen, ändern sich die Werte der obigen Integrale für die Gesamtmasse und die anderen physikalischen Größen etwas, denn die Integrationsfläche wird einen größeren oder geringeren Teil der Masse und der anderen Größen, die der „reinen" Gravitations- und elektromagnetischen Strahlung zukommen, einschließen. Wie wir im vorhergehenden Paragraphen festgestellt haben, ist die Energie der Gravitationsstrahlung völlig unbedeutend. Vernachlässigen wir auch die elektromagnetische Strahlung, so brauchen wir die Integrationsfläche nicht mehr in der Wellenzone verlaufen zu lassen, sondern können sie auch in „mäßiggroße"

Abstände von dem System von Körpern verlegen; dadurch trennen wir sozusagen Masse und Energie der Materie und der statischen Felder von der Masse und Energie der reinen Strahlung ab.

Für die Gravitationspotentiale in „mäßiggroßen" Abständen von dem System von Körpern haben wir in den §§ 84—85 Näherungsausdrücke abgeleitet, die wir jetzt benutzen werden. Nach (85,46) hat der Ausdruck für $\mathfrak{g}^{00}$ die Form

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4\gamma M}{c^3 r} + \frac{4\gamma x_j}{c^3 r^3} M X^j + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{2\gamma}{c^3 r} D_{jk} - $$
$$- \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{2\gamma}{3 c^3 r} \int \varrho x_i x_j x_k (dx)^3 + \frac{7\gamma^2 M^2}{c^5 r^2} + \frac{14\gamma^2 M^2 X^j x_j}{c^5 r^4} + \frac{4}{c^5} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (91{,}06)$$

Für die gemischten Komponenten haben wir nach Formel (85,41)

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4\gamma}{c^3 r} P^i + \frac{2\gamma x_j M_{ji}}{c^3 r^3} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} \frac{2\gamma}{c^3 r} D_{ji} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{2\gamma}{c^3 r} \int \varrho v_i x_j x_k (dx)^3 +$$
$$+ \frac{7\gamma^2 M P^i}{c^5 r^2} + \frac{\gamma^2 M P^k x_i x_k}{c^5 r^4} + \frac{4}{c^5} \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}. \quad (91{,}07)$$

Die räumlichen Komponenten schließlich lauten nach (85,48)

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{2\gamma}{c^3 r} D_{ik} -$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} \frac{2\gamma}{c^3 r} \int \varrho (x_j x_i v_k + x_j x_k v_i - x_i x_k v_j)(dx)^3 + \frac{\gamma^2 M^2 x_i x_k}{c^3 r^4}. \quad (91{,}08)$$

In den Formeln (91,06)—(91,08) haben wir statt X_i und P_i immer X^i und P^i geschrieben, um den Vektorcharakter dieser Größen hervorzuheben. Die Größe D_{ji} hat den Wert (85,39), also

$$D_{ji}(t) = \int \varrho x_i x_j \left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi - \frac{1}{2} U\right)\right\} (dx)^3 + \frac{7}{2c^2} \delta_{ij} \int \varrho W (dx)^3. \quad (91{,}09)$$

Beim Einsetzen von D_{ji} in die Formel (91,08) für $\mathfrak{g}^{ik}$ genügt es, in D_{ji} die Hauptterme zu berücksichtigen, die die gewöhnlichen Trägheitsmomente darstellen. Das Argument in D_{ji} ist die Zeit t, und nicht $\tau = t - r^*/c$ wie in der Wellenzone.

In den Ausdrücken für $\mathfrak{g}^{00}$ und $\mathfrak{g}^{0i}$ treten auch Terme auf, die W und W_i enthalten und Retardierungskorrekturen darstellen. Diese Terme lauten näherungsweise

$$\frac{4}{c^5} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{c^5} \left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3}\right) \frac{d^2 D_{jk}}{dt^2} - \frac{\gamma}{3c^5} \frac{\partial^3 r}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{d^2}{dt^2} \int \varrho x_i x_k x_l (dx)^3, \quad (91{,}10)$$

$$\frac{4}{c^5} \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} = -\frac{\gamma}{c^5} \frac{x_j}{r} \frac{d^3 D_{ji}}{dt^3} + \frac{\gamma}{c^5} \left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3}\right) \frac{d^2}{dt^2} \int \varrho v_i x_j x_k (dx)^3. \quad (91{,}11)$$

Die hier aufgeschriebenen Ausdrücke für $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ enthalten die Größen M, P^i, M^{ik}, $MX^i - P^i t$, deren Konstanz die mechanischen Erhaltungssätze ausdrücken. Wir

müssen deshalb erwarten, daß diese Größen mit den Werten der Integrale $\overset{*}{M}$, $\overset{*}{P}{}^i$, $\overset{*}{M}{}^{ik}$, $\overset{*}{M}{}^{i0}$ übereinstimmen, die die Gesamtmasse, den Impuls usw. des ganzen Systems, einschließlich des Feldes, darstellen. Das wollen wir jetzt nachprüfen.

Wir müssen dazu die Ausdrücke (91,06)—(91,08) für $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ in die Oberflächenintegrale (91,01)—(91,05) einsetzen und diese näherungsweise berechnen. Dabei werden wir in $\overset{*}{M}$ und $\overset{*}{P}{}^i$ Terme von der Ordnung q^2/c^2 in bezug auf den Hauptterm beibehalten, während wir uns bei der Berechnung von $\overset{*}{M}{}^{ik}$ und $\overset{*}{M}{}^{i0}$ der Einfachheit halber auf die Hauptterme beschränken.

Wenn wir von den Retardierungskorrekturen absehen, so haben in allen ersten Ableitungen der Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ die Terme, die am langsamsten mit dem Abstand abnehmen, die Größenordnung $1/r^2$ und sind ungerade in den Koordinaten x_1, x_2, x_3. Eine Ausnahme bildet die Ableitung $\frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial t}$, die umgekehrt proportional zu r (und in den Koordinaten gerade) ist. Die Retardierungskorrekturen nehmen im allgemeinen langsamer ab; die Korrektur zum Term $\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_k}$ verschwindet aber auch wie $1/r^2$ und ist ebenfalls ungerade in den Koordinaten x_1, x_2, x_3.

Unter Beachtung dieser Bemerkung bilden wir den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{g}^{ik}\mathfrak{g}^{00} - \mathfrak{g}^{i0}\mathfrak{g}^{k0}) = \mathfrak{g}^{i\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_\alpha} - \mathfrak{g}^{0\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial x_\alpha}, \tag{91,12}$$

der in die Formel (91,01) für $\overset{*}{M}$ eingeht. Die rechte Seite ergibt sich aus der linken, wenn man die Summation über k durch eine Summation über α (einschließlich $\alpha = 0$) ersetzt und die Harmonizitätsbedingung berücksichtigt. Da es zur Berechnung von $\overset{*}{M}$ genügt, die in den Koordinaten ungeraden Terme der Ordnung $1/r^2$ zu kennen, so können wir in dem Ausdruck (91,12) die Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ außerhalb des Ableitungssymbols durch ihre Grenzwerte ersetzen. Damit erhalten wir

$$\mathfrak{g}^{i\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_\alpha} - \mathfrak{g}^{0\alpha}\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial x_\alpha} = -c\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t}. \tag{91,13}$$

Diese Näherung genügt auch bei Berücksichtigung der Retardierungskorrekturen, wenn man deren Größenordnung hinsichtlich q/c beachtet.

Mit den Formeln (91,06) und (91,07) für $\mathfrak{g}^{00}$ und $\mathfrak{g}^{i0}$ erhalten wir nach Multiplikation von (91,13) mit $n_i = x_i/r$ und Summation über i für den Integranden in (91,01) den Ausdruck:

$$-cn_i\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_i} - \frac{n_i}{c}\frac{\partial \mathfrak{g}^{i0}}{\partial t} = \frac{4\gamma M}{c^2 r^2} + \frac{\gamma}{c^4 r^2}(\delta_{ij} - 3n_i n_j)\ddot{D}_{ij}. \tag{91,14}$$

Man sieht leicht ein, daß der zweite Term auf der rechten Seite zu der Kugelfunktion zweiter Ordnung proportional ist und bei der Integration über eine Kugelfläche Null ergibt. Der erste Term aber liefert für das Integral $\overset{*}{M}$ den Wert

$$\overset{*}{M} = M. \tag{91,15}$$

Die Gesamtmasse des Systems $\overset{*}{M}$, einschließlich der Feldmasse, stimmt also in der betrachteten Näherung mit der mechanischen Masse M überein.

Analog läßt sich die Größe $\overset{*}{P^i}$ berechnen. Wir erhalten näherungsweise

$$\mathfrak{g}^{\alpha j}\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_\alpha} - \mathfrak{g}^{\alpha 0}\frac{\partial \mathfrak{g}^{ji}}{\partial x_\alpha} = -c\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_j} - \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{ji}}{\partial t} \tag{91,16}$$

und weiter

$$-c n_j\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_j} - \frac{1}{c}\,n_j\frac{\partial \mathfrak{g}^{ji}}{\partial t} = \frac{4\gamma}{c^2 r^2}\,P^i - \\ - \frac{2\gamma}{c^4 r}\,n_j\,\frac{d^2 D_{ij}}{dt^2} + \frac{\gamma}{c^4 r^2}\,(\delta_{kl} - 3 n_k n_l)\,\frac{d^2}{dt^2}\int \varrho\, v_i\, x_k\, x_l\,(dx)^3. \tag{91,17}$$

Darin haben wir Terme der Ordnung q^2/c^2 in bezug auf den Hauptterm beibehalten und sie nach Potenzen von $1/r$ bis zu $1/r^2$ entwickelt. Bei der Bildung des Ausdruckes (91,17) wurden in der Retardierungskorrektur (91,11) beide Glieder benutzt. Auf der rechten Seite von (91,17) sind der zweite und der dritte Term zu Kugelfunktionen proportional und ergeben bei der Integration in (91,02) Null. Der erste Term aber liefert

$$\overset{*}{P^i} = P^i. \tag{91,18}$$

Der Gesamtimpuls stimmt also ebenfalls mit dem mechanischen überein.

Wir wollen nun $\overset{*}{M}{}^{ik}$ berechnen. In der betrachteten Näherung haben wir

$$n_j\,(\mathfrak{g}^{jk}\mathfrak{g}^{0i} - \mathfrak{g}^{ji}\mathfrak{g}^{0k}) = -c\,(n_k\mathfrak{g}^{0i} - n_i\mathfrak{g}^{0k}). \tag{91,19}$$

Mit der Formel (91,16) und der trivialen Gleichung

$$n_i x_j = n_j x_i \tag{91,20}$$

können wir das Integral (91,03) für $\overset{*}{M}{}^{ik}$ in der Form

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = \frac{c^2}{16\pi\gamma}\int\Big\{c n_i\Big(\mathfrak{g}^{0k} - x_j\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{0k}}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2}\,x_j\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{jk}}{\partial t}\Big) - \\ - c n_k\Big(\mathfrak{g}^{0i} - x_j\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2}\,x_j\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{ji}}{\partial t}\Big)\Big\}\,dS \tag{91,21}$$

schreiben. Zur Berechnung der Integrale, die $\frac{\partial \mathfrak{g}^{jk}}{\partial t}$ enthalten, müßten wir $\mathfrak{g}^{jk}$ bis zu Gliedern kennen, die wie $1/r^3$ abnehmen (wir denken an die Glieder in $\mathfrak{g}^{jk}$, die c^3 im Nenner enthalten). In § 84 wurden aber die $\mathfrak{g}^{jk}$ nur bis zu Gliedern bestimmt, die wie $1/r^2$ abnehmen. Obwohl die Berechnung der fehlenden Glieder keine prinzipiellen Schwierigkeiten bereitet, können wir ohne sie auskommen, wenn wir uns in (91,21) auf die Hauptterme beschränken und berücksichtigen,

daß dazu die Integrale, die $\frac{\partial \mathfrak{g}^{ik}}{\partial t}$ enthalten, nur Korrekturen von der Ordnung q^2/c^2 liefern. Für den Integranden in (91,21) erhalten wir dann den Ausdruck

$$c n_i \left(\mathfrak{g}^{0k} - x_j \frac{\partial \mathfrak{g}^{0k}}{\partial x_j}\right) - c n_k \left(\mathfrak{g}^{0i} - x_j \frac{\partial \mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_j}\right) = \frac{4\gamma}{c^2 r^2} M_{ik} + \frac{8\gamma}{c^2 r} (n_i P_k - n_k P_i) +$$
$$+ \frac{2\gamma}{c^2 r^2} (\delta_{kj} - 3 n_k n_j)(M_{ji} + \dot{D}_{ji}) - \frac{2\gamma}{c^2 r^2} (\delta_{ij} - 3 n_i n_j)(M_{jk} + \dot{D}_{jk}). \quad (91{,}22)$$

Darin ist die rechte Seite nach Kugelfunktionen geordnet und enthält Kugelfunktionen nullter, erster und zweiter Ordnung.[1]) Bei der Integration bleibt nur der erste Term übrig, und wir erhalten

$$\overset{*}{M}{}^{ik} = M_{ik}, \quad (91{,}23)$$

wie auch zu erwarten war.

Es bleibt noch das Integral (91,05) zu berechnen. Mit der Formel (91,13) können wir es in der Form

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i = \frac{c^2}{16\pi\gamma} \int \left\{ c n_i \left(\mathfrak{g}^{00} - x_j \frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_j} - \frac{1}{c^2} x_j \frac{\partial \mathfrak{g}^{j0}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c} n_j (\mathfrak{g}^{ij} + c\,\delta_{ij}) \right\} (dx)^3 \quad (91{,}24)$$

schreiben. Da sich $\frac{\partial \mathfrak{g}^{j0}}{\partial t}$ vermittels der Harmonizitätsbedingung durch $\frac{\partial \mathfrak{g}^{jk}}{\partial x_k}$ ausdrücken läßt und letztere Größen in (91,08) bis zu Gliedern berechnet worden sind, die wie $1/r^3$ abfallen, könnten wir im Integral (91,24) alle Terme bestimmen. Zur Vereinfachung der Rechnungen, die nicht besonders interessant sind, wollen wir uns aber auch hier auf die Hauptterme beschränken. Wir können dann schreiben:

$$c n_i \left(\mathfrak{g}^{00} - x_j \frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial x_j}\right) = \frac{4\gamma M X^i}{c^2 r^2} + n_i \left(1 + \frac{8\gamma M}{c^2 r}\right) - \frac{4\gamma}{c^2 r^2} (\delta_{ij} - 3 n_i n_j) M X^j. \quad (91{,}25)$$

Durch die gleiche Überlegung wie oben erhalten wir daraus

$$\overset{*}{M}\overset{*}{X}{}^i = M X^i; \quad (91{,}26)$$

da bereits bewiesen wurde, daß $\overset{*}{P}{}^i = P^i$ ist, wird

$$\overset{*}{M}{}^{i0} = M X^i - P^i t, \quad (91{,}27)$$

wie es auch sein muß.

Die hier durchgeführten Rechnungen kann man als Kontrolle für die Richtigkeit der Näherungslösung der EINSTEINschen Gleichungen ansehen, die wir in den Formeln (91,06)—(91,08) angaben. Gleichzeitig sind die Ergebnisse dieser

[1]) Bei Berücksichtigung von Gliedern der Ordnung q^2/c^2 in bezug auf die Hauptterme würde der Integrand in (91,21) Kugelfunktionen bis zur vierten Ordnung enthalten.

Rechnungen der anschauliche Ausdruck des Zusammenhanges zwischen den in allgemeiner Form geschriebenen Erhaltungssätzen und den Integralen der Mechanik.

§ 92 Ein Eindeutigkeitssatz für die Wellengleichung

Im nächsten Paragraphen wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, inwieweit das harmonische Koordinatensystem im Fall eines isolierten Systems von Körpern eindeutig festgelegt ist. Bei der Untersuchung dieser Frage werden wir einen Satz brauchen, der eine Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung der Wellengleichung

$$\Box \psi = 0 \tag{92,01}$$

liefert. Wir beweisen hier diesen Satz für die Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten, d. h. für

$$\Box \psi \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right). \tag{92,02}$$

Der Funktion

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \tag{92,03}$$

erlegen wir folgende Bedingungen auf:

(a) Die Bedingung der Beschränktheit: Für alle x, y, z, t gilt die Ungleichung

$$|\psi| < M_0, \tag{92,04}$$

so daß die Funktion ψ gleichmäßig beschränkt ist.

(b) Die Bedingung für das Verschwinden im Unendlichen: Für beliebig große Werte des Abstandes $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vom Koordinatenursprung und für alle t soll die Funktion der Ungleichung

$$|\psi| < \frac{M}{r} \tag{92,05}$$

und ihre ersten Ableitungen den Ungleichungen

$$|\operatorname{grad} \psi| < \frac{M_1}{r}; \qquad \left|\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right| < \frac{M_1}{r} \tag{92,06}$$

genügen, so daß die Funktion ψ und ihre ersten Ableitungen im Unendlichen umgekehrt proportional zu r (oder noch schneller) abnehmen. Dabei sind die Größen M_0, M, M_1 positive Konstanten.

(c) Die Ausstrahlungsbedingung: Für $r \to \infty$ und für alle Werte der Größe $t_0' = t + \frac{r}{c}$ in jedem festen Intervall soll die Gleichung

$$\lim_{r \to \infty} \left\{\frac{\partial (r\psi)}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial (r\psi)}{\partial t}\right\} = 0 \tag{92,07}$$

erfüllt sein. Dadurch wird die Tatsache ausgedrückt, daß nur auslaufende Wellen vorhanden sind, während von außen einlaufende Wellen fehlen.

Wir können nun folgenden *Eindeutigkeitssatz* formulieren: *Die Lösung der homogenen Wellengleichung* $\Box\,\psi = 0$, *die den Bedingungen* (a), (b) *und* (c) *genügt, verschwindet identisch.*

Zum Beweis des Satzes gehen wir von der KIRCHHOFFschen Formel zur Lösung der Wellengleichung[1]) aus. Die KIRCHHOFFsche Formel drückt den Wert der Funktion ψ in einem Raumpunkt $\mathfrak{r}_0$ zur Zeit t_0 durch die Werte von ψ und ihrer Ableitungen auf einer Fläche S aus, die diesen Punkt einschließt, wobei der Wert im Punkt $\mathfrak{r}$ der Fläche nicht zur Zeit t_0, sondern in dem früheren Zeitpunkt

$$t = t_0 - \frac{1}{c}\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0| \tag{92,08}$$

zu nehmen ist. Die KIRCHHOFFsche Formel lautet

$$\psi(\mathfrak{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right] - [\psi]\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial\nu} + \frac{1}{R}\,\frac{\partial R}{\partial\nu}\left[\frac{1}{c}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\right\} dS. \tag{92,09}$$

Dabei bezeichnet R den Abstand

$$R = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0|, \tag{92,10}$$

und $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ ist die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen der Fläche S:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(nz). \tag{92,11}$$

Die eckigen Klammern $[\psi]$ bedeuten, daß das Argument t durch seinen Wert (92,08) ersetzt werden soll, wobei diese Substitution in den Ableitungen $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ und $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ erst *nach* der Differentiation vorzunehmen ist.

Als Fläche S wählen wir eine Kugel vom Radius R mit dem Zentrum im Punkt $\mathfrak{r}_0$. Dann können wir setzen

$$dS = R^2\,d\omega, \tag{92,12}$$

wobei $d\omega$ das Raumwinkelelement ist. Ferner ist

$$\cos(nx) = \frac{x - x_0}{R}; \quad \cos(ny) = \frac{y - y_0}{R}; \quad \cos(nz) = \frac{z - z_0}{R}, \tag{92,13}$$

und wegen

$$\frac{\partial R}{\partial\nu} = 1 \tag{92,14}$$

---

[1]) Zur KIRCHHOFFschen Formel und ihrer Verallgemeinerung, der Formel von SOBOLEW, vgl. SMIRNOW [10]. Bd. II, § 202 und Bd. IV, § 148.

können wir schreiben

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \frac{\partial \psi}{\partial R}. \tag{92,15}$$

Die KIRCHHOFFsche Formel lautet dann

$$\psi(\mathfrak{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \iint \left\{ \frac{\partial [R\psi]}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial [R\psi]}{\partial t} \right\} d\omega. \tag{92,16}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer unter den Integralzeichen ist gleich

$$\frac{\partial [R\psi]}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial [R\psi]}{\partial t} = \psi(\mathfrak{r}, t) + \\ + (x - x_0) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial \psi}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{R}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{92,17}$$

wobei das Argument t den Wert (92,08) hat.

Nach der Formel (92,16) ist der Wert der Funktion ψ im Punkte $\mathfrak{r}_0$, t_0 der Mittelwert des Ausdrucks (92,17) über den Raumwinkel. Damit im Punkt $\mathfrak{r}_0$, t_0 die Funktion ψ verschwindet, ist es offensichtlich hinreichend, daß der Ausdruck (92,17) mit wachsendem R gegen Null geht:

$$\lim_{R \to \infty} \left\{ \frac{\partial [R\psi]}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial [R\psi]}{\partial t} \right\}_{t = t_0 - \frac{R}{c}} = 0. \tag{92,18}$$

Für jeden Punkt $\mathfrak{r}_0$ in endlicher Entfernung vom Koordinatenursprung ist diese Forderung auf jeden Fall erfüllt, wenn die Bedingungen (a), (b) und (c) gelten. Der Ausdruck (92,17) läßt sich nämlich in der Form

$$\frac{\partial [R\psi]}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial [R\psi]}{\partial t} = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 \tag{92,19}$$

schreiben mit

$$\varphi = \psi(\mathfrak{r}, t) + x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{r}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{92,20}$$

$$\varphi_1 = -\left(x_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \tag{92,21}$$

$$\varphi_2 = \frac{R - r}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{92,22}$$

Wegen

$$| R - \mathfrak{r} | \leqslant r_0 \tag{92,23}$$

gilt auf Grund der Ungleichungen (92,06) in der Bedingung (b)

$$|\varphi_1| < \frac{r_0}{r} M_1; \quad |\varphi_2| < \frac{r_0}{r} M_1. \tag{92,24}$$

Diese Ausdrücke gehen bei festem r_0 und für $r \to \infty$ gegen Null. Deshalb haben wir einzeln

$$\varphi_1 \to 0; \quad \varphi_2 \to 0 \quad (\text{für } r \to \infty), \tag{92,25}$$

und für die Erfüllung der Bedingung (92,18) genügt es, daß die Gleichung

$$\varphi \to 0 \quad (\text{für } r \to \infty) \tag{92,26}$$

erfüllt ist, oder

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial (r\psi)}{\partial t} \right\} = 0. \tag{92,27}$$

Diese Gleichung muß, ebenso wie (92,18), für solche Werte von r und t erfüllt sein, für die die Größe $t_0 = t + \frac{R}{c}$ beim Grenzübergang $r \to \infty$ fest bleibt. Wir führen nun die Größe $t_0' = t + \frac{r}{c}$ ein. Wir haben $|t_0 - t_0'| \leqslant \frac{r_0}{c}$, und da r_0 auch fixiert ist, so gehören beide Größen t_0 und t_0' zu festen Intervallen, wenn eine von ihnen zu einem solchen Intervall gehört. Folglich ist Gleichung (92,18) erfüllt, sobald die Bedingung (92,27) erfüllt ist [49]. Letztere ist aber die Ausstrahlungsbedingung (c) in der Form (92,07).

Wir haben gezeigt, daß die Funktion ψ im Punkt $\mathfrak{r}_0$ verschwindet. Und da dieser Punkt beliebig gewählt werden kann, ist damit bewiesen, daß die Funktion ψ überall verschwindet. Somit ist der oben formulierte Eindeutigkeitssatz bewiesen.

Wir betrachten diejenige Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho, \tag{92,28}$$

welche durch die bekannte Formel für das retardierte Potential

$$\psi(\mathfrak{r}_0, t_0) = \int \frac{[\varrho]\, dV}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0|} \tag{92,29}$$

ausgedrückt wird mit

$$[\varrho] = \varrho(\mathfrak{r}, t); \quad t = t_0 - \frac{1}{c} |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0|. \tag{92,30}$$

Die Integration in (92,29) erfolgt über die Koordinaten (x, y, z) und wird über das gesamte Gebiet erstreckt, in dem die „Dichte“ ϱ von Null verschieden ist (das von den Massen erfüllte Gebiet). Liegt dieses Gebiet ganz im Inneren der Kugel $r \leqslant a$ und genügt die Zeit t_0 der Ungleichung $ct_0 > r + a$, so braucht man zur Berechnung des Integrals (92,29) die Größe ϱ nur für positive Werte des Arguments t zu kennen. Für große Abstände von den Massen hat die Funktion ψ (die außerhalb der Massen der homogenen Wellengleichung genügt) die asymptotische Gestalt

$$\psi(\mathfrak{r}, t) = \frac{1}{r} \mu\left(t - \frac{r}{c}, \mathfrak{n}\right), \tag{92,31}$$

wobei $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor in Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ ist. Die Funktion μ läßt sich folgendermaßen durch ϱ ausdrücken:

$$\mu\left(t - \frac{r}{c}, \mathfrak{n}\right) = \int \varrho\left(\mathfrak{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{r}')}{c}\right) dV'. \tag{92,32}$$

Die hier aufgestellten Formeln zeigen, daß das retardierte Potential den oben formulierten Bedingungen (a), (b) und (c) genügt. Auf Grund des eben bewiesenen Satzes ist es die einzige Lösung der inhomogenen Wellengleichung (92,28), die diese Bedingungen erfüllt. Dieser Satz gibt also eine mathematische Begründung für die Verwendung des retardierten Potentials, das gewöhnlich auf Grund physikalischer Überlegungen eingeführt wird.

Wir haben den hier formulierten Eindeutigkeitssatz für die Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten bewiesen. Es ist jedoch zu erwarten, daß er auch für Gleichungen mit variablen Koeffizienten $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ gültig bleibt, die das im § 87 beschriebene asymptotische Verhalten zeigen. Der Beweis für den allgemeinen Fall bereitet beträchtliche Schwierigkeiten und ist ein bisher ungelöstes mathematisches Problem. Viel leichter ist der Satz in dem Fall zu beweisen, in dem man sich auf die „stationäre" Näherung für die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ beschränken und die Wellengleichung in der Form

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = 0 \tag{92,33}$$

schreiben kann, wo $\Delta\psi$ der euklidische LAPLACE-Operator ist, und der „Brechungsindex" n den Wert

$$n = 1 + \frac{2U}{c^2} \tag{92,34}$$

hat. Dabei ist U das NEWTONsche Potential, das man bei dem vorliegenden Problem als zeitunabhängig ansehen kann. Den Beweis kann man entweder auf die Formel von SOBOLEW[1]) gründen, die eine Verallgemeinerung der KIRCHHOFFschen Formel auf Gleichungen der Form (92,33) darstellt, oder aber auf eine Entwicklung der Funktion ψ nach der Variablen t in ein FOURIER-Integral und die Anwendung der bekannten SOMMERFELDschen Ausstrahlungsbedingung, die in diesem Fall eine Folge unserer Bedingung (92,27) ist.

Zum Schluß erwähnen wir noch, daß sich die Problemstellung dieses Paragraphen von der üblichen (dem CAUCHYschen Problem) dadurch unterscheidet, daß wir die Anfangsbedingungen nicht explizite einführen, sondern im Gegenteil solche Lösungen der Wellengleichungen untersuchen, die in dem betrachteten

[1]) Die Formel von SOBOLEW unterscheidet sich von der KIRCHHOFFschen Formel (92,09) im wesentlichen dadurch, daß sie außer dem Oberflächenintegral auch noch ein Volumenintegral enthält. Argumentiert man analog zu dem oben Dargelegten, so kann man annehmen, daß das Integral über die unendlich weit entfernte Oberfläche auf Grund der Bedingungen für ψ verschwindet. Dies liefert für ψ nicht unmittelbar die Gleichung $\psi = 0$, sondern eine homogene Integralgleichung, die aber nur eine verschwindende Lösung besitzt. In der Ausstrahlungsbedingung (c) ist dabei die Größe $t_0' = t + r/c$ durch $t_0^* = t + r^*/c$ zu ersetzen, wo r^* den Wert (87,12) hat.

Raumgebiet und in dem uns interessierenden Zeitintervall von den Anfangsbedingungen unabhängig sind. Diese Fragestellung wird durch die Art des vorliegenden physikalischen Problems diktiert. Die Eindeutigkeit der Lösung und ihre Unabhängigkeit von den Anfangsbedingungen werden durch eine Beschränkung des Raum-Zeit-Gebietes erreicht: Die anfängliche Störung, die in diesem Gebiet etwa vorhanden war, ist schon längst abgeklungen, und neue Störungen können infolge der Ausstrahlungsbedingung nicht von außen eintreffen, sondern nur (im Fall einer inhomogenen Gleichung) innerhalb des Gebietes erzeugt werden, wobei sie dann nicht mehr durch die Anfangsbedingungen, sondern durch die „Dichte“ ϱ bestimmt werden.

§ 93 Zur Eindeutigkeit des harmonischen Koordinatensystems

Zur Lösung der EINSTEINschen Gleichungen für ein isoliertes System von Massen haben wir harmonische Koordinaten benutzt, wobei sich die Lösung völlig eindeutig ergab. Eindeutige Ergebnisse erhielten wir sowohl für endliche und „mäßiggroße“ Abstände von den Massen, in denen der Wellen- (hyperbolische) Charakter der EINSTEINschen Gleichungen noch nicht wesentlich ist und sich durch die Einführung von Retardierungskorrekturen berücksichtigen ließ, als auch in der „Wellenzone“. Das legt die Vermutung nahe, daß die von uns benutzte Harmonizitätsbedingung in Verbindung mit der Forderung nach euklidischem Verhalten im Unendlichen und mit den Bedingungen, die die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichungen vom Typ der Wellengleichung gewährleisten, das Koordinatensystem bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig festlegt.

Wir wollen diese Frage ausführlicher untersuchen. Ist $\Box\,\psi$ der invariante D'ALEMBERT-Operator

$$\Box\,\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}\right), \tag{93,01}$$

so läßt sich die Harmonizitätsbedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{93,02}$$

in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \equiv \Box\, x_\nu = 0 \tag{93,03}$$

schreiben, so daß jede der Funktionen

$$\psi = x_0; \quad \psi = x_1; \quad \psi = x_2; \quad \psi = x_3 \tag{93,04}$$

eine Lösung der D'ALEMBERTschen Gleichung

$$\Box\,\psi = 0 \tag{93,05}$$

ist. Dieser Gleichung genügen offenbar auch eine Konstante und eine beliebige lineare Funktion der harmonischen Koordinaten.

Zunächst nehmen wir an, daß die Metrik der Raum-Zeit GALILEIsch ist. In den GALILEIschen Koordinaten

$$x_0 = ct; \quad x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z \tag{93,06}$$

lauten die Komponenten des Fundamentaltensors[1])

$$g^{\mu\nu} = e_\mu \delta_{\mu\nu} \tag{93,07}$$

und der D'ALEMBERT-Operator hat die Form

$$\Box\, \psi = e_\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu}. \tag{93,08}$$

Es ist offensichtlich, daß jede der GALILEIschen Koordinaten harmonisch ist.

Wir suchen nun die allgemeine Form der harmonischen Koordinaten. Die Transformationsformeln mögen lauten

$$x'_\alpha = f^\alpha (x_0, x_1, x_2, x_3). \tag{93,09}$$

Die neuen Koordinaten müssen (wie die alten) der D'ALEMBERT-Gleichung genügen, in großen Entfernungen GALILEIsch sein und zu Werten für $g^{\mu\nu}$ mit dem entsprechenden asymptotischen Verhalten führen. Unter Beachtung dieser Forderung können wir die Funktionen f^α folgendermaßen schreiben

$$f^\alpha = a_\alpha + e_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta + \eta^\alpha (x_0, x_1, x_2, x_3). \tag{93,10}$$

Dabei sind a_α und $a_{\alpha\beta}$ die Koeffizienten einer LORENTZ-Transformation, die den Beziehungen

$$e_\alpha a_{\mu\alpha} a_{\nu\alpha} = e_\mu \delta_{\mu\nu}; \quad e_\alpha a_{\alpha\mu} a_{\alpha\nu} = e_\mu \delta_{\mu\nu} \tag{93,11}$$

genügen. Da die Funktionen f^α die Gleichung

$$\Box\, f^\alpha = 0 \tag{93,12}$$

erfüllen sollen, die linearen Terme ihr aber schon einzeln genügen, muß gelten

$$\Box\, \eta^\alpha = 0. \tag{93,13}$$

Diese Gleichung muß im ganzen Raum und für alle t (d. h. für alle x_0) erfüllt sein. Da in der Gleichung (93,13) zweite Ableitungen auftreten, liegt es nahe zu fordern, daß die Funktionen η^α und ihre ersten Ableitungen im ganzen Raum und für alle t beschränkt sind. Diese Forderung läßt sich auch dadurch begründen, daß die ersten Ableitungen der neuen Koordinaten nach den alten in die Transformationsformel für alle Tensoren eingehen. Was die Bedingungen im Unendlichen anbelangt, so müssen dort die Funktionen η^α die Zusätze zur

[1]) Bei der Anwendung der Summationsregel auf zweimal auftretende Indizes werden die Indizes von e_μ ($e_0 = 1$; $e_1 = e_2 = e_3 = -1$) nicht mitgerechnet.

LORENTZ-Transformation darstellen, samt ihren ersten Ableitungen verschwinden, weil die neuen Koordinaten dort GALILEIsch sind. Außerdem müssen im Unendlichen die Forderungen erfüllt sein, die sich aus dem asymptotischen Verhalten der $g^{\mu\nu}$ ergeben. Wir untersuchen diese Forderungen näher. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die in Formel (93,10) auftretende LORENTZ-Transformation eine identische Transformation ist, so daß sich diese Formel in der Form

$$f^{\alpha} = x_{\alpha} + \eta^{\alpha}(x_0, x_1, x_2, x_3) \tag{93,14}$$

schreiben läßt. Berechnen wir nach der allgemeinen Formel

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x_{\nu}} \tag{93,15}$$

die Komponenten des Fundamentaltensors in den neuen Koordinaten, so erhalten wir

$$g'^{\alpha\beta} = e_{\alpha}\delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha}\frac{\partial \eta^{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + e_{\beta}\frac{\partial \eta^{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + e_{\mu}\frac{\partial \eta^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial \eta^{\beta}}{\partial x_{\mu}}. \tag{93,16}$$

Nach unserer Bedingung streben die Größen $\frac{\partial \eta^{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$ im Unendlichen gegen Null. Deshalb wird das asymptotische Verhalten von $g'^{\alpha\beta}$ durch Terme bestimmt, die in diesen Größen linear sind. Dieses asymptotische Verhalten muß aber so beschaffen sein, daß die Differenz zwischen der Größe $g^{\alpha\beta}$ und ihrem Grenzwert im Unendlichen eine auslaufende Welle darstellt. (Die entsprechenden Formeln haben wir in § 87 für $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ abgeleitet; aus diesen ergeben sich aber analoge Formeln auch für $g^{\alpha\beta}$.) Im Unendlichen gilt also

$$g^{\alpha\beta} - (g^{\alpha\beta})_{\infty} = \text{auslaufende Welle.} \tag{93,17}$$

Diese Forderung muß in jedem harmonischen Koordinatensystem erfüllt sein, so daß ihr auch die Größen $g'^{\alpha\beta}$ [Formel (93,16)] genügen müssen. Daraus folgt, daß im Unendlichen gelten muß

$$e_{\alpha}\frac{\partial \eta^{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + e_{\beta}\frac{\partial \eta^{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \text{auslaufende Welle.} \tag{93,18}$$

Setzen wir

$$\eta^{\alpha} = e_{\alpha}\eta_{\alpha} \tag{93,19}$$

und kürzen durch $e_{\alpha} e_{\beta}$, so können wir diese Bedingung folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial \eta_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \eta_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \text{auslaufende Welle.} \tag{93,20}$$

Wenn wir die Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_\beta}\right) = 2\,\frac{\partial^2 \eta_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad (93{,}21)$$

benutzen und von η_ν wieder zu η^ν übergehen, so können wir daraus folgern, daß

$$\frac{\partial^2 \eta^\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \text{auslaufende Welle} \quad (93{,}22)$$

sein muß. Hieraus kann man den Schluß ziehen, daß die Größe η^ν die Summe einer linearen Funktion und einer solchen Funktion ist, die im Unendlichen eine auslaufende Welle darstellt. Dieser Schluß gilt offensichtlich nicht nur für die in (93,14) vorkommenden Funktionen η^α, sondern auch für die Funktionen η^α, die in (93,10) auftreten. Da in (93,10) die lineare Funktion schon abgetrennt ist und nach unserer Bedingung im Unendlichen $\eta^\alpha \to 0$ gehen soll, so gelangen wir zu dem Ergebnis, daß auch die Funktion η^α selbst eine auslaufende Welle ist:

$$\eta^\alpha = \text{auslaufende Welle}. \quad (93{,}23)$$

Wir können nun die Bedingungen präzisieren, denen der Zusatz η^α zur linearen Funktion in der Formel (93,10) genügt. Dieser Zusatz erfüllt die Wellengleichung (93,13) und bleibt samt seinen ersten Ableitungen überall beschränkt. Im Unendlichen nehmen die Größe η^α und ihre ersten Ableitungen wie $1/r$ ab. Schließlich kann man wegen (93,23) annehmen, daß die Größe η^α im Unendlichen einer Ausstrahlungsbedingung der Form (92,27) genügt. Alle diese Bedingungen müssen für alle Werte von t erfüllt sein. Auf Grund des in § 92 bewiesenen Eindeutigkeitssatzes verschwindet die Größe η^α, die diesen Bedingungen genügt, identisch. Folglich reduziert sich die in (93,09) und (93,10) auftretende Funktion f^α auf eine lineare Funktion, und die allgemeinste Transformation von einem harmonischen Koordinatensystem auf ein anderes lautet

$$x'_\alpha = a_\alpha + e_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (93{,}24)$$

d. h., sie ist mit einer LORENTZ-Transformation gleichbedeutend.

Dieses Ergebnis haben wir für den Fall einer GALILEIschen Raum-Zeit mit der Metrik (93,07) bewiesen, da der in § 92 formulierte Eindeutigkeitssatz nur für diesen Fall bewiesen wurde. Zweifellos gilt aber dieser Satz auch im allgemeinen Fall der EINSTEINschen Raum-Zeit, deren Fundamentaltensor das in § 87 festgestellte asymptotische Verhalten aufweist. Setzen wir das einmal voraus, so kommen wir zu dem Schluß, daß auch im allgemeinen Fall das harmonische Koordinatensystem bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig festgelegt ist. Tatsächlich bleiben die Überlegungen dieses Paragraphen auch im allgemeinen Fall in Kraft. In einem harmonischen Koordinatensystem hat der D'ALEMBERT-Operator die Form

$$\Box\, \psi = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad (93{,}25)$$

enthält also keine ersten Ableitungen. Infolgedessen genügt jede lineare Funktion der Koordinaten dieser Wellengleichung. Schreibt man die Koordinatentransformation (93,09) wieder in der Form (93,10) und fordert, daß die neuen Koordinaten ebenfalls harmonisch sein sollen [Gleichung (93,12)], so erhält man auch im allgemeinen Fall für die Zusätze η^α die Wellengleichung (93,13), wobei der Operator $\Box$ nunmehr die Bedeutung (93,25) hat. Die Zusätze η^α und ihre ersten Ableitungen müssen offensichtlich im ganzen Raum beschränkt sein. Die übrigen η^α aufzuerlegenden Bedingungen beziehen sich auf unendlich weit entfernte Gebiete, in denen sich die Metrik nur wenig von der GALILEIschen unterscheidet. Diese Bedingungen kann man deshalb unverändert von dem vorher erörterten Fall übernehmen. Insbesondere stellt die linke Seite von (93,18) die Differenz zwischen den asymptotischen Ausdrücken für die $g^{\alpha\beta}$ in den ursprünglichen und den transformierten Koordinaten dar und muß deshalb einer auslaufenden Welle entsprechen. Daraus schließen wir genau wie oben auf die Gültigkeit der Beziehungen (93,22) und (93,23), und dann führt der Eindeutigkeitssatz zu dem Ergebnis, daß die Zusätze η^α verschwinden. Auch im allgemeinen Fall ist also das harmonische Koordinatensystem bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig festgelegt.

Es muß noch erwähnt werden, daß wir für die Funktionen f^α, die die Koordinatentransformation beschreiben, keinerlei Anfangsbedingungen in expliziter Form eingeführt haben. Das entspricht der Fragestellung bei der Bestimmung der Gravitationspotentiale $g^{\mu\nu}$. Dort ist es sinnvoll, Anfangsbedingungen nur für die Verteilung der schweren Massen, nicht aber für die Gravitationswellen und für die Gravitationspotentiale selbst einzuführen. Die Bestimmung der Gravitationspotentiale ist kein CAUCHYsches Problem (d.h. kein Anfangswertproblem), sondern es handelt sich dabei eher um die Auffindung eines gewissen quasi-stationären Zustandes, der sich ausbildet, wenn alle Gravitationswellen außer denen, die durch die Bewegungen der betrachteten Massen selbst erzeugt werden, bereits abgeklungen sind (vgl. dazu das Ende von § 92).

Unsere Überlegungen zeigen, daß sich die Bedingungen, die die Eindeutigkeit des Koordinatensystems gewährleisten, aus der physikalischen Problemstellung selbst ergeben. Da diese bei der Bestimmung der Gravitationspotentiale kein CAUCHYsches Problem ist, liegt auch bezüglich der Bestimmung des Koordinatensystems kein CAUCHYsches Problem vor. Bei der Frage nach den Gravitationspotentialen erreicht man dadurch Bestimmtheit, daß man mit Hilfe der Ausstrahlungsbedingung äußere „ephemere" Gravitationswellen ausschließt. Dadurch werden aber gerade die entsprechenden Wellenterme in den Transformationsformeln für die Koordinaten ausgeschlossen, wodurch seinerseits die Eindeutigkeit des Koordinatensystems erreicht wird.

Wir wollen unsere Schlußfolgerung nochmals formulieren: *Im Fall eines isolierten Systems von Massen existiert ein Koordinatensystem, das harmonische, das durch Zusatzbedingungen bis auf eine* LORENTZ-*Transformation eindeutig festgelegt ist.*

Man könnte nun fragen, ob es außer dem harmonischen noch andere Koordinatensysteme gibt, die diese Eigenschaft besitzen. Uns scheint dies unwahrscheinlich zu sein. Die harmonischen Koordinaten sind dadurch gekennzeichnet, daß jede von ihnen, sowie auch eine beliebige lineare Funktion dieser Koordinaten, einer linearen, allgemein-kovarianten Gleichung genügt. Es lassen sich wohl

kaum andere Koordinaten finden, die solche Eigenschaften haben; andere Koordinatenbedingungen, selbst wenn sie den Harmonizitätsbedingungen (93,02) sehr ähnlich sind, wie z. B. $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0$, führen nicht auf eine lineare Gleichung.

Daß das Problem nur dann zu einem bestimmten wird, wenn zu den 10 EINSTEINschen Gravitationsgleichungen noch 4 neue (damit verträgliche) Gleichungen hinzugefügt werden, ist offensichtlich. Die Frage bestand in der Wahl dieser Zusatzgleichungen und in der Formulierung der Grenzbedingungen.

Im Gegensatz zu unserer Problemstellung bleibt das Problem bei der Auffassung, die EINSTEIN vertritt, mathematisch unbestimmt, so daß von einer Eindeutigkeit der Lösung keine Rede sein kann. Nach EINSTEIN gibt es keine ausgezeichneten Koordinatensysteme, und das Koordinatensystem bleibt bis zum Schluß unbestimmt. Die Anhänger dieses Standpunktes betrachten diese Unbestimmtheit gerade als Vorzug und sehen in ihr sogar einen tiefen Sinn, nämlich den Ausdruck eines angeblich „allgemeinen Relativitätsprinzips"; auf Grund dieser Auffassung wird auch die ganze EINSTEINsche Theorie als „allgemeine Relativitätstheorie" bezeichnet.

Mit diesem Standpunkt können wir uns keineswegs einverstanden erklären. Die der EINSTEINschen Auffassung eigene Unbestimmtheit ist nicht prinzipieller Natur und kann keine besondere Bedeutung haben. Sie haftet jeder Theorie an, die eine allgemein-kovariante Formulierung zuläßt. Auch die sogenannte „spezielle" Relativitätstheorie ist in allgemein-kovarianter Weise formuliert worden (Kapitel IV dieses Buches) und besitzt also, in dieser Formulierung, die Unbestimmtheitseigenschaft genau in demselben Maße wie die sogenannte „allgemeine" Relativitätstheorie. Worauf es wirklich ankommt, ist nicht die Möglichkeit einer unbestimmten Formulierung (die immer vorhanden und trivial ist), sondern gerade das Gegenteil, nämlich eine Formulierung, die so bestimmt und eindeutig ist, wie es nur das Wesen der Sache erlaubt. Stellt man sich auf diesen natürlichen Standpunkt, so erscheint die Existenz eines bevorzugten, bis auf eine LORENTZ-Transformation bestimmten, Koordinatensystems durchaus nicht als eine Trivialität oder eine bloße mathematische Vereinfachung, sondern als ein Charakteristikum der Raum-Zeit, denn sie spiegelt deren innewohnende Eigenschaften wider. Besonders einleuchtend wird das im Fall der „speziellen" Relativitätstheorie, wo die Existenz GALILEIscher Koordinaten die Homogenität und Isotropie der Raum-Zeit widerspiegelt.

Wenn man das einsieht, so kann die offensichtliche Notwendigkeit, Zusatzgleichungen einzuführen, um bevorzugte Koordinatensysteme definieren zu können (und somit eine eindeutige Formulierung des Problems zu erzielen), zu keinen wirklichen Einwänden Anlaß geben. Diese Notwendigkeit besteht in der Theorie der EINSTEINschen ebenso wie in der Theorie der GALILEIschen Raum-Zeit. Der Umstand, daß es im letzteren Fall nicht üblich ist, derartige Zusatzgleichungen explizite hinzuschreiben, ändert an der Sache gar nichts: Die das Koordinatensystem definierenden Gleichungen können entweder tatsächlich hingeschrieben werden, oder aber sie können durch die explizite Forderung ersetzt werden, daß gerade GALILEIsche Koordinaten benutzt werden sollen (letztere Forderung wird gewöhnlich nur implizite vorausgesetzt).

Die erwähnten Zusätzgleichungen sind offenbar nicht allgemein-kovariant (anderenfalls würden sie zu keinerlei Beschränkungen für das Koordinaten-

system führen). Deshalb könnte man den Einwand machen, daß dadurch die Schönheit der Theorie zerstört wird, die man gewöhnlich gerade in deren allgemeinen Kovarianz erblickt.[1]) Diese Überlegung bildet aber keinen richtigen Einwand, denn die genannten Gleichungen müssen jedenfalls mit den allgemeinkovarianten EINSTEINschen Gleichungen verträglich sein, deren einfache Form die wirkliche Schönheit der Theorie darstellt. (Diese Einfachheit und Schönheit hat übrigens die EINSTEINsche Theorie weniger der allgemeinen Kovarianz als dem Umstand zu verdanken, daß zur Beschreibung der Gravitation außer den rein geometrischen keine weiteren Größen eingeführt werden.)

Die mit Hilfe eines wohldefinierten „bevorzugten" Koordinatensystems erzielte Eindeutigkeit der Lösung erscheint uns jedenfalls als ein Vorteil und keineswegs als ein Nachteil. Durch die Eindeutigkeit kommt auch die physikalische Bedeutung des bevorzugten Koordinatensystems zum Ausdruck, während der Sinn anderer Koordinatensysteme nur aus deren Zusammenhang mit dem bevorzugten System erschlossen werden kann.

Was das „allgemeine Relativitätsprinzip" angeht, so existiert ein derartiges Prinzip in Wirklichkeit gar nicht. Das Relativitätsprinzip, das sich auf eine geradlinige und gleichförmige Bewegung bezieht und eine Verallgemeinerung des GALILEIschen Relativitätsprinzips darstellt, drückt die Homogenität und Isotropie der GALILEIschen Metrik aus. Diese Isotropie fehlt jedoch, wenn eine Schwerkraft vorhanden ist. Rein logisch betrachtet kann der auf die Eigenschaften der Raum-Zeit angewandte Begriff „Relativität" überhaupt nicht von den Begriffen „Homogenität" und „Isotropie" losgelöst werden.[2]) Deshalb enthält die Bezeichnung „allgemeines Relativitätsprinzip", strenggenommen, einen inneren logischen Widerspruch. In der sogenannten „allgemeinen Relativitätstheorie" ist in Wirklichkeit weniger Relativität vorhanden, als in der „speziellen", keinesfalls aber mehr.

Wir haben mehrfach die prinzipielle Bedeutung der Existenz eines ausgezeichneten Koordinatensystems betont, das bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig festgelegt ist. Sie äußert sich unter anderem auch in folgendem: Nur wenn man anerkennt, daß die Existenz dieses Koordinatensystems gewisse innere Eigenschaften der Raum-Zeit widerspiegelt, kann man von der Richtigkeit des heliozentrischen Systems von KOPERNIKUS in demselben Sinne sprechen, wie das in der NEWTONschen Mechanik möglich war. Erkennt man das jedoch nicht an, oder vertritt man die Meinung, daß überhaupt kein ausgezeichnetes Koordinatensystem existiert, so kommt man zu dem kaum annehmbaren Standpunkt, von welchem aus das heliozentrische System des KOPERNIKUS und das geozentrische System des PTOLOMÄUS gleichberechtigt sind.

Was wir soeben über den bevorzugten Charakter des harmonischen Koordinatensystems gesagt haben, darf keinesfalls in dem Sinne verstanden werden, daß wir vorschlügen, andere Koordinatensysteme zu verbieten. Eine derartige Mißdeutung unseres Standpunktes lehnen wir ganz ausdrücklich ab. In Wirklichkeit wollten wir nur in der viel diskutierten und unnötig verwickelten Koordinatenfrage Klarheit schaffen, und zwar geben wir die Lösung dieser Frage

---

[1]) Vgl. die Diskussion auf der Berner Konferenz 1955 (Helv. Phys. Acta, Suppl. IV, S. 239, 1956).

[2]) Vgl. hierzu unsere Kopenhagener Vorlesungen (1957) [48].

nur für jene begrenzte Problemstellung, die wir immer bisher betrachtet haben und die einer inselartigen Verteilung der Massen entspricht. Wir wollten zeigen, daß die Lösung dieser Frage im Prinzip ebenso lautet wie im Fall des GALILEIschen Raumes der „speziellen" Relativitätstheorie. Keiner würde behaupten, daß dort die Existenz der GALILEIschen Koordinaten ein Verbot anderer Koordinaten mit sich führt. Ähnlich steht es in der Gravitationstheorie: Die Existenz des bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig definierten harmonischen Koordinatensystems ist zwar eine Tatsache von hervorragender prinzipieller und praktischer Bedeutung; diese Tatsache verhindert aber keineswegs die Anwendung anderer, nicht-harmonischer Koordinatensysteme.

§ 94 Der FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raum

Das Problem der Lösung der Gravitationsgleichungen für ein Massensystem haben wir oben in der Weise gestellt, daß dieses System als isoliert und in den unendlichen euklidischen Raum oder die GALILEIsche Raum-Zeit eingebettet angesehen wurde. Diese Auffassung ist zweifelsohne bei der Behandlung von Objekten der Abmessungen des Sonnensystems zulässig. Diese Abmessungen lassen sich durch die Bahnradien des schwersten Planeten (Jupiter mit $778 \cdot 10^6$ km) und des fernsten Planeten (Pluto mit $5900 \cdot 10^6$ km) kennzeichnen. Das Licht braucht von der Sonne bis zum Pluto etwa 5,5 Std. Der nächste Fixstern jedoch (α-Centauri) ist von der Sonne 4,3 Lichtjahre entfernt, d. h. ungefähr 7000mal so weit wie Pluto.

Möglicherweise ist diese Problemstellung auch bei der Behandlung einzelner Sternhaufen oder sogar der ganzen Galaxis zulässig. Die Abmessungen der Galaxien[1]) sind immer noch etwa zehnmal so groß wie ihre gegenseitigen Abstände. Wenn wir aber Raumgebiete betrachten, die so groß sind, daß sich darin viele Galaxien befinden (und solche Gebiete kann man mit den modernen, großen Teleskopen überblicken), so wird der Begriff des isolierten, in einen euklidischen Raum eingebetteten Systems sicherlich unbrauchbar.

Es taucht nun die Frage auf, wodurch jener euklidische Untergrund, den wir bisher betrachtet haben, zu ersetzen ist. Welche Raum-Zeit soll man als Untergrund verwenden, aus dem die einzelnen Massensysteme herausragen?

Schon deshalb muß der euklidische Untergrund durch einen anderen ersetzt werden, weil bei der Behandlung von Massen, die in einem euklidischen Raum mit im Mittel gleichmäßiger Dichte verteilt sind, das bekannte SEELIGERsche Paradoxon auftritt. Dieses besteht darin, daß das NEWTONsche Potential einer gleichmäßigen Massenverteilung nicht existiert. Die astronomischen Beobachtungen zeigen nun, daß die Verteilung der Galaxien in dem der Beobachtung zugänglichen Teil des Universums, d. h. bis zu Entfernungen von einigen Milliarden Lichtjahren, im Mittel gleichmäßig ist. Andererseits ist es klar, daß bei einem Problem, bei dem das NEWTONsche Potential nicht existiert, die Form der Lösungen der EINSTEINschen Gleichungen wesentlich von der ab-

[1]) Unter der Galaxis im engeren Sinn versteht man gewöhnlich das Sternsystem, zu dem die Sonne gehört (Milchstraßensystem). Die anderen, entsprechend gebauten Sternsysteme bezeichnet man aber ebenfalls als Galaxien.

weichen muß, die einem isolierten Massensystem entspricht und eine Annäherung der Gravitationspotentiale $g^{\mu\nu}$ durch das NEWTONsche Potential erlaubt. Infolge des veränderten Charakters des Problems muß man auch die Koordinaten aufs neue wählen.

Eine Lösung der EINSTEINschen Gleichungen, die einem isotropen Raum mit gleichmäßiger Massendichte entspricht und die bei der Betrachtung sehr großer Gebiete, die viele Galaxien enthalten, als Untergrund verwendet werden kann, fand der russische Mathematiker FRIEDMANN [26] im Jahre 1922. Wie wir sehen werden, kann man in dieser Lösung Koordinaten einführen, in denen der Raum eine LOBATSCHEWSKYsche Geometrie besitzt. Wir werden deshalb das entsprechende Raum-Zeit-Kontinuum als FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raum bezeichnen.

Die Theorie des FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raumes läßt sich aufbauen, indem man von der Annahme ausgeht, daß der Ausdruck für ds^2 gegen die *Gruppe der homogenen* LORENTZ-*Transformationen* invariant ist. Ein solches ds^2 kann immer auf die Form

$$ds^2 = H^2(S)\,(dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2) \tag{94,01}$$

gebracht werden mit

$$S = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \tag{94,02}$$

Die Raum-Zeit ist zwar nicht selbst GALILEIsch, läßt sich aber nach (94,01) konform auf eine GALILEIsche Raum-Zeit abbilden. Die Invarianz gegen die Gruppe der homogenen LORENTZ-Transformationen gewährleistet die *Isotropie des Raumes*. Insbesondere ist der Koordinatenursprung[1]) durch nichts vor den anderen Raumpunkten ausgezeichnet; mit Hilfe einer homogenen LORENTZ-Transformation kann man jeden festen Punkt in den Koordinatenursprung überführen. Die homogenen LORENTZ-Transformationen spielen hier also eine Doppelrolle: Sie ermöglichen sowohl eine Verschiebung des Ursprungs als auch den Übergang zu einem bewegten Bezugssystem.

Wir schreiben ds^2 in der Form

$$ds^2 = H^2\,(e_\mu\, dx_\mu^2). \tag{94,03}$$

Danach gilt

$$g_{\mu\nu} = H^2 e_\mu \delta_{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{H^2}\, e_\mu \delta_{\mu\nu}. \tag{94,04}$$

Für die CHRISTOFFEL-Symbole erhalten wir die Ausdrücke

$$\Gamma^\varrho_{\alpha\beta} = \frac{H'(S)}{SH}\,(e_\alpha \delta_{\varrho\beta} x_\alpha + e_\beta \delta_{\varrho\alpha} x_\beta - e_\alpha \delta_{\alpha\beta} x_\varrho). \tag{94,05}$$

Bilden wir nach der Formel

$$R^\varrho_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\varrho_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\varrho_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta}\Gamma^\varrho_{\sigma\alpha} \tag{94,06}$$

---

[1]) D. h. der Ursprung der *räumlichen* Koordinaten.

[vgl. (44,01)] den gemischten Krümmungstensor vierter Stufe, so erhalten wir

$$R^{\varrho}_{\mu,\,\alpha\beta} = \left[\frac{d^2 \lg H}{dS^2} - \frac{1}{S}\frac{d \lg H}{dS} - \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] \times$$
$$\times \frac{e_\mu}{S^2}\left(e_\alpha \delta_{\mu\beta} x_\alpha x_\varrho - e_\beta \delta_{\mu\alpha} x_\beta x_\varrho + e_\beta \delta_{\varrho\alpha} x_\beta x_\mu - e_\alpha \delta_{\varrho\beta} x_\alpha x_\mu\right) +$$
$$+ \left[\frac{2}{S}\frac{d \lg H}{dS} + \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] e_\mu \left(\delta_{\alpha\varrho}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\beta\varrho}\delta_{\alpha\mu}\right). \tag{94,07}$$

Setzen wir darin $\alpha = \varrho$, $\beta = \nu$ und summieren über ϱ, so ergibt sich

$$R_{\mu\nu} = \left[\frac{d^2 \lg H}{dS^2} + \frac{5}{S}\frac{d \lg H}{dS} + 2\left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] e_\mu \delta_{\mu\nu} +$$
$$+ 2\left[\frac{d^2 \lg H}{dS^2} - \frac{1}{S}\frac{d \lg H}{dS} - \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] e_\mu e_\nu \frac{x_\mu x_\nu}{S^2}. \tag{94,08}$$

Die Invariante R berechnet sich zu

$$R = \frac{6}{H^2}\left[\frac{d^2 \lg H}{dS^2} + \frac{3}{S}\frac{d \lg H}{dS} + \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] \tag{94,09}$$

oder

$$R = \frac{6}{H^3}\left(\frac{d^2 H}{dS^2} + \frac{3}{S}\frac{dH}{dS}\right). \tag{94,10}$$

Nun können wir den konservativen Tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{94,11}$$

bilden. Aus den Formeln (94,08), (94,09) und (94,04) erhalten wir

$$G_{\mu\nu} = -\left[2\frac{d^2 \lg H}{dS^2} + \frac{4}{S}\frac{d \lg H}{dS} + \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] e_\mu \delta_{\mu\nu} +$$
$$+ 2\left[\frac{d^2 \lg H}{dS^2} - \frac{1}{S}\frac{d \lg H}{dS} - \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2\right] e_\mu e_\nu \frac{x_\mu x_\nu}{S^2}. \tag{94,12}$$

Nach den EINSTEINschen Gleichungen gilt

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T_{\mu\nu}. \tag{94,13}$$

Als Massentensor $T_{\mu\nu}$ müssen wir einen Ausdruck verwenden, der „inkohärenter“ Materie entspricht; dieser Ausdruck lautet

$$T_{\mu\nu} = \varrho^* u_\mu u_\nu, \tag{94,14}$$

wo ϱ^* die invariante Dichte und u_ν die kovarianten Komponenten der Vierergeschwindigkeit bezeichnet, die nach der Formel

$$u_\nu u^\nu = 1 \tag{94,15}$$

normiert ist. Damit die Ausdrücke (94,12) und (94,14) den EINSTEINschen Gleichungen (94,13) genügen, muß man zunächst den ersten Term in dem Ausdruck für $G_{\mu\nu}$ gleich Null setzen. Das ergibt

$$2\frac{d^2 \lg H}{dS^2} + \frac{4}{S}\frac{d \lg H}{dS} + \left(\frac{d \lg H}{dS}\right)^2 = 0. \tag{94,16}$$

Setzen wir hier

$$H = K^2; \quad \lg H = 2 \lg K, \tag{94,17}$$

so geht die Gleichung (94,16) in eine lineare über

$$\frac{d^2 K}{dS^2} + \frac{2}{S}\frac{dK}{dS} = 0, \tag{94,18}$$

die sich leicht integrieren läßt. Nimmt man an, daß K für $S = \infty$ den Wert $K = 1$ hat (die Raum-Zeit ist GALILEIsch mit dem üblichen Maßstab), so wird

$$K = 1 - \frac{A}{S} \tag{94,19}$$

und folglich

$$H = 1 - \frac{2A}{S} + \frac{A^2}{S^2}. \tag{94,20}$$

Mit diesem Wert für H ergibt sich

$$G_{\mu\nu} = -\frac{12A}{S^5\left(1 - \frac{A}{S}\right)^2} e_\mu e_\nu x_\mu x_\nu, \tag{94,21}$$

und die EINSTEINschen Gleichungen lauten

$$\frac{12A}{S^5 H} e_\mu e_\nu x_\mu x_\nu = \frac{8\pi\gamma}{c^2} \varrho^* u_\mu u_\nu. \tag{94,22}$$

Bilden wir die Invarianten beider Seiten der Tensorgleichung (94,22), so erhalten wir

$$\frac{8\pi\gamma}{c^2} \varrho^* = \frac{12A}{S^3 H^3}. \tag{94,23}$$

Diese Invarianten sind gleich R; deshalb könnten wir für die Berechnung der rechten Seite von (94,23) unmittelbar die Formel (94,10) verwenden, indem

wir darin den Wert (94,20) für H einsetzten. Da die Dichte ϱ^* positiv ist, muß auch die Konstante A positiv sein.

Mit der Beziehung (94,23) liefern die Gleichungen (94,22)

$$u_\mu = H \frac{e_\mu x_\mu}{S}\,; \tag{94,24}$$

daraus ergibt sich für kontravariante Komponenten

$$u^\mu = \frac{x_\mu}{HS}\,. \tag{94,25}$$

Wir haben eine Lösung der EINSTEINschen Gleichungen erhalten, die einer von Null verschiedenen Massendichte ϱ^* entspricht, wobei diese Massen gleichförmig über den ganzen Raum verteilt sind. (In der NEWTONschen Theorie existiert keine derartige Lösung.) Dieses Ergebnis wurde zuerst von FRIEDMANN in seiner oben erwähnten Arbeit aus dem Jahre 1922 [26] gefunden.

Wir wollen die gewonnene Lösung in expliziter Form hinschreiben. Wir haben

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{S}\right)^4 (d\,x_0^2 - d\,x_1^2 - d\,x_2^2 - d\,x_3^2) \tag{94,26}$$

mit

$$S = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\,. \tag{94,02}$$

Interessant ist die Feststellung, daß dieser Ausdruck nicht nur gegenüber der Gruppe der homogenen LORENTZ-Transformationen, sondern auch gegen die Inversion

$$x'_\mu = \frac{A^2}{S^2}\,x_\mu \tag{94,27}$$

invariant ist. Die letztere hat im übrigen keine unmittelbare physikalische Bedeutung, da sie lediglich das Gebiet $S > A$ in das Gebiet $S' < A$ überführt und eine physikalische Bedeutung nur der Fall $S > A$ besitzt. Man kann auch leicht die Formeln angeben, die die Koordinaten x_μ mit den harmonischen Koordinaten x_μ^* verknüpfen, und zwar gilt

$$x_\mu^* = \left(1 + \frac{4}{3}\,\frac{A}{S} + \frac{A^2}{S^2}\right) x_\mu\,. \tag{94,28}$$

Die harmonischen Koordinaten x_μ^* ändern sich bei der Inversion (94,27) nicht. Die ausgezeichnete Stellung der harmonischen Koordinaten bei dem Problem eines isolierten Massensystems beruhte auf den in § 93 betrachteten Grenzbedingungen, u. a. auf der Bedingung der Euklidizität im Unendlichen. Im FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raum herrschen jedoch ganz andere Verhältnisse, so daß hier nicht die harmonischen, sondern die „konform-GALILEIschen" Koordinaten, in denen ds^2 die Form (94,26) hat, dem Charakter des Problems besser angepaßt sind.

Wir betrachten nun die der gewonnenen Lösung entsprechende Bewegung des Mediums. In der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\varrho^*\,u^\mu\right)}{\partial x_\mu}=0 \tag{94,29}$$

müssen wir setzen

$$\sqrt{-g}\,\varrho^*\,u^\mu=\frac{3\,A\,c^2}{2\pi\gamma}\,\frac{x_\mu}{S^4}. \tag{94,30}$$

Daraus ersieht man, daß sie infolge der Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{x_\mu}{S^4}\right)=0 \tag{94,31}$$

erfüllt ist. Das Geschwindigkeitsfeld wird durch die Größen (94,25) gekennzeichnet. Wir haben

$$\frac{d\,x_\mu}{d\,x_0}=\frac{u^\mu}{u^0}=\frac{x_\mu}{x_0}. \tag{94,32}$$

Setzen wir der Anschaulichkeit halber $x_0=ct$, so können wir schreiben

$$\frac{d\,x_i}{dt}=\frac{x_i}{t}; \tag{94,33}$$

daraus ergibt sich für jede Masse

$$x_i=v_i\,t, \tag{94,34}$$

wobei v_i eine Konstante ist. Da $S^2>0$ ist, muß gelten

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2<c^2. \tag{94,35}$$

In dem GALILEIschen Hilfsraum bewegt sich also jede Masse mit konstanter Geschwindigkeit, die zu ihrer Koordinate proportional ist; folglich vergrößern sich dort alle Abstände proportional zur Zeit. Das gilt eigentlich nur für den GALILEIschen Hilfsraum, aber qualitativ bleibt die Schlußfolgerung, daß die gegenseitigen Abstände mit der Zeit anwachsen, auch für den physikalischen Raum in Kraft. Ein solcher expandierender Raum bildet also den Untergrund, der jetzt an die Stelle des euklidischen Untergrundes tritt. Die beobachtbaren physikalischen Folgerungen aus diesem Ergebnis, das auf den ersten Blick paradox anmutet, werden wir im nächsten Paragraphen untersuchen.

Die durch die Formel (94,34) eingeführten Größen v_i kann man als Koordinaten der betrachteten Masse auffassen, und zwar in einem Maßstab, der proportional zur „Zeit" t wächst. In diesem Maßstab sind die Koordinaten jeder Masse konstant. Deshalb sind die Größen v_i vom Standpunkt der Bewegungsgleichungen eines Kontinuums LAGRANGEsche Koordinaten (zum Unterschied von den EULERschen Koordinaten x_i). Wir führen in dem Ausdruck für ds^2 als

räumliche Variable die drei Größen v_i ein und als zeitliche Variable die Größe τ, die proportional zu S ist und den Wert

$$\tau = \sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \tag{94,36}$$

hat. Unsere Substitution hat die Form

$$x_i = \frac{v_i \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{94,37}$$

Offensichtlich wird damit die Beziehung (94,36) identisch erfüllt. Wir haben

$$dx_i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} d\tau + \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\delta_{ik} + \frac{v_i v_k}{c^2 - v^2}\right) dv_k, \tag{94,38}$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} d\tau + \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v_i dv_i}{c^2 - v^2}. \tag{94,39}$$

Daraus folgt

$$c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = c^2 d\tau^2 - \tau^2 d\sigma^2, \tag{94,40}$$

wo

$$d\sigma^2 = \frac{(d\mathfrak{v})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v} \times d\mathfrak{v}]^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \tag{94,41}$$

das uns schon aus § 17 bekannte Quadrat des Bogenelementes im LOBATSCHEWSKY-EINSTEINschen Geschwindigkeitsraum ist. Statt (94,41) können wir auch schreiben

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\delta_{ik} + \frac{v_i v_k}{c^2 - v^2}\right) dv_i dv_k. \tag{94,42}$$

Führen wir anstelle von A eine Konstante α derart ein, daß gilt

$$S = c\tau; \quad A = c\alpha, \tag{94,43}$$

so erhalten wir für ds^2 den Ausdruck

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 (c^2 d\tau^2 - \tau^2 d\sigma^2). \tag{94,44}$$

Die Größe τ kann man als die Eigenzeit im GALILEIschen Hilfsraum bezeichnen. Die physikalische Eigenzeit dagegen ist die Größe T, die durch die Gleichung

$$T = \int_{\alpha}^{\tau} \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2 d\tau = \tau - \frac{\alpha^2}{\tau} - 2\alpha \lg \frac{\tau}{\alpha} \tag{94,45}$$

definiert wird. Die Zeit wird dabei von der sehr fernen Epoche (die einige Milliarden Jahre zurückliegt) an gerechnet, in welcher die jetzt beobachtbaren Galaxien einander bedeutend näher als heute waren. Die hier aufgestellten Gleichungen auf einen noch früheren Zeitraum anzuwenden, hat keinen Sinn, da in ihnen die unmittelbare Gravitationswechselwirkung der Galaxien vernachlässigt wird, die damals vielleicht beträchtlich war.

Der räumliche Anteil von ds^2, der einem festgehaltenen Wert der Weltzeit T (und damit auch einem festen τ) entspricht, beträgt

$$dl^2 = \tau^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 d\sigma^2. \tag{94,46}$$

Das ist ein LOBATSCHEWSKY-Raum mit konstanter negativer Krümmung. Sein Volumen ist unendlich.

Wir betrachten die Masse der Galaxien, deren Geschwindigkeiten in dem GALILEIschen Hilfsraum zwischen gewissen Grenzen liegen. Ist ϱ^* die invariante Dichte, so hat diese Masse den Wert

$$dM = \varrho^* \, dV, \tag{94,47}$$

wobei dV das Volumenelement in dem LOBATSCHEWSKY-Raum mit der Maßbestimmung (94,46) ist. Wie man aus (94,42) leicht berechnet, lautet das Volumenelement im Geschwindigkeitsraum

$$dV_\sigma = \frac{dv_1 \, dv_2 \, dv_3}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}. \tag{94,48}$$

Folglich hat das Volumenelement im LOBATSCHEWSKY-Raum den Wert

$$dV = \tau^3 \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^6 dV_\sigma, \tag{94,49}$$

und die Masse dM beträgt

$$dM = \varrho^* \tau^3 \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^6 dV_\sigma. \tag{94,50}$$

Die Formel (94,23) für die invariante Dichte läßt sich in der Form

$$\varrho^* = \frac{3c^2}{2\pi\gamma} \frac{A}{S^3 \left(1 - \frac{A}{S}\right)^6} \tag{94,51}$$

schreiben. Unter Berücksichtigung von (94,43) erhalten wir daraus

$$\varrho^* \tau^3 \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^6 = \frac{3\,\alpha}{2\pi\gamma}\,. \tag{94,52}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (94,50) ein, so ergibt sich

$$dM = \frac{3\alpha}{2\pi\gamma}\, dV_\sigma, \tag{94,53}$$

was man auch in der Form

$$\gamma\, d\,M = \frac{3\,\alpha}{2\pi} \frac{d\,v_1\, d\,v_2\, d\,v_3}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \tag{94,54}$$

schreiben kann. Im Geschwindigkeitsraum ist also die Massenverteilung gleichmäßig.

Bei der Untersuchung der Rotverschiebung in den Spektren entfernter Galaxien kennzeichnet man diese Größe gewöhnlich durch diejenige Geschwindigkeit v^*, die man erhielte, wenn man die ganze Verschiebung einem DOPPLER-Effekt im gewöhnlichen GALILEIschen Raum zuschreiben würde. Aus der Theorie der Rotverschiebung, die im nächsten Paragraphen entwickelt wird, ergibt sich, daß diese Effektivgeschwindigkeit v^*, *sofern sie klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c ist*, mit der hier betrachteten Geschwindigkeit v gemäß der Beziehung

$$v^* = \frac{\tau + \alpha}{\tau - \alpha}\, v \tag{94,55}$$

zusammenhängt. Diese Beziehung läßt die vorstehenden Formeln anschaulicher werden. Setzt man

$$\alpha^* = \alpha \left(\frac{\tau - \alpha}{\tau + \alpha}\right)^3, \tag{94,56}$$

so kann man die Formel (94,54) angenähert in der Form

$$\gamma\, d\,M = \frac{3\,\alpha^*}{2\,\pi}\, d\,v_1^*\, d\,v_2^*\, d\,v_3^* \tag{94,57}$$

schreiben. Durch Integration über den Raumwinkel und den Absolutbetrag der Effektivgeschwindigkeit erhalten wir die Beziehung

$$\gamma (M - M_0) = 2\,\alpha^* \,(v^{*\,3} - v_0^{*\,3})\,. \tag{94,58}$$

Daraus ergibt sich ein Überschlagswert für die Größe α^*, wenn man die Masse $M - M_0$ der Galaxien abschätzt, deren DOPPLER-Effektivgeschwindigkeiten zwischen v_0^* und v^* liegen.

§ 95 Die Theorie der Rotverschiebung

Die Hypothese, daß die Struktur sehr großer Raumgebiete, die zahlreiche Galaxien enthalten, der Struktur des FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raumes ähnlich ist, fand ihre überraschende Bestätigung durch die Entdeckung der Rotverschiebung in den Spektren der Galaxien durch den Astronomen HUBBLE [27]. Es zeigte sich, daß alle Linien in den Spektren der Galaxien zum Roten hin verschoben sind, wobei diese Verschiebung um so größer ist, je weiter die Galaxis von uns entfernt ist. In diesem Paragraphen wollen wir die Theorie der Rotverschiebung auf der Grundlage der erwähnten Hypothese darlegen.

Wir schreiben den Ausdruck für ds^2 in der Form

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 (c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \tag{95,01}$$

Dabei ist α eine positive Konstante, und die Größe τ beträgt

$$\tau = \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{95,02}$$

Der Ausdruck (95,01) enthält in Wirklichkeit nicht eine, sondern zwei Konstanten, da der Zeitanfangspunkt oder, was dasselbe ist, der Wert der Größe τ für die betrachtete Epoche zunächst unbekannt bleibt. Die Theorie der Rotverschiebung gibt grundsätzlich die Möglichkeit, diese beiden Konstanten aus den Beobachtungen zu bestimmen. Dabei ist eine Prüfung der Theorie möglich, falls die mittlere Dichte ϱ^* der Materie im Raum bekannt ist.

Die Änderung der Frequenz des Lichtes, das von einem fernen Stern kommt, ist das Ergebnis von zwei Effekten: Dem EINSTEIN-Effekt (§ 51), der auftritt, wenn das Licht von einem Gebiet mit einem gewissen Wert des Gravitationspotentials g_{00} in ein Gebiet mit einem anderen Wert dieser Größe gelangt, und dem DOPPLER-Effekt (§ 13), der bei der Strahlung eines bewegten Systems stattfindet.

Der Umstand, daß der FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raum konform-GALILEIsch ist, erleichtert die Untersuchung des Gesetzes der Lichtausbreitung beträchtlich. In einem Raum mit dem Linienelement (95,01) hat nämlich das Gesetz für die Ausbreitung einer Wellenfront die Form

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \tag{95,03}$$

die genau mit dem Ausbreitungsgesetz einer Wellenfront in der GALILEIschen Raum-Zeit übereinstimmt. Die Charakteristiken sind deshalb dieselben wie im GALILEIschen Fall; speziell sind die Flächen

$$t - \frac{r}{c} = \text{const}; \quad t + \frac{r}{c} = \text{const} \tag{95,04}$$

Charakteristiken. Alle Überlegungen, die mit dem Ausbreitungsgesetz einer Wellenfront und der Form der Charakteristiken zusammenhängen, lassen sich ohne Änderung vom GALILEIschen Fall auf die konform-GALILEIsche Raum-

Zeit übertragen. Insbesondere bleibt die ganze Theorie des DOPPLER-Effektes unverändert.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen wollen wir nun die Formeln für die Frequenzänderung des Lichtes ableiten. Wir benutzen ein Koordinatensystem, dessen Ursprung auf der Sonne oder der Erde liegen soll (welchen von beiden wir wählen, ist unwesentlich, da der Relativabstand gegenüber der Entfernung zu den anderen Galaxien sehr klein ist). Für $t = t_0$ möge ein ferner Stern, der sich zu dieser Zeit im Abstand $r = r_0$ befinden soll, Licht aussenden. Der Wert τ_0, der der Zeit t_0 und dem Abstand r_0 entspricht, beträgt nach (95,02)

$$\tau_0 = \sqrt{t_0^2 - \frac{r_0^2}{c^2}}. \tag{95,05}$$

Wegen der Charakteristikengleichung

$$t_0 + \frac{r_0}{c} = t + \frac{r}{c} \tag{95,06}$$

trifft dieses Licht auf der Erde $(r = 0)$ im Zeitpunkt $t = t_0 + r_0/c$ ein; der entsprechende Wert von τ beträgt

$$\tau = t_0 + \frac{r_0}{c}. \tag{95,07}$$

Daraus ergibt sich mit (95,05)

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{\frac{t_0 - \frac{r_0}{c}}{t_0 + \frac{r_0}{c}}}. \tag{95,08}$$

Andererseits gilt nach (94,34), sofern sich der strahlende Stern mit einer Geschwindigkeit bewegt, die der mittleren Geschwindigkeit der Materie im FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raum entspricht,

$$\frac{r_0}{t_0} = v \qquad (v > 0), \tag{95,09}$$

wo v die konstante Geschwindigkeit des Sterns im GALILEIschen Hilfsraum ist. Aus (95,08) und (95,09) erhalten wir

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \tag{95,10}$$

Nun betrachten wir die Änderung der Frequenz. Es sei ω_0 die Eigenfrequenz des Strahlers, ω_0^* die Frequenz im GALILEIschen Hilfsraum im Bezugssystem des Strahlers. Diese beiden Größen hängen durch die Beziehung

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0^*}\left(1 - \frac{\alpha}{\tau_0}\right)^2 \tag{95,11}$$

zusammen. Der Umrechnungsfaktor ist dabei der aus (95,01) entnommene Wert der Größe $\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}$ zum Zeitpunkt und am Ort der Emission. Im GALILEIschen Hilfsraum entfernt sich nun der Strahler der Frequenz ω_0^* mit der Geschwindigkeit v von der Erde. Die auf der Erde empfangene Frequenz ω^* ergibt sich dann nach der gewöhnlichen Theorie des DOPPLER-Effektes zu

$$\omega^* = \omega_0^* \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{95,12}$$

Wegen (95,10) kann man diese Beziehung in der Form

$$\tau\omega^* = \tau_0\omega_0^* \tag{95,13}$$

schreiben. Wir müssen nun noch von der Frequenz ω^* im GALILEIschen Hilfsraum zu der Frequenz ω im physikalischen Raum übergehen. Dieser Übergang erfolgt nach einer zu (95,11) analogen Formel, nur ist jetzt die Größe $\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}$ zum Zeitpunkt und am Ort der Beobachtung zu nehmen. Die entsprechende Formel lautet

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega^*}\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2. \tag{95,14}$$

Aus (95,11), (95,13) und (95,14) erhalten wir schließlich

$$\tau\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2 \omega = \tau_0\left(1 - \frac{\alpha}{\tau_0}\right)^2 \omega_0. \tag{95,15}$$

Dabei ist ω_0 die Eigenfrequenz des Strahlers (etwa eines Wasserstoffatoms) und ω die Frequenz des Lichts, das ein gleich beschaffener Strahler auf einem fernen Stern ausgesandt hat und das bis zur Erde gelangt ist. Da $\tau > \tau_0$ ist und der Faktor bei ω in der Formel (95,15) eine wachsende Funktion von τ darstellt, so ist $\omega < \omega_0$, d. h., die Frequenz wird *verringert* und folglich eine Linie im sichtbaren Teil des Spektrums gegen das rote Ende verschoben.

In unserer Ableitung entspricht die Berücksichtigung der Änderung der Größe $\sqrt{g_{00}}$ beim Übergang vom Stern zur Erde dem EINSTEIN-Effekt, während die Verwendung der Formel (95,12) dem DOPPLER-Effekt entspricht.

Wir wollen jetzt die Änderung der Amplitude der Lichtwelle, die vom Stern zur Erde läuft, verfolgen. Aus der Dichte des Energiestroms, die dem Quadrat der Amplitude proportional ist, kann man dann auf die Entfernung des Sterns schließen, wenn man nur Sterne derselben Strahlungsleistung wählt (das kann man bei den Novae während ihrer Maximalhelligkeit annehmen).

In einem Raum mit dem Linienelement (94,01) hat die Wellengleichung die Form

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(H^2 e_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\right) = 0; \tag{95,16}$$

setzen wir

$$\psi = \frac{\psi^*}{H}, \tag{95,17}$$

wo ψ^* eine neue Funktion ist, so lautet sie

$$H \Box \psi^* - \psi^* \Box H = 0. \tag{95,18}$$

Dabei ist $\Box$ der GALILEIsche D'ALEMBERT-Operator

$$\Box \psi^* = e_\mu \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x_\mu^2}. \tag{95,19}$$

Die Funktion H variiert unvergleichlich langsamer als die Funktion ψ^*; deshalb kann man den zweiten Term in (95,18) weglassen und die Wellengleichung in der Form

$$\Box \psi^* = 0 \tag{95,20}$$

schreiben (diese Vernachlässigung hat auf den Ausdruck für den Energiestrom in der Wellenzone, der uns jetzt ausschließlich interessiert, überhaupt keinen Einfluß).

Wir legen nun den Koordinatenursprung in den Stern und betrachten die von dort ausgehende Kugelwelle. Die Größe ψ^* hat dann die Form

$$\psi^* = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{95,21}$$

Damit wird

$$\psi = \frac{1}{rH} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{r\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2} f\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{95,22}$$

Das Quadrat der Amplitude der Funktion ψ ist der Dichte I des Energiestromes proportional. Deshalb können wir setzen

$$I = \frac{B}{r^2\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4}, \tag{95,23}$$

wobei B eine positive Konstante bezeichnet. Die Konstante B ist gleich dem Energiestrom in die Raumwinkeleinheit. Denn aus dem Ausdruck für ds^2 in sphärischen Koordinaten

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 \{c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\} \tag{95,24}$$

ergibt sich, daß das Flächenelement einer Kugel um die Quelle den Wert[1])

$$dS = r^2\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \tag{95,25}$$

hat. Danach beträgt der Energiestrom durch ein Element der Fläche S

$$I\,dS = B \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,, \tag{95,26}$$

womit bewiesen ist, daß B den Energiestrom in die Raumwinkeleinheit darstellt.

Die Größe B ist in demjenigen Bezugssystem eine Konstante, in welchem die Wellengleichung (95,20) und ihre Lösung (95,22) aufgeschrieben wurden. Man muß aber beachten, daß B eine dimensionsbehaftete Zahl ist, deren Wert davon abhängt, wie man bei ihrer Messung die Einheiten und die Eichmaße wählt; der Übergang zu einem neuen Bezugssystem hat jedoch im allgemeinen einen Einfluß auf die Eichmaße. Die Dimension des Energiestromes ist „Energie, dividiert durch Zeit" oder „Wirkung, multipliziert mit dem Quadrat einer Frequenz". Die Wirkung ist eine Invariante, und das Eichmaß der Wirkung ändert sich bei dem Übergang von einem Bezugssystem zu einem anderen nicht. Deshalb ändert sich der Energiestrom bei einem solchen Übergang wie das Quadrat der Frequenz. Nimmt man als Eichmaß für die Frequenz die eines Quantes, das auf dem Stern emittiert wurde und bis in das betrachtete Raumgebiet gelangt ist, so bleibt der Energiestrom zahlenmäßig konstant. Verwendet man aber in jedem Raumgebiet ein „örtliches" Eichmaß für die Frequenz (zum Beispiel die Frequenz eines Quantes, das dem gleichen spektralen Übergang entspricht, aber in dem betrachteten Gebiet und nicht auf dem Stern emittiert wurde), so ändert sich der zahlenmäßige Wert des Energiestromes im Verhältnis ω^2/ω_0^2. Natürlich benutzt man bei Messungen auf der Erde „irdische" (nicht „stellare") Eichmaße, was der zweiten Betrachtungsweise entspricht. Drücken wir also den Energiestrom und seine Dichte in „irdischen" Einheiten aus, so müssen wir setzen[2])

$$B = B_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \tag{95,27}$$

und

$$I = \frac{B_0\omega^2}{\omega_0^2 r^2\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4}. \tag{95,28}$$

Hier ist B_0 der Wert für den Energiestrom in die Raumwinkeleinheit in der Nähe des Sterns; für Sterne mit der gleichen Strahlungsleistung (d. h. derselben absoluten Größe) sind die Werte B_0 gleich. Setzen wir

$$I = \frac{B_0}{R^2}, \tag{95,29}$$

---

[1]) Natürlich hat die Größe S in (95,25) nichts mit der Größe S in (94,02) zu tun.

[2]) Dieses Ergebnis steht im Einklang mit dem Resultat von LANDAU und LIFSCHITZ [25], das auf anderen Überlegungen beruht.

wo R der „Abstand" ist, der sich aus der sichtbaren Sterngröße (aus der Helligkeit) bestimmt, so erhalten wir

$$R = \frac{\omega_0}{\omega} r \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2. \tag{95,30}$$

In dieser Formel ist r die Entfernung zwischen Stern und Erde im GALILEIschen Hilfsraum in dem Bezugssystem, das mit dem Stern verbunden ist. Wir wollen r durch τ und τ_0 ausdrücken. In dem genannten Bezugssystem ist

$$\begin{aligned} &\text{für } t = \tau_0: && r = 0 \text{ und } \tau = \tau_0, \\ &\text{für } t = \tau_0 + \frac{r}{c}: && r = r \text{ und } \tau = \sqrt{\tau_0\left(\tau_0 + \frac{2r}{c}\right)}. \end{aligned} \tag{95,31}$$

Daraus folgt

$$\frac{r}{c} = \frac{\tau^2 - \tau_0^2}{2\tau_0}. \tag{95,32}$$

Setzen wir diesen Wert für r in (95,30) ein, so erhalten wir

$$\frac{R}{c} = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\tau^2 - \tau_0^2}{2\tau_0} \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2. \tag{95,33}$$

Außerdem liefert die Formel (95,15)

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\tau}{\tau_0} \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{\tau_0}\right)^2}. \tag{95,34}$$

Für die verschiedenen Galaxien hängen die Werte $\frac{\omega_0}{\omega}$ und R durch eine Beziehung zusammen, die man aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination der Größe τ_0 erhält. Um diese Elimination zu erleichtern, führen wir anstelle von τ_0 eine andere Hilfsgröße y ein[1]), die mit τ_0 folgendermaßen zusammenhängt

$$y = \frac{(\tau - \tau_0)(\tau + \alpha)}{\tau(\tau_0 - \alpha)}, \tag{95,35}$$

$$\tau_0 = \frac{\tau(\tau + \alpha + \alpha y)}{\tau + \alpha + \tau y}, \tag{95,36}$$

---

[1]) Es besteht wohl keine Gefahr, daß diese Größe y mit einer der Koordinaten in (95,01) und (95,02) verwechselt wird.

d. h. eine gebrochene lineare Funktion von τ_0 ist. Die Größe τ_0 kann für die verschiedenen Galaxien innerhalb der Grenzen

$$\alpha < \tau_0 \leqslant \tau \tag{95,37}$$

variieren; entsprechend ändert sich y zwischen den Grenzen

$$0 \leqslant y < \infty . \tag{95,38}$$

Setzen wir den Wert für τ_0 in die Formel (95,34) ein, so ergibt sich

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{(\tau + \alpha + \tau y)\,(\tau + \alpha + \alpha y)}{(\tau + \alpha)^2} \tag{95,39}$$

oder

$$\frac{\omega_0}{\omega} = 1 + y + \frac{\tau\alpha}{(\tau + \alpha)^2}\, y^2 . \tag{95,40}$$

Gehen wir dagegen mit τ_0 aus (95,36) und $\frac{\omega_0}{\omega}$ aus (95,39) in die Formel (95,33) für $\frac{R}{c}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{R}{c} = \frac{(\tau - \alpha)^3}{\tau(\tau + \alpha)} \left(y + \frac{1}{2}\, y^2\right). \tag{95,41}$$

Wir setzen

$$h = \frac{\tau(\tau + \alpha)}{(\tau - \alpha)^3} \tag{95,42}$$

und erinnern uns der Beziehung (94,52) für die invariante Dichte ϱ^*, nach der

$$\varrho^* = \frac{3\,\alpha}{2\pi\gamma}\, \frac{\tau^3}{(\tau - \alpha)^6} \tag{95,43}$$

ist. Dann erhalten wir

$$\frac{2}{3}\pi\gamma\, \frac{\varrho^*}{h^2} = \frac{\tau\alpha}{(\tau + \alpha)^2} . \tag{95,44}$$

Die zu h reziproke Größe hat die Dimension einer Zeit, während die Größe (95,44) eine reine Zahl ist. Führen wir die Größen h und ϱ^* (anstelle von τ und α) in die Beziehungen (95,41) und (95,39) ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{Rh}{c} &= y + \frac{1}{2}\, y^2 , \\ \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} &= y + \frac{2}{3}\pi\gamma\, \frac{\varrho^*}{h^2}\, y^2 . \end{aligned}\right\} \tag{95,45}$$

In diesen Formeln ist die ganze Theorie der Rotverschiebung enthalten.

Die Abhängigkeit der Verschiebung $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}$ von der Entfernung hat den folgenden allgemeinen Verlauf. Bei kleinen Verschiebungen (kleinen y) kann man die rechten Seiten der beiden Gleichungen (95,45) einander gleichsetzen. Dann wird

$$c\,\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = Rh, \qquad (95,46)$$

und die Rotverschiebung $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}$ hängt linear vom Abstand R ab. Der Proportionalitätskoeffizient dieses linearen Zusammenhanges läßt sich aus den Beobachtungen bestimmen, und zwar ergibt sich für das Reziproke von h die Größenordnung [27]

$$\frac{1}{h} \sim 4 \cdot 10^9 \text{ Jahre} \qquad (95,47)$$

(nach älteren Literaturangaben erhält man für $1/h$ etwa $2 \cdot 10^9$ Jahre; die Differenz beruht darauf, daß man eine Ungenauigkeit in der Abschätzung für den Abstand R erkannt hat). Der Wert (95,47) entspricht dem folgenden Wert für h:

$$h = 8 \cdot 10^{-18}\,\text{sec}^{-1}. \qquad (95,48)$$

Bei großen Verschiebungen, d. h. bei sehr großen Abständen, werden auch die nichtlinearen Terme in den Formeln (95,45) bemerkbar. Ihr Einfluß wird sich darin äußern, daß die Verschiebung langsamer mit der Entfernung wächst als zu Anfang; die aus Beobachtungen der fernsten Galaxien nach (95,46) bestimmte Größe h sollte etwas kleiner herauskommen als bei ihrer Bestimmung aus Beobachtungen an nähergelegenen Galaxien. Bei den größten (wahrscheinlich praktisch unerreichbaren) Verschiebungen muß sich die Abhängigkeit wieder einer linearen annähern, aber mit einem kleineren Proportionalitätsfaktor.

In der Astronomie bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (95,46) gewöhnlich als Geschwindigkeit und drückt sie in km/sec aus. Man muß jedoch beachten, daß diese Größe zwar die Dimension einer Geschwindigkeit hat, aber keine eigentliche Geschwindigkeit irgendeiner Bewegung darstellt. Das ergibt sich schon daraus, daß sie für $\omega < \frac{1}{2}\omega_0$ größer als die Lichtgeschwindigkeit wird. Die Größe $c\,\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}$ ist auch keine DOPPLER-Geschwindigkeit; selbst wenn man die ganze Verschiebung als das Resultat eines DOPPLER-Effektes im GALILEIschen Raum deutet. Aus der gewöhnlichen Theorie des DOPPLER-Effektes ergibt sich [vgl. (95,12)] die effektive DOPPLER-Geschwindigkeit zu

$$v_{\text{eff}} = c\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2}. \qquad (95,49)$$

Diese Größe stimmt nur dann annähernd mit der linken Seite von (95,46) überein, wenn die Verschiebung klein ist.

Die Formeln (95,45) sind exakt und liefern die Abhängigkeit der Verschiebung vom Abstand für beliebige Verschiebungen. Möglicherweise wird in Zukunft die

Beobachtungsgenauigkeit derart zunehmen, daß die Auswertung der Beobachtungen auf Grund dieser Formeln auch Aussagen über den Koeffizienten der Größe y^2 in der zweiten der Gleichungen (95,45) erlaubt. Dann könnte man aus den Beobachtungen über die Rotverschiebung nicht nur die Konstante der Rotverschiebung h (die HUBBLE-Konstante), sondern auch die mittlere Dichte ϱ^* bestimmen. Vorläufig jedoch läßt sich ϱ^* nur sehr roh abschätzen, indem man die Anzahl der Galaxien in einem hinreichend großen Raumgebiet bestimmt und voraussetzt, daß die einzelnen Galaxien etwa die gleiche Masse wie unser Milchstraßensystem haben (Größenordnung: 10^{11} Sonnenmassen oder $2 \cdot 10^{44}$ g). Eine solche Abschätzung liefert für die Dichte die Größenordnung

$$\varrho^* \sim 4 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3}. \tag{95,50}$$

Eine anschaulichere Vorstellung von dieser Dichte gibt die folgende Berechnung. Das Volumen der Erdkugel beträgt $1{,}08332 \cdot 10^{27}$ cm³ oder rund 10^{27} cm³. Auf dieses Volumen entfallen im Weltall im Mittel nur 0,04 g Materie.[1])

Sieht man ϱ^* und h als bekannt an, so kann man auch den Wert der dimensionslosen Konstanten

$$b = \frac{8\pi\gamma\varrho^*}{3h^2} \tag{95,51}$$

bestimmen. Diese Konstante tritt einerseits in den Gleichungen (95,45) auf, die sich in der Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{Rh}{c} &= y + \frac{1}{2}y^2, \\ \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} &= y + \frac{b}{4}y^2 \end{aligned}\right\} \tag{95,52}$$

schreiben lassen, und geht andererseits in die Beziehung (95,44) ein, die lautet

$$b = \frac{4\tau\alpha}{(\tau+\alpha)^2}. \tag{95,53}$$

Nimmt man die Werte

$$\left.\begin{aligned} h &= 8 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{sec^{-1}}; \\ \varrho^* &= 4 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3}; \\ \gamma &= \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}\,\mathrm{cm^3/(g\,sec^2)}, \end{aligned}\right| \tag{95,54}$$

so ergibt sich

$$b = \frac{\pi}{9} \sim \frac{1}{3}. \tag{95,55}$$

Aus (95,53) kann man dann das Verhältnis τ/α bestimmen. Man findet

$$\frac{\tau}{\alpha} \sim 10. \tag{95,56}$$

---

[1]) Wir heben nochmals hervor, daß die Größe ϱ^* nur sehr ungenau bekannt ist; ihr wahrer Wert kann sich von dem oben angegebenen um ein Vielfaches unterscheiden.

Damit folgt dann aus (95,42)

$$h\tau = \frac{1,1}{(0,9)^3} \sim 1,50; \qquad h\alpha \sim 0,15. \tag{95,57}$$

Mit dem Wert (95,47) für $1/h$ erhalten wir

$$\tau = 6 \cdot 10^9 \text{ Jahre}; \qquad \alpha = 6 \cdot 10^8 \text{ Jahre} \tag{95,58}$$

und nach Formel (94,45)

$$T = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Jahre}. \tag{95,59}$$

Wir müssen noch folgendes erwähnen. Für das Verhältnis τ/α ergibt sich aus der Formel (95,53) nur dann ein reeller Wert, wenn b kleiner als Eins ist, d. h., wenn die Dichte ϱ^* bei gegebenem h hinreichend klein ist (was anscheinend in der Wirklichkeit auch zutrifft). Einem Wert $b > 1$ entspricht ebenfalls eine Lösung der EINSTEINschen Gleichungen, aber die von uns benutzten konform-GALILEIschen Koordinaten sind dann nicht anwendbar, weil sie komplex werden. Man kann allerdings statt ihrer andere Koordinaten einführen, die reell sind; aber der Ausdruck für ds^2, den man für $b > 1$ erhält, führt zu derart sonderbaren Folgerungen über die Eigenschaften von Raum und Zeit (endliches, sich periodisch mit der Zeit änderndes Volumen, usw.), daß man ihm kaum einen physikalischen Sinn zubilligen kann. Deshalb werden wir die Lösung, die dem Fall $b > 1$ entspricht, hier nicht betrachten. (Diese Lösung wurde ebenfalls von FRIEDMANN gefunden.)

Zu der von uns untersuchten Lösung, die dem Fall $b < 1$ entspricht (FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raum), wollen wir noch folgende Bemerkungen machen.

Zunächst ist es nicht zulässig, in ihr irgendein ,,Modell der Welt als Ganzes" zu erblicken: Eine solche Auffassung wäre philosophisch unbefriedigend. Der FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raum kann höchstens als Untergrund für eine beschränkte Anzahl von Galaxien dienen, ähnlich wie der GALILEIsche Raum den Untergrund für Objekte von der Art des Sonnensystems bildet.

Ferner ist selbst die Anwendbarkeit der EINSTEINschen Gleichungen in ihrer klassischen Form auf so riesige Räume nicht so unstreitig wie ihre Anwendbarkeit in beschränkteren Bereichen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß diese Gleichungen in kosmischen Maßstäben einer Abänderung oder Verallgemeinerung bedürfen.

Von den Folgerungen, zu denen die von uns untersuchte Lösung führt, überrascht wohl am meisten die relative Kürze der Zeitspanne T, die seit der Zeit verstrichen ist, als die Galaxien einander viel näher waren. Diese Zeit ist mit dem Alter der Erdkruste vergleichbar, das sich aus dem radioaktiven Zerfall des Urans bestimmt, während man eigentlich erwarten sollte, daß die ,,kosmischen" Zeitmaßstäbe bei weitem größer als die ,,irdischen" sind.

Was aber die ,,Flucht" der Galaxien anbetrifft, so ist diese Tatsache, trotz ihres überraschenden Charakters, so gut gesichert, daß man daran nicht mehr zweifeln kann. Die ungewöhnlich große Anzahl von Doppelsternen spricht sogar dafür, daß möglicherweise nicht nur die Galaxien, sondern auch die Sterne in der Vergangenheit weitaus dichter angeordnet waren.

Bei der Beurteilung der Theorie muß man auch beachten, daß sie einen erfolgreichen Versuch zur Lösung des in § 94 erwähnten SEELIGERschen Paradoxons darstellt, das bei der Betrachtung einer gleichmäßigen Massendichte im euklidischen Raum auftaucht.

Alles in allem scheint uns die hier dargelegte Theorie von FRIEDMANN zweifellos ein wichtiger Schritt in der Erforschung von Räumen kosmischer Maßstäbe zu sein.

§ 96 Die Entwicklung der Gravitationstheorie und der Theorie der Bewegung von Massen (kritischer Überblick)

Die fundamentale Arbeit EINSTEINs, welche die Grundlage der Theorie der GALILEIschen Raum-Zeit bildet, erschien im Jahre 1905 unter dem Titel „Zur Elektrodynamik bewegter Körper". Darin wurde zum ersten Male dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit das Prinzip der Relativität gegenübergestellt, nach dem die Gesetze der Physik von der Wahl des Inertialsystems unabhängig sein müssen. Die Koordinierung dieser beiden Prinzipien machte eine Revision der Begriffe Raum und Zeit nötig und führte zur Theorie der einheitlichen Raum-Zeit, die den Namen Relativitätstheorie erhielt. Diese Bezeichnung tritt aber im Titel der EINSTEINschen Arbeit noch nicht auf.

Das Relativitätsprinzip bringt die Homogenität[1]) der Raum-Zeit zum Ausdruck; Homogenität jedoch bedeutet mathematisch die Existenz einer Gruppe von Transformationen, nämlich der LORENTZ-Transformationen, die den Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen vermitteln. Die Form der physikalischen Gesetze muß der Homogenität der Raum-Zeit Rechnung tragen.[2]) Diese Forderung bedeutet, daß die Gleichungen, durch die die physikalischen Gesetze ausgedrückt werden, kovariant gegenüber einer LORENTZ-Transformation sein müssen. Darin ist die ganze EINSTEINsche Relativitätstheorie enthalten.

Die erwähnte Forderung ist von enormer heuristischer Bedeutung, denn sie schränkt die möglichen Formen physikalischer Gesetze stark ein. Es ist deshalb nicht überraschend, daß die Anwendungen der Relativitätstheorie unübersehbar sind und alle Gebiete der Physik betreffen.

Zwischen den Jahren 1905 und 1915 schuf EINSTEIN seine Gravitationstheorie. Im Jahre 1916 wurde seine fundamentale Arbeit unter dem Titel „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" veröffentlicht. Dieser Titel drückt die Auffassung EINSTEINs von der von ihm geschaffenen Gravitationstheorie aus, eine Auffassung, die man nicht als richtig anerkennen kann. Wie wir schon in der Einleitung gezeigt haben, ist die Gravitationstheorie eine

---

[1]) Wir verstehen darunter auch die Isotropie.

[2]) In willkürlichen Koordinaten kann die Homogenität der Raum-Zeit, wie wir wissen, folgendermaßen als Eigenschaft des Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$ ausgedrückt werden: Die Raum-Zeit ist homogen, wenn eine 10parametrige Transformationsgruppe existiert von der Beschaffenheit, daß die nach der Tensorregel transformierten Größen $g_{\mu\nu}$ dieselbe Abhängigkeit von den neuen Koordinaten aufweisen, wie die ursprünglichen $g_{\mu\nu}$ von den alten Koordinaten.

Weiterentwicklung der Theorie des GALILEIschen Raumes, aber nicht im Sinne einer Erweiterung oder Verallgemeinerung des Relativitätsbegriffes, sondern, im Gegenteil, im Sinne einer Einschränkung dieses Begriffes. Der Begriff Relativität ist mit der Eigenschaft Homogenität verknüpft, und diese Eigenschaft kommt in der ursprünglichen EINSTEINschen Theorie der ganzen Raum-Zeit zu, wohingegen die in der neuen Theorie betrachtete Raum-Zeit diese Eigenschaft entweder gar nicht oder höchstens nur örtlich besitzt. Deshalb ist auch die Relativität in der neuen Theorie nur lokal.

Der Umstand, daß die in ihrer Tiefe, Eleganz und Überzeugungskraft erstaunliche Gravitationstheorie von ihrem Entdecker nicht richtig verstanden wurde, darf uns nicht wundernehmen. Auch dürfen uns die logischen Mängel oder Fehlschlüsse, die dem Schöpfer bei der Ableitung der Grundgleichungen der Theorie unterliefen, nicht überraschen. In der Geschichte der Physik gibt es viele Beispiele dafür, daß der wahre Gehalt einer grundsätzlich neuen physikalischen Theorie nicht von ihrem Urheber, sondern von einem anderen Forscher begriffen wurde, und daß sich die von ihrem Schöpfer angegebene Ableitung der Grundgleichungen der Theorie als logisch inkonsistent erwies. Es genügt, auf die MAXWELLsche Theorie des elektromagnetischen Feldes hinzuweisen. Die Vorstellung, die Mechanik sei die Grundlage der Physik, wurde in Wirklichkeit gerade durch diese Theorie untergraben; nichtsdestoweniger hielten aber sowohl ihr Urheber als auch HERTZ, der so viel für ihre Nachprüfung getan hat, durchaus an den mechanischen Vorstellungen fest. Erst LORENTZ erkannte mit aller Deutlichkeit den physikalischen Sinn der MAXWELLschen Gleichungen, indem er darauf hinwies, daß das elektromagnetische Feld selbst eine physikalische Realität (d. h. materiell) ist, im leeren Raum existieren kann und keines besonderen Trägers bedarf.[1])

Bezüglich der Konsistenz der Schlußweise erinnern wir daran, daß MAXWELL [29] der Ableitung seiner berühmten Gleichungen eine Darlegung einiger Teile der Mechanik vorausschickt und die Ableitung selbst auf die LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art gründet. Wir wissen heute, daß eine Ableitung der MAXWELLschen Gleichungen aus der Mechanik vom logischen Standpunkt unmöglich ist. Aber große Entdeckungen — und nicht nur große — werden nicht nach den Regeln der Logik, sondern durch schöpferische Intuition gemacht.

Es ist interessant zu verfolgen, auf welchem Wege EINSTEIN zu seinen Gravitationsgleichungen kam. Dazu steht uns neben der grundlegenden Arbeit EINSTEINs aus dem Jahre 1916 und neben seinen wissenschaftlichen Veröffentlichungen auch seine Selbstbiographie zur Verfügung, die 1949 zu seinem 70. Geburtstag erschien [28].

Schon etwa 1908 wurde EINSTEIN klar, daß die Versuche, die Schwerkraft in den Rahmen der Relativitätstheorie, die in einem GALILEIschen Raum arbeitet, einzufügen, keinen Erfolg haben konnten, und zwar aus folgendem Grunde. Eine solche Theorie liefert zwar die Abhängigkeit der *trägen* Masse von der inneren (und der kinetischen) Energie des Körpers, nicht aber die Abhängigkeit

[1]) Interessanterweise wird dieses Beispiel dafür, daß der Schöpfer einer Theorie deren physikalischen Sinn nur unvollständig erfaßt, von EINSTEIN selbst angeführt (Selbstbiographie [28]).

der *schweren* Masse von der Energie, falls man nur die Gleichungen des Gravitationsfeldes als linear annimmt. Indessen gibt es den fundamentalen Tatbestand der Gleichheit von träger und schwerer Masse, der aus der Unabhängigkeit der Beschleunigung eines frei fallenden Körpers von seiner Zusammensetzung folgt. Diese Tatsache deutete EINSTEIN im Sinne einer lokalen Äquivalenz von Gravitations- und Beschleunigungsfeld.

Daraus schloß EINSTEIN: Läßt man „beschleunigt bewegte Bezugssysteme" zu, so werden Gravitationsfeld und Beschleunigungsfeld ununterscheidbar. In seiner Selbstbiographie schreibt er: „Wenn man also beliebig ausgedehnte, nicht von vornherein durch räumliche Grenzbedingungen eingeschränkte Gravitationsfelder als möglich betrachtet, so wird der Begriff des Inertialsystems völlig leer. Der Begriff ‚Beschleunigung gegenüber dem Raum' verliert dann jede Bedeutung und damit auch das Trägheitsprinzip[1]) samt dem MACHschen Paradoxon."

Aus der Gleichberechtigung aller Bezugssysteme (gleichgültig ob Inertialsysteme oder nicht) schließt EINSTEIN ferner, daß die Gravitationsgleichungen gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen kovariant sein müssen.

Das waren die Grundgedanken EINSTEINs um 1908. Wir wollen sie analysieren. Zunächst einmal ist dabei die grundlegende Voraussetzung nicht richtig. EINSTEIN spricht von willkürlichen Gravitationsfeldern, die sich beliebig weit erstrecken und nicht durch Grenzbedingungen eingeschränkt sind. Solche Felder sind aber *unmöglich*. Grenz- oder andere Bedingungen, die den Raum im Großen kennzeichnen, sind völlig unentbehrlich, und deshalb behält auch der Begriff „Beschleunigung gegenüber dem Raum" in irgendeiner Form seinen Sinn. Was das MACHsche Paradoxon anlangt, so basiert es bekanntlich auf der Betrachtung eines rotierenden, flüssigen Körpers, der die Form eines Ellipsoides besitzt, und eines nicht rotierenden Körpers mit Kugelgestalt. Ein Paradoxon kommt dabei nur dann zustande, wenn man den Begriff „Rotation gegenüber dem Raum" als sinnlos betrachtet; dann scheinen tatsächlich beide Körper (der rotierende und der nichtrotierende) gleichberechtigt zu sein, und es wird unverständlich, warum der eine kugelförmig ist und der andere nicht. Aber das Paradoxon verschwindet, sobald wir die Berechtigung des Begriffes „Beschleunigung gegenüber dem Raum" anerkennen.

Das Wesen dieses Fehlers in der Grundvoraussetzung besteht *in der Nichtberücksichtigung des streng lokalen Charakters der Äquivalenz zwischen dem Beschleunigungs- und dem Gravitationsfeld*. Damit hängt auch zusammen, daß *eine nichtlokale physikalische Definition eines beschleunigt bewegten Bezugssystems unmöglich ist*, da alle Kästen, starren Gerüste usw., mit denen EINSTEIN arbeitet, eine Idealisierung bilden, die nur für Inertialsysteme, nicht aber für beschleunigte Systeme brauchbar ist. Da die Grundvoraussetzung, aus der EINSTEIN die Inhaltslosigkeit des Begriffs eines Inertialsystems folgert, wegfällt, wird auch der Schluß auf die physikalische Gleichberechtigung aller Bezugssysteme hinfällig. Auf diesen Schluß baut aber EINSTEIN seine weiteren Überlegungen auf, insbesondere seine Folgerung über die Kovarianz der gesuchten Gravitationsgleichungen. Selbstverständlich ergibt sich aus der Unrichtigkeit der Voraussetzungen noch nicht, daß auch die Folgerungen falsch sind: Die Gravi-

[1]) Das erste NEWTONsche Gesetz (V. F.).

tationsgleichungen sind tatsächlich kovariant. Aber die Kovarianz ist keine nur ihnen eigentümliche Eigenschaft, sondern sie läßt sich in jeder Theorie erreichen. So haben wir z. B. im Kapitel IV unseres Buches die gewöhnliche Relativitätstheorie allgemein-kovariant formuliert; es ist interessant, daß auch EINSTEIN selbst auf die Möglichkeit einer solchen Formulierung hingewiesen hat [28], worauf wir gleich zurückkommen werden.

In der ersten Etappe des Aufbaues der Gravitationstheorie ging EINSTEIN somit von der Gleichheit von träger und schwerer Masse, dem Prinzip der Äquivalenz von Beschleunigung und Gravitation und der Forderung nach Kovarianz der Gleichungen aus. Der Gedanke der RIEMANNschen Geometrie fehlte noch.

Die Forderung nach Kovarianz der Gleichungen spielte beim Aufbau der Theorie eine sehr große Rolle. Daß EINSTEIN diese Forderung aus dem Äquivalenzprinzip und letzten Endes aus der Gleichheit von träger und schwerer Masse „abgeleitet" hat, zeigt, daß er zur Zeit der Schaffung seiner Theorie die allgemeine Kovarianz der Gleichungen für eine spezifische Eigentümlichkeit der Gravitationstheorie hielt. Dies wird im einleitenden Teil der grundlegenden Arbeit aus dem Jahre 1916 auch direkt gesagt. Später hat man EINSTEIN darauf hingewiesen, daß die allgemeine Kovarianz der Gleichungen keineswegs schon irgendein physikalisches Gesetz ausdrückt, und er schien damit einverstanden zu sein. EINSTEINs Zustimmung war aber mehr formell, denn in Wirklichkeit hat er bis an sein Lebensende die Forderung nach allgemeiner Kovarianz mit dem Gedanken einer gewissen „allgemeinen Relativität" und mit der physikalischen Gleichberechtigung aller Bezugssysteme verknüpft. Ebenso hat er den Unterschied einer Relativität im Sinne von Homogenität des Raumes und einer Relativität im Sinne der Möglichkeit, beliebige Koordinatensysteme zu benutzen, niemals eingesehen[1]) und die zweite Art von Relativität als eine Verallgemeinerung der ersten betrachtet. Das hat er auch dadurch bekundet, daß er seine Gravitationstheorie als „allgemeine Relativitätstheorie" bezeichnete und fernerhin beharrlich an diesem Ausdruck festhielt und auf der Existenz eines angeblichen „allgemeinen Relativitätsprinzips" bestand. Diese Verwirrung der Begriffe zeigt sich in EINSTEINs Selbstbiographie an einer Stelle besonders anschaulich, wo er selbst die „spezielle" Relativitätstheorie (die ja nach EINSTEIN keinerlei „allgemeine Relativität" enthält) in allgemein-kovarianter Form (worin sich nach EINSTEIN die Idee der „allgemeinen Relativität" ausdrückt) darstellt.

In der Zeit unmittelbar vor der Schaffung seiner Gravitationstheorie war also die Idee der allgemeinen Kovarianz für EINSTEIN ein physikalischer Begriff, und sie leitete ihn bei seinen Forschungen.

Der nächste wichtige Schritt im Aufbau der Theorie erfolgte, als EINSTEIN den verallgemeinerten Ausdruck für das Quadrat des Intervalls, d. h. faktisch die Hypothese einer RIEMANNschen Geometrie von Raum und Zeit, einführte. Der Gedanke der RIEMANNschen Geometrie kam EINSTEIN durch die Forderung der allgemeinen Kovarianz der Gleichungen: Er machte sich den Umstand zunutze, daß in dem „absoluten Differentialkalkül" (in der Tensoranalysis), der damals bereits von RICCI, LEVI-CIVITA und anderen Autoren gut aus-

---

[1]) Vgl. die Einleitung.

gearbeitet war, die Gleichungen von vornherein allgemein-kovariant geschrieben werden. Insofern spielte die Forderung nach allgemeiner Kovarianz eine wichtige heuristische Rolle, obwohl nicht sie, sondern *die neue Hypothese über den Charakter der Geometrie*[1]) *von Raum und Zeit* das Wesentliche war.

Ein wichtiger Schritt in der Aufstellung der Gravitationsgleichungen war EINSTEINs Annahme, daß nur rein „geometrische" Größen als Gravitationspotentiale anzusehen sind, nämlich gerade die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ in dem Ausdruck für das Quadrat des Intervalls, und daß man keine weiteren Größen einzuführen hat. Durch diese Annahme wird aus der unübersehbaren Menge der nichtlinearen, allgemein-kovarianten Gleichungen eine Gleichung fast eindeutig ausgesondert, deren vollständige Eindeutigkeit mit Hilfe einiger Zusatzüberlegungen erreicht werden kann (der Massentensor muß konservativ sein, und wenn keine Massen vorhanden sind, müssen die Gravitationsgleichungen eine Lösung besitzen, die einem GALILEIschen Raum entspricht).

Auf diesem Wege fand EINSTEIN seine Gravitationsgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - \varkappa T_{\mu\nu},$$

die das Wesentliche seiner Theorie enthalten und eine der größten Leistungen des menschlichen Geistes darstellen. Diese Gleichungen gab EINSTEIN in der Arbeit vom Jahre 1916 an.

Im folgenden versuchte EINSTEIN, diese Gleichungen in verschiedener Weise zu modifizieren; jedoch ist ihre ursprüngliche Form als die einzig richtige anzusehen. EINSTEIN war auch bestrebt, die Gleichungen für ein das Gravitationsfeld umfassendes „Gesamtfeld" zu finden, die den Massentensor nicht enthalten sollten; anscheinend verband er damit die Hoffnung, eine von der Quantenmechanik unabhängige Theorie der Elementarteilchen als singuläre Punkte des Feldes schaffen zu können. Diese Versuche endeten mit einem Mißerfolg, und wir haben sie nur deshalb erwähnt, weil der Gedanke, statt des Massentensors Singularitäten des Feldes zu betrachten, auch in den Arbeiten EINSTEINs und seiner Schule über die Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Gravitationsgleichungen auftaucht.

Die zeitlich ersten dieser Arbeiten waren die von EINSTEIN und GROMMER und von EINSTEIN, die im Jahre 1927 veröffentlicht wurden [30], [31]. In diesen Arbeiten wurde folgende Frage aufgeworfen und im Prinzip gelöst: Kann man, falls man die Massen als singuläre Punkte des Feldes betrachtet, von vornherein die Bewegung dieser Singularitäten ohne Verletzung der Gravitationsgleichungen willkürlich vorgeben oder nicht? Die Antwort auf diese Frage fiel negativ aus: Es zeigte sich, daß man die Bewegung der singulären Punkte des Feldes nicht von vornherein vorschreiben kann, denn sie folgt bereits aus den Gravitationsgleichungen. Danach ist insbesondere das Prinzip der geodätischen Linie nicht unabhängig von den Gravitationsgleichungen, sondern folgt aus ihnen. Wesentlich ist die Bemerkung, daß dieses Ergebnis durch die Nichtlinearität der Gravitationsgleichungen bedingt ist.

---

[1]) Wir benutzen hier das Wort „Geometrie" im Sinne einer objektiven Eigenschaft von Raum und Zeit, nicht im Sinne der Lehre von diesen Eigenschaften.

Trotz der überaus großen Bedeutung dieses Resultates hat man die beiden genannten Arbeiten EINSTEINS wenig beachtet, und es vergingen mehr als 10 Jahre, ehe sie fortgeführt wurden. Die Weiterentwicklung der Gedanken der Arbeit von EINSTEIN und GROMMER aus dem Jahr 1927 begann in den Jahren 1938—1939 völlig unabhängig in zwei Richtungen. Zu der einen Richtung gehören die Arbeiten von EINSTEIN, INFELD und ihren Mitarbeitern, zur anderen die Arbeiten von FOCK und seinen Mitarbeitern; zu dieser zweiten Richtung kann man auch die nach 1950 erschienenen Arbeiten von PAPAPETROU zählen.

Zunächst wollen wir die Arbeiten der EINSTEINschen Schule betrachten. In einer Reihe von Arbeiten von EINSTEIN, INFELD und HOFFMANN (1938) [32] und von EINSTEIN und INFELD (1940) [33] und (1949) [34] wurde eine Methode entwickelt, die es ermöglicht, aus den Gravitationsgleichungen eine Näherungsform der Bewegungsgleichungen für Punktsingularitäten des Feldes, die kugelsymmetrischen Körpern von infinitesimalen Dimensionen entsprechen, abzuleiten und explizite hinzuschreiben. Die Gleichungen wurden sowohl in der ersten (NEWTONschen), als auch in der zweiten (auf die NEWTONsche folgende) Näherung abgeleitet. Dabei ließen sich die Autoren von dem Gedanken EINSTEINS leiten, daß die Einführung des Massentensors unerwünscht ist, und gingen dementsprechend von den Gravitationsgleichungen aus, deren rechte Seite Null ist. (Übrigens zeigte INFELD im Jahre 1954 [35], daß sich die Rechnungen bedeutend vereinfachen, wenn man von Anfang an einen Massentensor mit DIRACschen Delta-Funktionen einführt, die kugelsymmetrischen Punktsingularitäten entsprechen.) In der Absicht, eine exakte Lösung des mechanischen Problems der Bewegung singulärer Punkte des Feldes zu finden, betrachteten die Autoren auch unendliche Reihen nach Potenzen eines Parameters, der der Lichtgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist.

Die Deutung der Ergebnisse der Arbeiten aus der EINSTEINschen Schule wird dadurch erschwert, daß die in den Arbeiten dieser Schule benutzten Koordinatensysteme nicht von vornherein festgelegt werden (wie etwa unser harmonisches Koordinatensystem), sondern von Näherung zu Näherung durch verschiedene Zusatzbedingungen bestimmt werden, die man teils explizite, teils aber auch nur implizite einführt. Im allgemeinen kann man jedoch sagen, daß sich die in diesen Arbeiten tatsächlich benutzten Koordinatensysteme so wenig von einem harmonischen Koordinatensystem unterscheiden, daß sich diese Verschiedenheit in den Bewegungsgleichungen zweiter Näherung noch nicht bemerkbar macht. Bezeichnet man nämlich mit (t, x_i) die harmonischen und mit (t', x_i') die von EINSTEIN und INFELD benutzten Koordinaten, so ist größenordnungsmäßig

$$x_i' = x_i + O\left(\frac{lq^4}{c^4}\right); \qquad t' = t + O\left(\frac{lq^5}{c^6}\right), \tag{96,01}$$

wo l und q die schon mehrfach benutzten Parameter (charakteristische Länge und Geschwindigkeit) sind. Genauer wird die Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen in unserer Arbeit [50] untersucht.

Betrachtet man höhere Näherungen als die zweite, so taucht außer der Frage, die mit der Unbestimmtheit des Koordinatensystems zusammenhängt, noch eine andere Frage auf. Es bleibt nämlich unklar, ob die gewonnene formale Lösung eine physikalische Bedeutung hat. Zweifel daran werden dadurch hervorgerufen,

daß die Autoren der genannten Arbeiten keine Ausstrahlungsbedingung aufstellen, sondern im Gegenteil behaupten, es gäbe (unbekannte) Koordinatentransformationen, die die exakten Bewegungsgleichungen auf die NEWTONsche Form bringen, die einem streng konservativen, nicht strahlenden System entspricht. Hier ist sowohl die Möglichkeit, allgemeinere Bewegungsgleichungen auf die NEWTONsche Form zu bringen, als auch die Möglichkeit, ein nichtkonservatives, strahlendes System auf ein konservatives zu reduzieren, durchaus zweifelhaft.

Die Arbeit von EINSTEIN und GROMMER aus dem Jahre 1927 ist auch der Ausgangspunkt für die Arbeiten der anderen Richtung. In unserer Arbeit aus dem Jahre 1939 [36] haben wir das Problem der Bewegung kugelsymmetrischer, nichtrotierender Körper mit endlicher Ausdehnung behandelt und für diese Bewegungsgleichungen abgeleitet, wobei wir von den Gravitationsgleichungen ausgingen (vgl. auch [38]). Die von uns benutzte Methode kann dahin charakterisiert werden, daß wir einerseits den Massentensor betrachten, der parallel mit den Gravitationspotentialen bestimmt wird, und andererseits harmonische Koordinaten verwenden: In unseren Rechnungen ergeben sich die Bewegungsgleichungen aus den Harmonizitätsbedingungen. Außerdem haben wir auch die Gravitationspotentiale in expliziter Form erhalten (vgl. § 82, § 83 dieses Buches).

Die prinzipielle Bedeutung des harmonischen Koordinatensystems wurde schon in unserer Arbeit aus dem Jahre 1939 hervorgehoben und in der Arbeit aus dem Jahre 1947 [38] eingehender diskutiert. Dabei wurde auf den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit des Koordinatensystems und der ausgezeichneten Stellung des kopernikanischen heliozentrischen Systems hingewiesen.

In unserer Arbeit aus dem Jahre 1939 wurden die Bewegungsgleichungen nur in der NEWTONschen Näherung abgeleitet. Wir wiesen dort darauf hin, daß der zweiten Näherung eine Arbeit von PETROVA gewidmet wird; diese wurde tatsächlich 1940 durchgeführt, aber erst 1949 [40] gedruckt. Die in der Arbeit von PETROVA abgeleiteten Bewegungsgleichungen eines Systems von endlichen Massen in der zweiten Näherung haben wir in unserer Arbeit aus dem Jahre 1941 [41] über die Integrale der Schwerpunktsbewegung benutzt.

Mit derselben Methode hat KASCHKAROW im Jahre 1954 [43] aus den Gravitationsgleichungen die Bewegungsgleichungen für rotierende Massen in der NEWTONschen Näherung abgeleitet. FICHTENHOLZ brachte im Jahre 1950 [44] die Bewegungsgleichungen in zweiter Näherung auf die LAGRANGEsche Form und leitete daraus ihre Integrale ab.

In seinen Arbeiten aus dem Jahre 1951 [45], [46] setzte PAPAPETROU, unabhängig von PETROVA, unsere Arbeit vom Jahre 1939 fort und leitete die Bewegungsgleichungen für kugelsymmetrische, nichtrotierende Massen in zweiter Näherung ab. Das Vorgehen von PAPAPETROU, das auch in einer neueren Arbeit von MEISTER [47] angewandt wird, enthält jedoch eine Inkonsequenz, indem dabei die Gewichtsfunktion für die Mittelung der Bewegungsgleichungen eines Kontinuums über das Gebiet jeder Masse a priori gewählt wird. Diese implizite Festlegung wird eigentlich erst am Schluß der Rechnungen dadurch gerechtfertigt, daß die Erfüllung der Harmonizitätsbedingung direkt nachgeprüft wird.

Auf dem Gebiet der Theorie der Bewegung von Massen wurden in diesem Buch eine Reihe neuer Ergebnisse angegeben. Über sie, wie auch über unsere Resultate

auf anderen Gebieten der Gravitationstheorie, wollen wir hier nicht sprechen, sondern verweisen den Leser auf den Text des Buches. Wir erwähnen nur, daß wir nicht nur die Bewegungsgleichungen selbst (für den Fall rotierender Massen von endlicher Ausdehnung), sondern auch ihre Integrale erhalten haben.

Ein kritischer Vergleich der Arbeiten der EINSTEINschen Schule über die Bewegung der Massen im Schwerefeld mit unseren Arbeiten über denselben Gegenstand läßt folgendes erkennen [50].

In den Arbeiten von EINSTEIN und INFELD wird die Idee der „allgemeinen Relativität" vertreten und in dem Sinne gedeutet, daß bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen das Koordinatensystem zwar weitgehend willkürlich bleibt, diese Gleichungen aber dennoch eindeutig herauskommen müssen. Die von EINSTEIN und INFELD tatsächlich benutzten Koordinatenbedingungen werden nicht immer als solche anerkannt, obwohl sie in den in Betracht kommenden Näherungen mit den harmonischen Koordinatenbedingungen identisch sind. Der Umstand, daß die diesen Bedingungen genügenden Koordinaten nur in Termen von der in (96.01) angegebenen Größenordnung von den harmonischen abweichen können, wird außer acht gelassen: Die Tatsache, daß die Bewegungsgleichungen keine Änderung erfahren, wenn die Koordinatenbedingung in der nächstfolgenden Näherung geändert wird, wird von EINSTEIN und INFELD nicht einfach durch die Kleinheit der betreffenden Terme in der Koordinatentransformation (96,01) erklärt, sondern als Folge der „allgemeinen Relativität" aufgefaßt.

In den Arbeiten von EINSTEIN wird ferner der Massentensor als „unerwünschtes Element" der Theorie betrachtet und statt dessen werden singuläre Punkte des Feldes eingeführt. Dadurch entfällt jede Möglichkeit, die innere Struktur der Körper und deren Einfluß auf ihre Bewegung zu untersuchen.

In einigen Arbeiten der EINSTEINschen Schule wird die Meinung ausgesprochen, daß es prinzipiell möglich ist, im Rahmen der Mechanik „exakte" Bewegungsgleichungen anzugeben.

Andererseits wird der in unseren Arbeiten durchgeführte Standpunkt durch folgende Züge gekennzeichnet:

Erstens wird die Lösung eindeutig und (mit Hilfe der Ausstrahlungsbedingung) physikalisch begründet gewählt, wobei auch das Koordinatensystem bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig bestimmt wird.

Zweitens wird die innere Struktur der Körper berücksichtigt, was ohne die Anerkennung der grundlegenden Bedeutung des Massentensors unmöglich wäre.

Schließlich halten wir eine strenge Lösung des Problems der Bewegung eines Systems von Körpern im Rahmen der Mechanik der Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden für prinzipiell unmöglich, da bei einer exakten Behandlung dieses Problems unbedingt auch das Feld in die Betrachtung einbezogen werden muß.

Es ist möglich, daß die erwähnten Unterschiede in den Standpunkten der beiden Schulen gegenüber bestimmten, konkreten Problemen nicht zufällig sind, sondern mit der Verschiedenheit ihrer allgemein philosophischen Ansichten zusammenhängen.

SCHLUSS

Wir wollen versuchen, in wenigen Worten unsere Auffassung von der Theorie von Raum, Zeit und Gravitation darzulegen. Diese stimmt in den meisten Punkten mit der gewöhnlichen Auffassung, die von EINSTEIN herrührt, überein, weicht aber doch in einigen wesentlichen Punkten davon ab.

Raum und Zeit müssen zusammen betrachtet werden. Sie bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, die beim Fehlen von Gravitation homogen ist und einen GALILEIschen Raum darstellt. Der GALILEIsche Raum besitzt eine pseudo-euklidische Metrik. Seine Homogenität kommt in der Existenz der Gruppe der LORENTZ-Transformationen zum Ausdruck, die den Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen vermitteln. Die Homogenität der Raum-Zeit läßt sich auch allgemein-kovariant formulieren. Mit der Eigenschaft Homogenität ist der Begriff Relativität verknüpft, weshalb man die auf den LORENTZ-Transformationen basierende Theorie des GALILEIschen Raumes als Relativitätstheorie bezeichnet.

Die physikalische Grundlage der Gravitationstheorie ist das Gesetz der Gleichheit von träger und schwerer Masse, während ihre mathematische Grundlage die Hypothese ist, daß Raum und Zeit eine RIEMANNsche Metrik besitzen.

Das Gesetz der Gleichheit von träger und schwerer Masse hat keinen lokalen Charakter; hingegen hat das damit zusammenhängende Äquivalenzprinzip, nach dem in einem betrachteten Raumpunkt das Schwerefeld einem passend gewählten Beschleunigungsfeld äquivalent ist, rein lokalen Charakter.

Das „Äquivalenzprinzip“ ist strenggenommen keine besondere physikalische Hypothese und kein besonderes Prinzip, sondern eine Folge des RIEMANNschen Charakters der Metrik. Zur Ableitung der EINSTEINschen Gravitationsgleichungen ist das Prinzip der Äquivalenz von Beschleunigung und Gravitation nicht erforderlich: Diese Gleichungen können ohne die Betrachtung von beschleunigt bewegten Bezugssystemen — ein Begriff, der nicht befriedigend definiert ist — abgeleitet werden.

In der RIEMANNschen Geometrie kann man von einer Homogenität des Raumes nur im unendlich Kleinen sprechen, während der GALILEIsche Raum auch im Großen homogen ist. Da aber der Begriff der Relativität mit der Homogenität zusammenhängt, so bringt die Gravitationstheorie keine Verallgemeinerung, sondern vielmehr eine Einschränkung dieses Begriffes mit sich. Deshalb kann man sie nicht als „allgemeine Relativitätstheorie“ bezeichnen. Die Verallgemeinerung, welche die Gravitationstheorie bringt, bezieht sich auf die Art der Geometrie von Raum und Zeit, nicht aber auf den Begriff der Relativität.

Die RIEMANNsche Geometrie untersucht die lokalen Eigenschaften des Raumes und sagt im allgemeinen nichts über die Eigenschaften des Raumes im Großen aus. In der Gravitationstheorie jedoch ist die lokale Betrachtungsweise

unzureichend, da die Feldgleichungen partielle Differentialgleichungen sind, deren Lösungen wesentlich von den Randbedingungen abhängen. Deshalb muß man in der Gravitationstheorie irgendwelche Hypothesen über die Eigenschaften des Raumes im Großen einführen. Diese Hypothesen bedingen die Existenz ausgezeichneter Koordinatensysteme. Die wichtigste davon ist die Annahme, daß der Raum im Unendlichen GALILEIsch ist. Unter dieser Voraussetzung kann man die Gravitationspotentiale derart Zusatzbedingungen unterwerfen, daß das Koordinatensystem bis auf eine LORENTZ-Transformation eindeutig festgelegt ist. Dieses Koordinatensystem, das wir das harmonische nennen, besitzt große Ähnlichkeit mit den kartesischen Koordinaten und der Zeit in einem gewöhnlichen Inertialsystem.

In der Gravitationstheorie, wie auch in anderen Gebieten der theoretischen Physik, muß die korrekte mathematische Formulierung des Problems derart sein, daß sie die Eindeutigkeit der Lösung soweit wie möglich sicherstellt. Das Fehlen von Eindeutigkeit ist kein Vorzug, sondern ein Mangel der Theorie: Es läßt sich nicht rechtfertigen und noch viel weniger zum Prinzip erheben („allgemeines Relativitätsprinzip").

In unserer Formulierung der sich auf ein isoliertes Massensystem beziehenden Probleme erreichen wir die Eindeutigkeit der Lösung durch die Einführung von vier Zusatzgleichungen (Harmonizitätsbedingungen) und von Randbedingungen, sowie durch den Übergang von einer lokalen Betrachtungsweise zur Betrachtung des Raumes im Großen. Auf diese Weise wird in allen betrachteten Problemen Eindeutigkeit der Lösung erzielt, so bei den Bewegungsgleichungen, der Ausstrahlung, der Form der strengen, der angenäherten und der asymptotischen Lösungen der Gravitationsgleichungen u. ä.

Für ein isoliertes System von Körpern ist die Frage des Koordinatensystems ebenso zu beantworten wie beim Fehlen von Gravitation: Es existiert ein ausgezeichnetes Koordinatensystem (das GALILEIsche bzw. das harmonische), man kann aber auch beliebige andere Koordinatensysteme benutzen. Der geometrische Sinn der letzteren läßt sich jedoch erst durch ihren Vergleich mit dem ausgezeichneten System ermitteln.

Die Bedeutung des ausgezeichneten Koordinatensystems besteht nicht nur darin, daß es ein Standardsystem ist, das es ermöglicht, die auf verschiedenen Wegen gewonnenen Lösungen zu vergleichen. Die Existenz eines ausgezeichneten Koordinatensystems ist auch von prinzipieller Bedeutung, weil sie objektive Eigenschaften des Raumes widerspiegelt. Nur wenn man die Existenz eines ausgezeichneten Systems anerkennt, kann man insbesondere der heliozentrischen Theorie des Sonnensystems den Vorzug vor der geozentrischen geben.

Für die Behandlung von Raumgebieten, die viele Galaxien enthalten, ist der Begriff eines isolierten Systems unbrauchbar, und die Eigenschaften des Raumes im Großen müssen anders formuliert werden (FRIEDMANN-LOBATSCHEWSKY-Raum).

Das Hauptziel dieses Buches war — abgesehen von der Lösung konkreter Probleme — die Darstellung der Grundlagen der Gravitationstheorie unter einem neuen Gesichtspunkt. Wir hoffen, daß dieses Buch zu einem richtigen Verständnis der Theorie beitragen und damit die Richtung für weitere Untersuchungen weisen wird.

ANHANG A

Zur Ableitung der LORENTZ-Transformation

In § 8 wurden Gleichungen abgeleitet, denen die Transformationsfunktionen

$$x_i' = f_i\,(x_0, x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{A, 01}$$

genügen müssen, damit die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung in den Koordinaten (x_i) soll eine Bewegung der gleichen Art in den Koordinaten (x_i') entsprechen.

(b) Einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung *mit Lichtgeschwindigkeit* in den Koordinaten (x_i) soll eine Bewegung der gleichen Art in den Koordinaten (x_i') entsprechen.

Die Bedingung (b) ist mit folgender Forderung äquivalent:

(b′) Der Gleichung für die Wellenfront

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right] = 0 \tag{A, 02}$$

in den Koordinaten (x_i) soll eine ebensolche Gleichung in den Koordinaten (x_i') entsprechen.

In § 8 wurde gezeigt, daß die Funktionen, die der Bedingung (a) genügen, Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial x_l} = \psi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \psi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \tag{A, 03}$$

sein müssen, während die Funktionen, die die Bedingung (b) oder (b′) erfüllen, das Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \lambda e_k \delta_{kl} \tag{A, 04}$$

befriedigen müssen.

Aus der Bedingung (A, 04) wollen wir eine andere ableiten, die eine zu (A, 03) analoge Form hat. Wir differenzieren die Gleichungen (A, 04) nach x_m und setzen

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_m} = 2\,\lambda\,\varphi_m. \tag{A, 05}$$

Wir bekommen dann

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) = 2\,\lambda\,\varphi_m e_k \delta_{kl}. \tag{A, 06}$$

Mit der Bezeichnung

$$\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial f_i}{\partial x_s} = \lambda e_s \Gamma^s_{km} \tag{A, 07}$$

können wir statt (A, 06) schreiben

$$e_l \Gamma^l_{km} + e_k \Gamma^k_{lm} = 2\,\varphi_m e_k \delta_{kl}. \tag{A, 08}$$

Um daraus die Größen Γ^s_{km} zu finden, betrachten wir neben (A,08) die beiden anderen Gleichungen, die man erhält, wenn man die Indizes k, l, m zyklisch permutiert

$$e_m \Gamma^m_{lk} + e_l \Gamma^l_{mk} = 2\,\varphi_k e_l \delta_{lm}, \tag{A, 09}$$

$$e_k \Gamma^k_{ml} + e_m \Gamma^m_{kl} = 2\,\varphi_l e_m \delta_{mk}. \tag{A, 10}$$

Wir bilden die Summe von (A, 09) und (A, 10) und ziehen davon die Gleichung (A, 08) ab. Wegen der Symmetrie der Größen Γ^l_{km} in bezug auf die unteren Indizes erhalten wir dann nach Multiplikation mit e_m

$$\Gamma^m_{kl} = \varphi_k \delta_{lm} + \varphi_l \delta_{km} - e_m \varphi_m e_k \delta_{kl}. \tag{A,11}$$

Nun können aber andererseits die Gleichungen (A, 07) in bezug auf die zweiten Ableitungen der f_i aufgelöst werden. Unter Benutzung von (A, 04) erhält man

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{m=0}^{3} \Gamma^m_{kl} \frac{\partial f_i}{\partial x_m}. \tag{A, 12}$$

Setzt man hierin die Größen Γ^m_{kl} aus (A,11) ein, so erhält man endgültig

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = \varphi_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \varphi_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - e_k \delta_{kl} \sum_{m=0}^{3} e_m \varphi_m \frac{\partial f_i}{\partial x_m}. \tag{A, 13}$$

Diese Gleichungen für f_i folgen also aus der Bedingung (b) oder (b′), die sich auf die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit bezieht. Andererseits können auch die Gleichungen (A, 03), welche die Forderung (a) über die Erhaltung der Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit der Bewegung ausdrücken, in der Form (A, 12) geschrieben werden, wenn man nur setzt

$$\Gamma^m_{kl} = \psi_k \delta_{lm} + \psi_l \delta_{km}. \tag{A, 14}$$

Wir haben in § 8 gesehen, daß die Bedingungen (a) und (b) zusammen, oder auch (a) und (b′) zusammen, auf die LORENTZ-Transformation führen. Wir wollen nun untersuchen, was sich aus der Bedingung (a) allein bzw. aus der Bedingung (b) oder (b′) allein ergibt.

Gleichungen von der Form (A, 12) haben wir in § 42 ausführlich untersucht; dort wurde eine notwendige und hinreichende Bedingung für ihre vollständige Integrierbarkeit angegeben. Diese Bedingung lautet

$$\frac{\partial \Gamma^m_{kl}}{\partial x_n} - \frac{\partial \Gamma^m_{kn}}{\partial x_l} + \sum_{r=0}^{3} (\Gamma^r_{kl} \Gamma^m_{rn} - \Gamma^r_{kn} \Gamma^m_{rl}) = 0. \qquad (A, 15)$$

Sie ergibt sich aus der Forderung, daß die verschiedenen Ausdrücke für die dritten Ableitungen von f_i, die man durch Differentiation von (A, 12) erhält, einander gleich sein sollen.

Gehen wir mit dem Ausdruck (A, 14) in (A, 15) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial \psi_l}{\partial x_n} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l}\right) \delta_{mk} + \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} - \psi_k \psi_n\right) \delta_{ml} - \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} - \psi_k \psi_l\right) \delta_{mn} = 0. \qquad (A, 16)$$

Setzen wir darin $k \neq m,\ l \neq m$, aber $n = m$, so ergibt sich

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} - \psi_k \psi_l = 0. \qquad (A, 17)$$

Da der Index m in (A, 16) jeden Wert annehmen kann, ist die Einschränkung $k \neq m$, $l \neq m$ unwesentlich, und die Gleichung (A, 17) muß für alle Werte k und l gelten. Offensichtlich ist diese Gleichung auch hinreichend für die Gültigkeit von (A, 16). Es folgt nämlich aus ihr

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \psi_l}{\partial x_k}, \qquad (A, 18)$$

so daß auch der erste Term in (A, 16) verschwindet.

Wir gehen nun mit dem Ausdruck (A, 11) in (A, 15) ein. Wegen (A, 05) können wir setzen

$$\varphi_{kl} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k} = \varphi_{lk}. \qquad (A, 19)$$

Die Berechnung der linken Seite von (A, 15) ergibt nach Multiplikation mit e_m

$$(\varphi_{kn} - \varphi_k \varphi_n) e_m \delta_{lm} - (\varphi_{kl} - \varphi_k \varphi_l) e_m \delta_{nm} + (\varphi_{lm} - \varphi_l \varphi_m) e_k \delta_{kn} -$$
$$- (\varphi_{mn} - \varphi_m \varphi_n) e_k \delta_{kl} + e_k e_m (\delta_{kn} \delta_{lm} - \delta_{kl} \delta_{nm}) \sum_{r=0}^{3} e_r \varphi_r^2 = 0. \qquad (A, 20)$$

Setzen wir

$$\Phi_{kl} = \varphi_{kl} - \varphi_k \varphi_l + \frac{1}{2} e_k \delta_{kl} \sum_{r=0}^{3} e_r \varphi_r^2, \qquad (A, 21)$$

so können wir die Gleichung (A, 20) folgendermaßen schreiben

$$\Phi_{kn} e_m \delta_{lm} - \Phi_{kl} e_m \delta_{nm} + \Phi_{lm} e_k \delta_{kn} - \Phi_{mn} e_k \delta_{kl} = 0. \qquad (A, 22)$$

Hieraus folgert man leicht, daß

$$\Phi_{kl} = 0 \tag{A, 23}$$

sein muß. Multipliziert man nämlich die linke Seite von (A, 22) mit $(-e_m)$, setzt $m = n$ und summiert über m, so erhält man

$$2\,\Phi_{kl} + e_k \delta_{kl} \sum_{m=0}^{3} e_m \Phi_{mm} = 0\,. \tag{A, 24}$$

Multipliziert man nun die linke Seite von (A, 24) mit e_k, setzt $k = l$ und summiert über k, so erhält man, nach Kürzung des Zahlenfaktors 6,

$$\sum_{m=0}^{3} e_m \Phi_{mm} = 0\,. \tag{A, 25}$$

Aus (A, 25) und (A, 24) folgt (A, 23).

Die Bedingung für die Integrierbarkeit der Gleichungen (A, 03) ist also die Gleichung (A, 17) und die Bedingung für die Integrierbarkeit der Gleichungen (A, 13) die Gleichung (A, 23). Wegen (A, 18) und (A, 19) können wir setzen

$$\psi_k = \frac{\partial \psi}{\partial x_k}; \quad \varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \tag{A, 26}$$

wobei ψ und φ gewisse unbekannte Funktionen sind [nach (A, 05) können wir annehmen, daß $\varphi = \lg \sqrt{\lambda}$ ist]. Dann lauten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_l} = 0, \tag{A, 27}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \frac{1}{2} e_k \delta_{kl} \sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)^2 = 0\,. \tag{A, 28}$$

Setzen wir darin

$$e^{-\psi} = w; \quad \psi = -\lg w \tag{A, 29}$$

und

$$e^{-\varphi} = u; \quad \varphi = -\lg u\,, \tag{A, 30}$$

so erhalten wir für die neuen unbekannten Funktionen die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \tag{A, 31}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} e_k \delta_{kl} \frac{1}{u} \sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2. \tag{A, 32}$$

Die Gleichung (A, 31) zeigt, daß w eine lineare Funktion der Koordinaten ist

$$w = w(0) + w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \tag{A, 33}$$

und daß folglich gilt

$$\psi_k = -\frac{w_k}{w}, \tag{A, 34}$$

wobei die w_k konstant sind. Gehen wir mit diesen Werten für ψ_k in die Gleichung (A, 03) für f_i ein, so können wir diese Gleichung in der Form

$$\frac{\partial^2(w f_i)}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \tag{A, 35}$$

schreiben. Daraus folgt, daß die Größen $w f_i$ lineare Funktionen sind. Die vier Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3 sind also gebrochen-lineare Funktionen mit dem gleichen Nenner w.

Wir sind zu folgendem Ergebnis gekommen: Die allgemeinste Form der Transformationen (A, 01), die der Bedingung (a) genügt, ist eine Transformation durch gebrochen-lineare Funktionen mit dem gleichen Nenner. In dem Spezialfall, daß der Nenner konstant ist, reduzieren sich die gebrochenen Funktionen auf ganze.

Wir wenden uns nun der Gleichung (A, 32) zu, die sich aus der Bedingung (b) oder (b′) ergibt. Zunächst stellen wir fest, daß ihre rechte Seite für $k \neq l$ verschwindet. Folglich verschwinden auch die zweiten Ableitungen von u nach verschiedenen Variablen, d. h., die Funktion u setzt sich additiv aus Funktionen je einer Variablen zusammen. Andererseits folgt aus (A, 32), daß die zweiten Ableitungen von u nach der gleichen Variablen bis auf das Vorzeichen einander gleich sind; wir haben

$$e_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = e_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = e_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = e_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{A, 36}$$

Jede der Größen (A, 36) kann aber höchstens von einer Variablen (nämlich der in der Ableitung auftretenden) abhängen. Folglich sind sie alle derselben Konstanten gleich. Bezeichnen wir diese Konstante mit $2C$, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 2 C e_k; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \quad (k \neq l) \tag{A, 37}$$

und außerdem

$$\sum_{r=0}^{3} e_r \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)^2 = 4 C u. \tag{A, 38}$$

Aus den Gleichungen (A, 37) ergibt sich für die Funktion u die Form

$$u = C \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + B; \tag{A, 39}$$

wo α_k und B Konstanten sind. Die Formel (A, 38) dagegen liefert nur eine Beziehung zwischen den Konstanten, nämlich

$$BC = \sum_{r=0}^{3} e_r \alpha_r^2. \tag{A, 40}$$

Nach (A, 05) und (A, 30) ist der Faktor λ in den Beziehungen (A, 04) umgekehrt proportional zu u^2. Wir können also setzen

$$\sum_i e_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} = \frac{1}{u^2} e_k \delta_{kl}. \qquad (A, 41)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß im Koordinatenursprung, d. h., für $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gilt: $u = 1$; dies kann man stets durch eine Änderung des Maßstabs für f_i oder für x_k erreichen. Unter dieser Bedingung wird

$$B = 1; \quad C = \sum_{r=0}^{3} e_r \alpha_r^2 \qquad (A, 42)$$

und damit

$$u = 1 - 2\sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k^2 \sum_{l=0}^{3} e_l x_l^2. \qquad (A, 43)$$

Ersetzen wir in (A, 04) die Größen φ_k durch die Ausdrücke

$$\varphi_k = -\frac{u_k}{u}; \quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad (A, 44)$$

so erhalten wir

$$u \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} + u_k \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + u_l \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = e_k \delta_{kl} \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial f_i}{\partial x_m}. \qquad (A, 45)$$

Hat u die Form (A, 43), so ist die Bedingung für die Integrierbarkeit des Systems (A, 45) erfüllt und die Funktionen f_i sind durch ihre Werte und die ihrer ersten Ableitungen im Koordinatenursprung vollständig festgelegt. Diese Werte seien

$$(f_i)_0 = a_i; \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_0 = e_k a_{ik}. \qquad (A, 46)$$

Da im Koordinatenursprung $u = 1$ ist, liefert die Gleichung (A, 41)

$$\sum_{i=0}^{3} e_i a_{ik} a_{il} = e_k \delta_{kl}. \qquad (A, 47)$$

Wir setzen nun

$$f_i = a_i + \sum_{r=0}^{3} e_r a_{ir} f_r^*. \qquad (A, 48)$$

Wegen (A, 47) lassen sich diese Gleichungen nach den Funktionen f_r^* auflösen, die sich dann linear durch die f_i ausdrücken. Offensichtlich genügen die Funktionen f_r^* dem gleichen System von Differentialgleichungen wie die Funktionen f_i; für das System (A, 45) folgt dies aus der Linearität der Gleichungen, für das System (A, 41) ergibt es sich aus den Beziehungen (A, 47). Die Anfangsbedingungen für die f_r^* haben aber die Form

$$(f_r^*)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial f_r^*}{\partial x_k}\right)_0 = \delta_{rk}. \qquad (A, 49)$$

Haben wir also die Lösung des Systems (A, 45) mit den speziellen Anfangsbedingungen (A, 49) gefunden, so erhalten wir die allgemeinste Lösung dieses Systems nach der Formel (A, 48).

Das System (A, 45) läßt sich folgendermaßen schreiben

$$\frac{\partial^2 (u f_i^*)}{\partial x_k \, \partial x_l} = f_i^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_l} + e_k \delta_{kl} \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial f_i^*}{\partial x_m} \tag{A, 50}$$

oder, wegen (A, 37),

$$\frac{\partial^2 (u f_i^*)}{\partial x_k \, \partial x_l} = e_k \, \delta_{kl} \left(2 C f_i^* + \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial f_i^*}{\partial x_m} \right). \tag{A, 51}$$

Hierin setzen wir

$$f_i^* = \frac{F_i}{u}. \tag{A, 52}$$

Mit (A, 38) ergibt sich dann

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \, \partial x_l} = e_k \, \delta_{kl} \, \frac{1}{u} \left(-2 C F_i + \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial F_i}{\partial x_m} \right). \tag{A, 53}$$

Durch dieselben Überlegungen wie bei der Untersuchung der Gleichungen (A, 32) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \, \partial x_l} = 2 C_i e_k \delta_{kl} \tag{A, 54}$$

und

$$-2 C F_i + \sum_{m=0}^{3} e_m u_m \frac{\partial F_i}{\partial x_m} = 2 C_i u. \tag{A, 55}$$

Auf Grund von (A, 52) erkennt man leicht, daß die Anfangsbedingungen (A, 49) für f_i^* zu Bedingungen der gleichen Form für F_i führen. Aus den Gleichungen (A, 54) und den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$F_i = C_i \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 + x_i. \tag{A, 56}$$

Setzen wir das in (A, 55) ein, so können wir die Konstanten C_i bestimmen; es wird

$$C_i = -\alpha_i. \tag{A, 57}$$

Mit diesen Werten für die Konstanten werden die Gleichungen (A, 55) Identitäten. Wir haben also

$$F_i = x_i - \alpha_i \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2 \tag{A, 58}$$

und

$$f_i^* = \frac{x_i - \alpha_i \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2}{1 - 2 \sum_{k=0} e_k \alpha_k x_k + \sum_{k=0} e_k \alpha_k^2 \sum_{l=0} e_l x_l^2} . \tag{A, 59}$$

Wir sind damit zu folgendem endgültigen Resultat gekommen: Die allgemeinste Form der Transformation (A, 01), die die Bedingung (b) oder (b′) erfüllt, ergibt sich aus der Transformation

$$x_i^* = \frac{x_i - \alpha_i \sum_{k=0}^{3} e_k x_k^2}{1 - 2 \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k x_k + \sum_{k=0}^{3} e_k \alpha_k^2 \sum_{l=0}^{3} e_l x_l^2} \tag{A, 60}$$

in Verbindung mit der Transformation

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k^* , \tag{A, 61}$$

wobei die Koeffizienten a_{ik} den Bedingungen (A, 47) genügen. Außerdem ist eine Änderung des Maßstabs möglich. Die Transformation (A, 61) ist die gewöhnliche LORENTZ-Transformation. Die Transformation (A, 60) dagegen wird als MÖBIUS-Transformation bezeichnet. Sie besitzt viele bemerkenswerte Eigenschaften, auf die wir hier jedoch nicht eingehen können.

Für uns ist die Feststellung wichtig, daß die Forderung der Forminvarianz der Gleichung für die Wellenfront [Bedingung (b′)] allein noch nicht zur LORENTZ-Transformation führt, denn es bleibt eine MÖBIUS-Transformation frei. Um die MÖBIUS-Transformation auszuschließen, kann man zusätzlich fordern, daß endlichen Werten der ursprünglichen Koordinaten auch endliche Werte der transformierten Koordinaten entsprechen sollen. Diese Zusatzforderung läßt sich nur erfüllen, wenn sämtliche Konstanten α_k in der MÖBIUS-Transformation verschwinden, so daß sie zur Identität wird. Statt dieser Zusatzforderung kann man auch eine andere stellen, nämlich verlangen, daß die Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit der Bewegung erhalten bleiben soll [Bedingung (a)]; so gingen wir auch im Text vor. Jede dieser zusätzlichen Forderungen führt eindeutig zur LORENTZ-Transformation (und einer möglichen Maßstabsänderung). Wesentlich ist dabei, daß sich die Forderung nach Endlichkeit der Koordinaten auf die Raum-Zeit als Ganzes bezieht, während die Bedingung, daß die Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit der Bewegung erhalten bleiben soll, streng lokal ist[1]).

[1]) Die Überlegungen und Folgerungen des Anhangs A schließen an die Ergebnisse von WEYL [9] an.

ANHANG B

Die Umformung des EINSTEIN-Tensors

a) Die Umformung des Krümmungstensors zweiter Stufe[1])

Wir beginnen mit der Umformung des kovarianten Krümmungstensors zweiter Stufe $R_{\mu\nu}$ und zeigen, daß man in ihm Terme zusammenfassen kann, die die Form eines D'ALEMBERT-Operators haben, der auf die entsprechende Komponente $g_{\mu\nu}$ des Fundamentaltensors wirkt.

Entsprechend der Definition ist

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\beta\nu}, \tag{B, 01}$$

wobei der Krümmungstensor vierter Stufe nach (44,08) lautet

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha,\beta\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\right) - \\ - g_{\varrho\sigma} \Gamma^\varrho_{\mu\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + g_{\varrho\sigma} \Gamma^\varrho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{B, 02}$$

[Diese Formel unterscheidet sich von (44,08) nur in der Bezeichnung der Indizes.] Folglich ist

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \\ - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} - g^{\alpha\beta} g_{\varrho\sigma} \Gamma^\varrho_{\mu\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + \Gamma^\varrho_{\mu\nu} \Gamma_\varrho. \end{aligned} \tag{B, 03}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\Gamma_\varrho = g_{\varrho\sigma} \Gamma^\sigma, \tag{B, 04}$$

wo, in Übereinstimmung mit der Bezeichnung (41,15),

$$\Gamma^\sigma = g^{\alpha\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \tag{B, 05}$$

ist. In der Formel (B, 03) hat der erste Term schon die Form eines D'ALEMBERT-Operators, der auf $g_{\mu\nu}$ wirkt. Die übrigen Terme lassen sich so umformen, daß zweite Ableitungen des Fundamentaltensors nur über die ersten Ableitungen der Größen Γ_ϱ eingehen. Dazu brauchen wir die Formeln

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \lg(-g) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}, \tag{B, 06}$$

---

[1]) Vgl. auch die Arbeiten von DE DONDER [18] und LANCZOS [19].

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} = -g_{\alpha\nu}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}, \tag{B, 07}$$

$$\Gamma^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}), \tag{B, 08}$$

die wir bereits in § 41 abgeleitet haben. Aus diesen Formeln ergibt sich

$$\Gamma_\nu = g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\nu}. \tag{B, 09}$$

Differenzieren wir (B, 06) nach x_ν, so erhalten wir

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{B, 10}$$

Da der Ausdruck (B, 10) in μ und ν symmetrisch ist, so gilt

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{B, 11}$$

Differenzieren wir den Ausdruck (B, 09) nach x_μ, so erhalten wir

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}. \tag{B, 12}$$

Im letzten Term auf der rechten Seite können wir die Größe $\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}$ durch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha}\right) = \Gamma_{\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} \tag{B, 13}$$

ersetzen, wo die $\Gamma_{\nu,\alpha\beta}$ die gewöhnlichen CHRISTOFFEL-Symbole erster Art (38,30) sind. Dann lautet die Formel (B, 12)

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \Gamma_{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}. \tag{B, 14}$$

Vertauschen wir darin die Indizes μ und ν (sowie auch die Summationsindizes α und β auf der linken Seite), so können wir schreiben

$$-g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \Gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{B, 15}$$

Die in (B, 03) [mit dem Faktor 1/2] auftretende Summe der Ausdrücke (B, 10), (B, 14) und (B, 15) hat also den Wert

$$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu}\right) + \Gamma_{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \Gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} \tag{B, 16}$$

[wegen (B, 11) heben sich die übrigen Terme weg].

Wir führen nun die Bezeichnung

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial x_\mu}\right) - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\Gamma_\varrho \tag{B, 17}$$

ein. Die Größe $\Gamma_{\mu\nu}$ ist analog zur halben Summe der kovarianten Ableitungen eines Vektors gebaut, obwohl Γ_ν kein Vektor ist. Wegen (B, 16) lautet damit der Ausdruck (B, 03) für $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Gamma_{\nu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}. \tag{B, 18}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung bei der Umformung der Terme mit ersten Ableitungen werden wir nicht nur die Bezeichnungen $\Gamma_{\nu,\alpha\beta}$ und $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ für die gewöhnlichen CHRISTOFFEL-Symbole, sondern auch die Bezeichnungen

$$\Gamma^{\alpha\beta}_\mu = g^{\alpha\varrho} g^{\beta\sigma}\Gamma_{\mu,\varrho\sigma}, \tag{B, 19}$$

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\varrho} g^{\beta\sigma}\Gamma^\mu_{\varrho\sigma} = g^{\alpha\varrho} g^{\beta\sigma} g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\varrho\sigma} \tag{B, 20}$$

für die entsprechenden Größen mit oberen Indizes verwenden. Die Größe $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ hat zum Beispiel den Wert

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\varrho}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} - g^{\alpha\varrho}\frac{\partial g^{\beta\mu}}{\partial x_\varrho} - g^{\beta\varrho}\frac{\partial g^{\alpha\mu}}{\partial x_\varrho}\right). \tag{B, 21}$$

Wir betrachten den Ausdruck

$$A_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} g^{\varrho\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\varrho\nu}}{\partial x_\alpha} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}, \tag{B, 22}$$

dessen letzter Term mit dem letzten Term von (B, 18) übereinstimmt. Wir schreiben ihn in der Form

$$A_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} g^{\varrho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\varrho\nu}}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\sigma,\mu\beta}\Gamma_{\varrho,\nu\alpha}\right), \tag{B, 23}$$

setzen darin

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\beta} = \Gamma_{\sigma,\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\sigma\beta} \tag{B, 24}$$

ein und benutzen die Gleichung

$$\frac{\partial g_{\varrho\nu}}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\varrho,\nu\alpha} = \Gamma_{\nu,\varrho\alpha}. \tag{B, 25}$$

Dann erhalten wir

$$A_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} g^{\varrho\sigma}\left(\Gamma_{\sigma,\mu\beta}\Gamma_{\nu,\varrho\alpha} + \Gamma_{\mu,\alpha\beta}\frac{\partial g_{\varrho\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{B, 26}$$

Mit der Bezeichnung (B, 19) können wir nach Umbenennung der Indizes schreiben

$$A_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu}^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\alpha,\mu\beta} + \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_{\alpha}}. \tag{B, 27}$$

Da hier der Koeffizient $\Gamma_{\nu}^{\alpha\beta}$ in α und β symmetrisch ist, so können wir den Faktor dieser Größe durch seinen symmetrischen Anteil ersetzen, der den Wert $\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}$ hat. Aus dem gleichen Grund können wir $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}$ durch den Ausdruck (B, 13) ersetzen. Damit erhalten wir

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\Gamma_{\nu}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} + \frac{1}{2}\,\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} + \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\nu,\alpha\beta}. \tag{B, 28}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt aber

$$\Gamma_{\nu}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} = -\,\Gamma_{\nu,\alpha\beta}\,\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}. \tag{B, 29}$$

Deshalb wird

$$A_{\mu\nu} = -\,\frac{1}{2}\,\Gamma_{\nu,\alpha\beta}\,\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{1}{2}\,\Gamma_{\mu,\alpha\beta}\,\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} + \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\nu,\alpha\beta}. \tag{B, 30}$$

Setzen wir die Ausdrücke (B, 22) und (B, 30) für $A_{\mu\nu}$ einander gleich, so erhalten wir die Beziehung

$$\frac{1}{2}\,\Gamma_{\nu,\alpha\beta}\,\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} + \frac{1}{2}\,\Gamma_{\mu,\alpha\beta}\,\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} - g^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\sigma,\mu\beta}\,\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} = \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\nu,\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\,g^{\varrho\sigma}\,\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_{\beta}}\,\frac{\partial g_{\varrho\nu}}{\partial x_{\alpha}}. \tag{B, 31}$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich der Ausdruck für $R_{\mu\nu}$ in der folgenden endgültigen Form schreiben

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}} - \Gamma_{\mu\nu} - g^{\alpha\beta}\,g^{\varrho\sigma}\,\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_{\beta}}\,\frac{\partial g_{\varrho\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\nu,\alpha\beta}. \tag{B, 32}$$

Daraus erhält man leicht den Ausdruck für die kontravarianten Komponenten des Krümmungstensors zweiter Stufe. Durch Differentiation einer Beziehung von der Form (B, 07) läßt sich ohne Schwierigkeiten folgende Formel ableiten:

$$g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\varrho}\,\frac{\partial^2 g^{\varrho\sigma}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}} = -\,\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}} + g^{\varrho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_{\alpha}}\,\frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_{\beta}}\,\frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_{\alpha}}\right). \tag{B, 33}$$

Damit kann man $R_{\mu\nu}$ in der Form

$$R_{\mu\nu} = -\,\frac{1}{2}\,g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\varrho}\,g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 g^{\varrho\sigma}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}} - \Gamma_{\mu\nu} + \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\nu,\alpha\beta} \tag{B, 34}$$

schreiben. Heben wir darin die Indizes μ und ν, so erhalten wir für $R^{\mu\nu}$ folgenden einfachen Ausdruck:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{B, 35}$$

Die Größe $\Gamma^{\mu\nu}$ ergibt sich aus $\Gamma_{\mu\nu}$ durch Heben der Indizes nach der Formel

$$\Gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} \Gamma_{\varrho\sigma} \tag{B, 36}$$

und läßt sich unmittelbar durch die Größen Γ^α, die durch die Formel (B, 08) definiert sind, ausdrücken. Man erhält

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \Gamma^\alpha\right). \tag{B, 37}$$

b) Die Umformung der Invariante

Wir bilden nun die Invariante des Krümmungstensors

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}. \tag{B, 38}$$

Wir haben

$$R = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma + \Gamma^{\alpha\beta}_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}, \tag{B, 39}$$

wo mit Γ die Größe

$$\Gamma = g_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \tag{B, 40}$$

bezeichnet ist. Unter Benutzung der Formel

$$\frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\alpha} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \tag{B, 41}$$

erhalten wir aus (B, 37)

$$\Gamma = \frac{\partial \Gamma^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\alpha} \Gamma^\alpha \tag{B, 42}$$

und wegen (41,16)

$$\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial^2 \left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\right)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{B, 43}$$

Differenzieren wir die Formel (B, 41) nach x_β, so ergibt sich, analog zu (B, 10),

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{B, 44}$$

Setzen wir (B, 44) in (B, 39) ein, so finden wir

$$R = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma + \Gamma^{\alpha\beta}_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{B, 45}$$

Wir sehen, daß die zweiten Ableitungen des Fundamentaltensors in den Ausdruck für R nur über die zweiten Ableitungen von $\lg(-g)$ und über die Größe Γ eingehen.

Die Terme mit ersten Ableitungen lassen sich mit Hilfe der Beziehung

$$\Gamma_\nu^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\nu + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} \tag{B, 46}$$

umformen, die sich leicht aus der Formel

$$\Gamma_\nu^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g_{\varrho\nu} \left(g^{\sigma\beta} \frac{\partial g^{\varrho\alpha}}{\partial x_\sigma} + g^{\sigma\alpha} \frac{\partial g^{\varrho\beta}}{\partial x_\sigma} \right) \tag{B, 47}$$

ergibt. Als Ergebnis erhalten wir

$$R = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \lg(-g)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{B, 48}$$

Diesen Ausdruck kann man in der Form

$$R = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^\alpha \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} - \Gamma - L \tag{B, 49}$$

schreiben, wo

$$L = -\frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \tag{B, 50}$$

ist. Erinnern wir uns der Formel

$$\Box y = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 y}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^\alpha \frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \tag{B, 51}$$

für den D'ALEMBERT-Operator, der auf eine beliebige Funktion y wirkt, so können wir schreiben

$$R = \Box (\lg \sqrt{-g}) - \Gamma - L. \tag{B, 52}$$

Natürlich ist die Größe $y = \lg \sqrt{-g}$ kein Skalar, aber formal kann man den Operator (B, 51) auch darauf anwenden. Es sei bemerkt, daß sowohl der erste als auch der zweite Term in (B, 52) eine durch $\sqrt{-g}$ dividierte Summe von Ableitungen gewisser Größen nach den Koordinaten darstellt. Dieser Umstand ist bei der Formulierung des Variationsprinzips für die EINSTEINschen Gleichungen von Bedeutung; in diesem Variationsprinzip spielt die durch die Formel (B, 50) definierte Größe L die Rolle der LAGRANGE-Funktion.

Die LAGRANGE-Funktion L läßt sich außer in der Form (B, 50) noch in verschiedenen anderen Formen schreiben; wir erwähnen nur die folgenden:

$$L = \frac{1}{2} \Gamma^{\nu,\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - \Gamma^\alpha \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}, \tag{B, 53}$$

$$L = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta). \tag{B, 54}$$

Die letzte Form trifft man in der Literatur am häufigsten an.

c) *Die Umformung des* EINSTEIN-*Tensors*

Auf Grund der vorstehenden Formeln können wir einen Ausdruck für den divergenzfreien EINSTEIN-Tensor

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \tag{B, 55}$$

angeben. Dabei zeigt es sich, daß die zweiten Ableitungen des Fundamentaltensors in $G^{\mu\nu}$ nur über die zweiten Ableitungen der Größe $\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}$ und über die ersten Ableitungen von Γ^ν eingehen. Deshalb ist es zweckmäßig, für die mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten kontravarianten Komponenten des Fundamentaltensors eine besondere Bezeichnung einzuführen.

Wir setzen

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \tag{B, 56}$$

Die Formel (41,16) lautet dann

$$\Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu}. \tag{B, 57}$$

Für das Folgende ist es bequem, alle Formeln derart umzuformen, daß sie nur Ableitungen der Größen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ enthalten. Dabei treten Ableitungen der Größe

$$y = \lg \sqrt{-g} \tag{B, 58}$$

auf, die wir mit

$$y_\alpha = \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \tag{B, 59}$$

bezeichnen wollen. Wegen (41,07) gilt dann

$$y_\alpha = \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}. \tag{B, 60}$$

Für die Größen, die aus y_α durch Heben des Indexes hervorgehen, führen wir die Bezeichnung

$$y^\alpha = g^{\alpha\beta} y_\beta \tag{B, 61}$$

ein, die der bei Tensoren üblichen ähnlich ist (obwohl y^α selbstverständlich kein Vektor ist). Wir haben ferner

$$y^\alpha = \Gamma^{\alpha\beta}_{\beta}, \tag{B,62}$$

wobei $\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu}$ die Bedeutung (B, 19) hat. Die zweiten Ableitungen von y bezeichnen wir mit $y_{\alpha\beta}$

$$y_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{B, 63}$$

Nach der Formel (B, 21) sind die Größen $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ bilineare Funktionen der Komponenten $g^{\mu\nu}$ und ihrer ersten Ableitungen. Drücken wir in dieser Formel $g^{\mu\nu}$ durch $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ aus, so erhalten wir

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = \Pi^{\mu,\alpha\beta} + \Lambda^{\mu,\alpha\beta} \tag{B, 64}$$

mit

$$\Pi^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\varrho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\beta}}{\partial x_\varrho} + \mathfrak{g}^{\beta\varrho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\alpha}}{\partial x_\varrho} - \mathfrak{g}^{\mu\varrho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho}\right), \tag{B, 65}$$

$$\Lambda^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(y^\alpha g^{\mu\beta} + y^\beta g^{\mu\alpha} - y^\mu g^{\alpha\beta}\right). \tag{B, 66}$$

Die entsprechenden Größen mit unteren Indizes bezeichnen wir durch $\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}$ und $\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta}$.

Wir berechnen nun die Determinante der $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$

$$\text{Det}\ \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \left(\sqrt{-g}\right)^4 \text{Det}\ g^{\mu\nu} = g^2\frac{1}{g} = g. \tag{B, 67}$$

Die Determinante der $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ ist also der Determinante der $g_{\mu\nu}$ gleich

$$\text{Det}\ \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \text{Det}\ g_{\mu\nu} = g. \tag{B, 68}$$

Aus der Formel (B,66) erhalten wir

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^{\mu,\alpha\beta} = -\,y^\mu; \tag{B, 69}$$

da aber

$$g_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = \Gamma^\mu \tag{B, 70}$$

ist, so wird

$$g_{\alpha\beta}\Pi^{\mu,\alpha\beta} = \Gamma^\mu + y^\mu. \tag{B, 71}$$

Der letzte Ausdruck hat auch den Wert

$$\Gamma^\mu + y^\mu = -\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{B, 72}$$

Wir formen nun den EINSTEIN-Tensor

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{B, 55}$$

um. Dazu gehen wir von der Formel

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \tag{B, 35}$$

und der Formel (B, 49) für R aus, die wir folgendermaßen schreiben

$$R = g^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha y_\alpha - \Gamma - L. \tag{B, 73}$$

Die zweite Ableitung der Größe $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ beträgt

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sqrt{-g}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + y_\beta \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + y_\alpha \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + y_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + y_\alpha y_\beta g^{\mu\nu}\right), \quad (B, 74)$$

und folglich ist

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sqrt{-g}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + 2\, y^\alpha \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} y_\alpha y^\alpha\right). \quad (B, 75)$$

Andererseits haben wir

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta}\right) + \\ + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha y_\alpha + \Gamma + L) - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \quad (B, 76)$$

Vergleichen wir die letzten beiden Formeln, so sehen wir, daß sie abgesehen von den Termen Γ und $\Gamma^{\mu\nu}$ die gleichen Kombinationen von zweiten Ableitungen enthalten. Die Rechnung liefert

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \\ + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(y_\alpha y^\alpha + \Gamma^\alpha y_\alpha + \Gamma + L) - \Gamma^{\mu\nu} + y^\alpha \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \quad (B, 77)$$

Am kompliziertesten ist wie immer die Umformung der Terme mit ersten Ableitungen. Wir haben

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\nu,\alpha\beta}\Pi^{\mu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\mu,\alpha\beta}\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}. \quad (B, 78)$$

Mit (B, 71) erhalten wir

$$\Lambda^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\nu,\alpha\beta}\Pi^{\mu}_{\alpha\beta} = y_\varrho(\Pi^{\nu,\mu\varrho} + \Pi^{\mu,\nu\varrho}) - \frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu + y^\nu\Gamma^\mu) - y^\mu y^\nu \quad (B, 79)$$

und folglich

$$\Pi^{\nu,\mu\varrho} + \Pi^{\mu,\nu\varrho} = \frac{1}{g}\mathfrak{g}^{\alpha\varrho}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = -g^{\alpha\varrho}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - g^{\mu\nu} y^\varrho, \quad (B, 80)$$

$$\Lambda^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\nu,\alpha\beta}\Pi^{\mu}_{\alpha\beta} = -y^\alpha\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - g^{\mu\nu} y_\alpha y^\alpha - \frac{1}{2}(y^\mu\Gamma^\nu + y^\nu\Gamma^\mu) - y^\mu y^\nu. \quad (B, 81)$$

Ferner ist

$$\Lambda^{\mu,\alpha\beta}\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} y^\mu y^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} y_\alpha y^\alpha. \quad (B, 82)$$

Daraus folgt

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - y^{\alpha}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}y_{\alpha}y^{\alpha} - \frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu} - \frac{1}{2}(y^{\mu}\Gamma^{\nu} + y^{\nu}\Gamma^{\mu}). \tag{B, 83}$$

Mit dieser Beziehung können wir die Formel (B, 77) in der Form

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}} + \Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu} + $$
$$+ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}L + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}y_{\alpha} + \Gamma) - \Gamma^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(y^{\mu}\Gamma^{\nu} + y^{\nu}\Gamma^{\mu}) \tag{B, 84}$$

schreiben. Darin setzen wir

$$B^{\mu\nu} = \Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(y^{\mu}\Gamma^{\nu} + y^{\nu}\Gamma^{\mu}), \tag{B, 85}$$

$$B = g_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = \Gamma + \Gamma^{\alpha}y_{\alpha} \tag{B, 86}$$

und drücken in dem Term mit dem D'ALEMBERT-Operator die Größen $g^{\alpha\beta}$ durch $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ aus. Dann lautet die Formel für den EINSTEIN-Tensor

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{1}{2g}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}} + $$
$$+ \Pi^{\mu,\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}L + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}B - B^{\mu\nu}. \tag{B, 87}$$

Da sich die Determinante g nach (B, 68) unmittelbar durch die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ ausdrücken läßt, so haben wir in der Formel (B, 87) alle Terme außer L durch die Größen $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ und ihre Ableitungen dargestellt. Wir haben also nur noch die LAGRANGE-Funktion L durch die gleichen Größen auszudrücken.

Nach der Definition (B, 50) gilt

$$L = -\frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}y_{\alpha}. \tag{B, 88}$$

Darin setzen wir

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\nu}_{\alpha\beta} \tag{B, 89}$$

ein, wo nach (B, 66)

$$\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(y_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + y_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha} - y^{\nu}g_{\alpha\beta}) \tag{B, 90}$$

ist. Mit der Formel

$$\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} = -\Gamma^{\alpha}y_{\alpha}, \tag{B, 91}$$

die sich leicht aus (B, 90) ableiten läßt, erhalten wir

$$L = -\frac{1}{2}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\Gamma^{\alpha} y_{\alpha}. \tag{B, 92}$$

Drücken wir darin $\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}$ durch

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} = \sqrt{-g}\left(\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + g^{\alpha\beta} y_\nu\right) \tag{B, 93}$$

aus und benutzen die Formel (B, 71), die wir in der Form

$$g^{\alpha\beta}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\nu} + y^{\nu} \tag{B, 94}$$

schreiben können, so erhalten wir schließlich

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\Pi^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} y_\nu y^\nu. \tag{B, 95}$$

Darin stehen unter dem Ableitungssymbol nur noch die Größen $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$.

ANHANG C

Die Charakteristiken der verallgemeinerten D'ALEMBERT-Gleichung

Die verallgemeinerte Wellengleichung (D'ALEMBERT-Gleichung) hat die Form

$$\Box \psi = 0, \tag{C, 01}$$

wo $\Box \psi$ folgender Ausdruck ist:

$$\Box \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta} \right). \tag{C, 02}$$

Darin haben die Größen $g^{\alpha\beta}$ und g die übliche Bedeutung.

Das CAUCHY-Problem für die Gleichung (C, 01) besteht in der Bestimmung der Funktion ψ, wenn die Werte ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial x_0}$ auf irgendeiner Hyperfläche

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = \text{const} \tag{C, 03}$$

vorgegeben sind. Wir nehmen an, daß sich die Gleichung der Hyperfläche (C, 03) nach x_0 auflösen läßt, daß also

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \neq 0 \tag{C, 04}$$

ist. Uns interessiert die Möglichkeit einer Lösung des CAUCHY-Problems in einem Gebiet, das der Hyperfläche (C, 03) hinreichend nahe ist. Zur Bestimmung der Werte der Funktion ψ in diesem Gebiet muß man die Ableitungen von ψ in jedem Punkt der Hyperfläche berechnen können. Wie man leicht einsieht, lassen sich die ersten Ableitungen unmittelbar aus den Anfangswerten bestimmen. Zur Berechnung der zweiten Ableitungen dagegen muß man die Wellengleichung benutzen. Die Möglichkeit, die zweiten Ableitungen zu bestimmen, hängt von der Form der Hyperfläche ab, auf die sich die Anfangswerte beziehen. Ist die Hyperfläche so beschaffen, daß die zugehörigen Anfangswerte die zweiten Ableitungen nicht festlegen, so wird sie als Charakteristik bezeichnet. Eine charakteristische Hyperfläche besitzt die Eigenschaft, daß auf ihr Unstetigkeiten der zweiten Ableitungen möglich sind. Deshalb muß auch die sich bewegende Wellenfront eine Charakteristik sein.

Wir untersuchen zunächst den einfachsten Fall, daß sich die Anfangswerte auf die Hyperfläche $x_0 = \text{const}$ beziehen, d. h. auf den Anfangszeitpunkt. Aus den vorgegebenen Werten von ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial x_0}$ erhält man durch direkte Diffe-

rentiation alle ersten Ableitungen und auch folgende zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial x_i}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3) \tag{C, 05}$$

(genauer, die Werte dieser Größen für das gegebene x_0). Die zweite Ableitung nach x_0 jedoch muß man aus der Wellengleichung bestimmen. Die explizite Form der Wellengleichung lautet

$$g^{00} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \cdots = 0 . \tag{C, 06}$$

Dabei sind durch die Punkte die Terme angedeutet, welche die übrigen zweiten Ableitungen (C, 05) und die ersten Ableitungen enthalten, die bereits bekannt sind. Da die Größe g^{00} wegen der Eigenschaften des Fundamentaltensors nirgends verschwindet (sie ist stets positiv), so läßt sich die Gleichung (C, 06) stets nach der übriggebliebenen zweiten Ableitung $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2}$ auflösen. Wenn also die Variable x_0 den Charakter einer Zeit hat, so ist die Hyperfläche $x_0 = \text{const}$ keine Charakteristik.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall der Hyperfläche (C, 03). Wir führen die neuen Variablen

$$x_0' = \omega(x_0, x_1, x_2, x_3); \quad x_1' = x_1; \quad x_2' = x_2; \quad x_3' = x_3 \tag{C, 07}$$

ein. Bezeichnen wir mit ψ' die Größe ψ als Funktion der Variablen x_0', x_1', x_2', x_3', so ist

$$\psi = \psi'; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = \frac{\partial \psi'}{\partial x_0'} \frac{\partial \omega}{\partial x_0} . \tag{C, 08}$$

Wegen (C, 04) ist die Vorgabe von ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial x_0}$ auf $\omega = \text{const}$ mit der Vorgabe von ψ' und $\frac{\partial \psi'}{\partial x_0'}$ auf $x_0' = \text{const}$ äquivalent. Aus den letzteren Größen kann man ebenso wie oben alle ersten Ableitungen und die zweiten Ableitungen der Form

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_0' \partial x_i'}; \qquad \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_i' \partial x_k'} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3) \tag{C, 09}$$

berechnen, während die zweite Ableitung nach x_0' aus der Wellengleichung bestimmt werden muß. Der auf die neuen Variablen transformierte D'ALEMBERT-Operator lautet

$$\Box \psi = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha'} \left(\sqrt{-g'}\, g'^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta'} \right). \tag{C, 10}$$

Hierbei ergeben sich die $g'^{\alpha\beta}$ aus den $g^{\alpha\beta}$ nach der allgemeinen Transformationsregel für einen Tensor; insbesondere ist

$$g'^{00} = g^{\mu\nu} \frac{\partial x_0'}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_0'}{\partial x_\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} . \tag{C, 11}$$

Dabei braucht aber die Ungleichung $g'^{00} > 0$ nicht erfüllt zu sein, denn die neue Variable x'_0 hat nicht unbedingt den Charakter einer Zeit.

Die transformierte Wellengleichung lautet

$$\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}\right)\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_0'^2}+\cdots=0. \tag{C, 12}$$

Die weggelassenen Terme enthalten die zweite Ableitung nach x'_0 nicht mehr, sondern nur zweite Ableitungen der Form (C, 09), sowie erste Ableitungen. Die Werte aller weggelassenen Terme auf der Hyperfläche $\omega = \text{const}$ kann man als aus den zugehörigen Anfangswerten bekannt ansehen. Die zweite Ableitung nach x'_0 bleibt dann und nur dann unbestimmt, wenn ihr Koeffizient in der Wellengleichung (C, 12) verschwindet, d. h., wenn die Funktion ω der Gleichung

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}=0 \tag{C, 13}$$

genügt. Dies ist die Gleichung für Charakteristiken der Wellengleichung (C, 01).

Die Charakteristiken der verallgemeinerten Wellengleichung stimmen mit den Charakteristiken der im § 46 behandelten allgemein-kovarianten MAXWELLschen Gleichungen überein. Dieses Ergebnis läßt sich durch folgende Überlegung kurz (aber nicht ganz streng) begründen: Für die Potentiale A_ν ergeben sich aus den MAXWELLschen Gleichungen mit der Bedingung $\nabla_\nu A^\nu = 0$ Gleichungen, in denen die höheren (zweiten) Ableitungen als ein D'ALEMBERT-Operator angeordnet sind. Daraus kann man schließen, daß auch die Charakteristiken der allgemein-kovarianten MAXWELLschen Gleichungen die Form (C, 13) haben. Der Mangel an mathematischer Strenge in dieser Folgerung liegt darin, daß wir von den Charakteristiken für die Potentiale zu denen für die Felder übergehen. Es ist aber keine Schwierigkeit, auch eine strenge Ableitung zu geben, indem man unmittelbar mit den Feldkomponenten arbeitet, ähnlich wie wir dies in § 3 für kartesische Koordinaten im euklidischen Fall getan haben.

ANHANG D

Die Integration der Gleichung für die Wellenfront

Ist

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{D, 01}$$

die Gleichung einer sich bewegenden Wellenfront, so genügt die Funktion ω, wie wir wissen, der partiellen Differentialgleichung

$$g^{\alpha\beta}\,\omega_\alpha\,\omega_\beta = 0, \tag{D, 02}$$

wo wir zur Abkürzung

$$\omega_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \tag{D, 03}$$

gesetzt haben. Wir betrachten nun folgendes Problem: Es soll die Form der Wellenfläche für einen Zeitpunkt $x_0 > 0$ bestimmt werden, wenn ihre Form für den Zeitanfangspunkt vorgegeben ist. Ein ähnliches Problem haben wir in § 4 für den Fall der euklidischen Metrik und GALILEIscher Koordinaten gelöst; jetzt wollen wir es für den allgemeinen Fall betrachten.

Die Form der Wellenfläche im Zeitanfangspunkt sei durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(u, v), \\ x_2 &= f_2(u, v), \\ x_3 &= f_3(u, v) \end{aligned}\right\} \qquad \text{für } x_0 = 0 \tag{D, 04}$$

gegeben. Diese Gleichungen lassen sich in der symmetrischeren Form

$$x_\alpha = f_\alpha(u, v) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{D, 05}$$

schreiben, wobei

$$f_0 \equiv 0 \tag{D, 06}$$

ist. Statt der Anfangswerte, die sich auf den Zeitpunkt $x_0 = 0$ beziehen, kann man die CAUCHYschen Werte betrachten, die sich auf eine andere Hyperfläche beziehen; dann ist die Funktion f_0 nicht mehr identisch gleich Null.

Setzen wir die Ausdrücke (D, 05) für die Koordinaten in die Gleichung (D, 01) ein, so erhalten wir eine Identität in u und v. Differenzieren wir diese Identität nach u und nach v, so ergeben sich die beiden Beziehungen

$$\omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial u} = 0; \qquad \omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = 0. \tag{D, 07}$$

Nehmen wir die Gleichung für die Wellenfront (D, 02) hinzu, so können wir aus diesen drei homogenen Gleichungen die Anfangswerte der vier Größen ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmen. Diese Anfangswerte bezeichnen wir mit einem oberen Index 0; dann haben wir

$$\omega_\alpha^0 = \lambda \varphi_\alpha(u, v); \qquad \lambda = \lambda(u, v), \tag{D, 08}$$

wobei die φ_α bekannte Funktionen sind, während λ eine beliebige Funktion von u und v ist. Wir müssen bemerken, daß sich das Verhältnis der Größen ω_α^0 nicht ganz eindeutig ergibt: Es sind dafür zwei Werte möglich, weil die Gleichung der Wellenfront (D, 02) in ω_α^0 quadratisch ist. Zur eindeutigen Bestimmung dieser Verhältnisse müssen wir noch angeben, in welche der beiden möglichen Richtungen sich die Welle ausbreitet.

Um anzudeuten, daß die linken Seiten der Gleichungen (D, 05) die Anfangswerte der Koordinaten darstellen, versehen wir sie mit dem oberen Index 0 und schreiben

$$x_\alpha^0 = f_\alpha(u, v). \tag{D, 09}$$

Wir wählen einen Punkt auf der Ausgangswellenfläche (jedem solchen Punkt entspricht ein bestimmtes Wertepaar u, v) und betrachten den Strahl, der durch diesen Punkt geht. Wie wir in § 38 gesehen haben, sind die Differentialgleichungen für den Strahl HAMILTONsche Gleichungen, die der HAMILTON-JACOBIschen Gleichung (D, 02) entsprechen. Nach (38,41) haben diese Gleichungen die Form

$$\frac{dx_\alpha}{dp} = g^{\alpha\beta}\omega_\beta; \qquad \frac{d\omega_\alpha}{dp} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\omega_\mu\,\omega_\nu. \tag{D, 10}$$

In § 38 wurde gezeigt, daß diese Gleichungen mit den Gleichungen für eine geodätische Nullinie äquivalent sind.

Für einen Strahl, der durch den Punkt (u, v) geht, sind die Anfangswerte der Variablen x_α und ω_α durch (D, 09) und (D, 08) gegeben. Integrieren wir die Gleichungen (D, 10) mit den Anfangswerten x_α^0 und ω_α^0, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(p;\, x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0;\ \omega_0^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0), \\ \omega_\alpha &= \omega_\alpha(p;\, x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0;\ \omega_0^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0). \end{aligned}\right\} \tag{D, 11}$$

Wenn wir darin die Anfangswerte (D, 09) und (D, 08) einsetzen, so finden wir für x_α und ω_α Ausdrücke der Form

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= F_\alpha(\lambda p, u, v), \\ \omega_\alpha &= \lambda \Phi_\alpha(\lambda p, u, v). \end{aligned}\right\} \tag{D, 12}$$

Da sich die Gleichung (D,10) bei der Substitution

$$\omega_\alpha = \lambda\omega_\alpha'; \qquad p' = \lambda p \tag{D, 13}$$

nicht ändert (λ ist längs des Strahles konstant), so hängen die Funktionen F_α und Φ_α nicht von λ und p einzeln, sondern nur von dem Produkt λp ab.

Die Gleichungen

$$x_\alpha = F_\alpha(p', u, v) \qquad \text{(D, 14)}$$

sind die Gleichungen für die bewegte Wellenfläche in Parameterdarstellung. Eliminieren wir daraus die Variablen p', u, v, so gewinnen wir eine Beziehung zwischen den vier Koordinaten (x_0, x_1, x_2, x_3), die eine Gleichung für die Wellenfläche in der Form (D, 01) darstellt.

Den Beweis für die hier angegebenen Formeln und Beziehungen findet man in den Lehrbüchern der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (vgl. z. B. [10]).

Als einfachstes Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\omega_0^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = 0 \qquad \text{(D, 15)}$$

für folgende Anfangsform der Wellenfläche:

$$z = f(x, y) \qquad \text{für} \qquad t = 0. \qquad \text{(D, 16)}$$

Dabei spielen die rechtwinkligen Koordinaten x, y die Rolle der Parameter u und v. Die Gleichungen (D, 07) lauten dann

$$\omega_1 + \omega_3 f_x = 0; \qquad \omega_2 + \omega_3 f_y = 0, \qquad \text{(D, 17)}$$

wobei f_x und f_y die partiellen Ableitungen nach x und y sind. Aus (D, 15) und (D,17) erhalten wir als eine der möglichen Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= \lambda c, \\ \omega_1 &= -\frac{\lambda f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ \omega_2 &= -\frac{\lambda f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ \omega_3 &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(D, 18)}$$

Die andere Lösung ergibt sich aus (D, 18), wenn wir darin das Vorzeichen der Quadratwurzel umkehren. In den Formeln (D, 17) und (D, 18) müßten wir genau genommen ω_α^0 statt ω_α schreiben; wir haben aber den oberen Index 0 deshalb fortgelassen, weil die Größen ω_α in dem betrachteten Beispiel immer konstant sind. Lösen wir die Gleichungen

$$\frac{dx_0}{dp} = \frac{1}{c^2}\omega_0; \qquad \frac{dx_i}{dp} = -\omega_i \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(D, 19)}$$

und nehmen an, daß für $t = 0$ auch $p = 0$ ist, so erhalten wir

$$x_0 = t = \frac{\omega_0}{c^2}p; \qquad x_i = x_i^0 - \omega_i p \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad \text{(D, 20)}$$

Darin setzen wir die Größen ω_α aus (D, 18) ein und drücken den Parameter p durch t aus; dann ergibt sich für die erste Lösung

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{ct f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ x_2 &= y + \frac{ct f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ x_3 &= f(x, y) - \frac{ct}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{D, 21}$$

Für die zweite Lösung (mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung) gilt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{ct f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ x_2 &= y - \frac{ct f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ x_3 &= f(x, y) + \frac{ct}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{D, 22}$$

Wählen wir als Anfangswellenfläche speziell eine Kugelfläche vom Radius a und setzen

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \tag{D, 23}$$

so erhalten wir aus (D, 22)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1 + \frac{ct}{a}\right), \\ x_2 &= y\left(1 + \frac{ct}{a}\right), \\ x_3 &= \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\left(1 + \frac{ct}{a}\right) \end{aligned}\right\} \tag{D, 24}$$

und nach Elimination von x und y

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (a + ct)^2, \tag{D, 25}$$

d. h. eine Kugelfläche vom Radius $R = a + ct$, wie auch zu erwarten war.

ANHANG E

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Euklidizität des dreidimensionalen Raumes

Für den dreidimensionalen Raum hat der Krümmungstensor zweiter Stufe R_{ik} die gleiche Anzahl von Komponenten wie der Krümmungstensor vierter Stufe $R_{il,\,mk}$ (nämlich sechs). Deshalb kann man erwarten, daß sich nicht nur R_{ik} nach der allgemeinen Formel

$$R_{ik} = a^{lm} R_{il,\,mk} \tag{E, 01}$$

durch $R_{il,\,mk}$ ausdrücken läßt, sondern daß man auch umgekehrt $R_{il,\,mk}$ durch R_{ik} ausdrücken kann (den Index a an den Komponenten des dreidimensionalen Tensors lassen wir hier weg).

Um diese Ausdrücke zu finden, führen wir ähnlich wie in § 22 und § 37 ein antisymmetrisches System von Größen ε_{ijh} ein, wobei $\varepsilon_{123} = 1$ ist, und bilden den antisymmetrischen Pseudotensor mit den kovarianten Komponenten

$$E_{ijh} = \sqrt{a}\,\varepsilon_{ijh} \tag{E, 02}$$

und den kontravarianten Komponenten

$$E^{ijh} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\varepsilon_{ijh}. \tag{E, 03}$$

Bei einer Transformation der Koordinaten x_1, x_2, x_3 mit positiver JACOBI-Determinante

$$D\binom{x'}{x} = \frac{D(x_1', x_2', x_3')}{D(x_1, x_2, x_3)} > 0 \tag{E, 04}$$

haben wir

$$\sqrt{a'}\, D\binom{x'}{x} = \sqrt{a} \tag{E, 05}$$

und folglich unter Beachtung der Bildungsregeln für die Determinante

$$E'_{ijh} \frac{\partial x_i'}{\partial x_p} \frac{\partial x_j'}{\partial x_q} \frac{\partial x_h'}{\partial x_r} = E_{pqr}. \tag{E, 06}$$

Damit ist gezeigt, daß sich die Größen E_{ijh} bei solchen Transformationen wie ein kovarianter Tensor verhalten. Nach der Bildungsregel für die Determinante können wir auch schreiben

$$E_{ikl}\, a^{ip} a^{kq} a^{lr} = E^{pqr}, \tag{E, 07}$$

wobei E^{pqr} den Wert (E, 03) hat. Damit ist gezeigt, daß E^{pqr} der kontravariante Pseudotensor ist, der E_{ikl} entspricht. Daraus ergeben sich leicht die Formeln

$$E_{ikl} a^{kq} a^{lr} = E^{pqr} a_{ip}, \tag{E, 08}$$

$$E_{ikl} a^{lr} = E^{pqr} a_{ip} a_{kq}, \tag{E, 09}$$

$$E_{ikl} = E^{pqr} a_{ip} a_{kq} a_{lr}. \tag{E, 10}$$

Wir erwähnen noch die für das weitere wichtige Formel

$$E^{pqj} E_{rsj} = \delta^p_r \delta^q_s - \delta^p_s \delta^q_r, \tag{E, 11}$$

die man durch folgende Überlegung beweisen kann. Beide Seiten dieser Formel sind nur für $p \neq q$ und $r \neq s$ von Null verschieden, wobei das Zahlenpaar (p, q) bis auf die Reihenfolge mit dem Zahlenpaar (r, s) übereinstimmen muß. Ist $p = r$ und $q = s$, so sind beide Seiten gleich $+1$, ist $p = s$ und $q = r$, so haben sie den Wert -1. Folglich stimmen beide Seiten bei allen möglichen Indexkombinationen überein, und die Formel (E, 11) ist bewiesen.

Um zu finden, wie sich die $R_{il,mk}$ durch die R_{ik} ausdrücken, führen wir den kontravarianten symmetrischen Tensor zweiter Stufe A^{pq} nach den Formeln

$$A^{pq} E_{pil} E_{qmk} = R_{il,mk} \tag{E, 12}$$

ein und ermitteln dann den Zusammenhang zwischen A^{pq} und R^{pq}. Die Formeln (E, 12) lassen sich in Form der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a A^{11} &= R_{23,23}; \quad a A^{22} = R_{31,31}; \quad a A^{33} = R_{12,12}; \\ a A^{23} &= R_{31,12}; \quad a A^{31} = R_{12,23}; \quad a A^{12} = R_{23,31} \end{aligned}\right\} \tag{E, 13}$$

schreiben, wobei

$$A^{pq} = A^{qp} \tag{E, 14}$$

ist. Diese Gleichungen drücken A^{pq} unmittelbar durch $R_{il,mk}$ aus. Wir gehen mit (E, 12) in (E, 01) ein und benutzen (E, 09) und (E, 11); dann erhalten wir

$$R_{ik} = A^{pq} (a_{pk} a_{iq} - a_{pq} a_{ik}). \tag{E, 15}$$

Setzen wir

$$A = a_{pq} A^{pq}, \tag{E, 16}$$

so wird

$$R_{ik} = A_{ik} - a_{ik} A. \tag{E, 17}$$

Daraus folgt

$$R = a^{ik} R_{ik} = -2A \tag{E, 18}$$

und damit

$$A_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} a_{ik} R. \tag{E, 19}$$

A_{ik} ist also einfach der dreidimensionale konservative Tensor. Setzen wir den entsprechenden kontravarianten Tensor in (E,12) ein, so erhalten wir die gesuchte Beziehung, die den Tensor vierter Stufe durch den Tensor zweiter Stufe ausdrückt:

$$R_{il,mk} = \left(R^{pq} - \frac{1}{2} a^{pq} R\right) E_{pil} E_{qmk}. \tag{E, 20}$$

Aus den erhaltenen Formeln können wir folgenden wichtigen Schluß ziehen: Wie wir wissen (§ 42), ist für die Reduzierbarkeit einer gegebenen quadratischen Form ds^2 auf eine Form mit konstanten Koeffizienten das Verschwinden des Krümmungstensors vierter Stufe notwendig und hinreichend. Dieses Ergebnis gilt offensichtlich auch für die rein räumliche, dreidimensionale quadratische Form

$$dl^2 = a_{ik} dx_i dx_k. \tag{E, 21}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für deren Reduzierbarkeit auf die euklidische Form

$$dl^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 \tag{E, 22}$$

ist somit die Gleichung

$$R_{il,mk} = 0, \tag{E, 23}$$

wobei links der dreidimensionale Tensor steht. Nach (E,20) läßt sich aber im dreidimensionalen Raum der Krümmungstensor vierter Stufe durch den Krümmungstensor zweiter Stufe ausdrücken. Deshalb ist das Verschwinden des Krümmungstensors zweiter Stufe die notwendige und hinreichende Bedingung für die Euklidizität des dreidimensionalen Raumes.

LITERATURVERZEICHNIS

Klassische Arbeiten

[1] EINSTEIN, A., Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. Physik, **17**, 891 (1905).

[2] EINSTEIN, A., Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Physik, **49**, 769 (1916).

[3] LORENTZ, H. A., Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. Proc. Acad. Sci. Amsterdam, **6**, 809 (1904).

[4] POINCARÉ, H., Sur la dynamique de l'électron. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXI, 129 (1906).

[5] EINSTEIN, A., The meaning of relativity. 4th ed. Princeton 1955.
Vgl. auch EINSTEIN, A., Grundzüge der Relativitätstheorie. Braunschweig 1956. (Anm. d. dt. Red.)

Spezialliteratur

[1] CARTAN, E., La théorie des groupes et la géometrie. L'enseignement mathématique, **25**, 200 (1927); Oeuvres Complètes, 1. Teil Bd. II, S. 841, Paris 1952.

[2] FOKKER, A. D., Over de Absoluta der Chronogeometrie. Koningl. Nederl. Akademie, Afd. Natuurkunde, **64**, 10, 133 (1955).

[3] Александров А. Д., О сущности теории относительности. Вестник ЛГУ
(ALEXANDROW, A. D., Das Wesen der Relativitätstheorie. Mitt. staatl. Univ. Leningrad), Nr. 8, 103 (1953).

[4] Александров А. Д. и Овчинников В. В., Замечания к основам теории осноcительности. Вестник ЛГУ
(ALEXANDROW, A. D. und OWTSCHINNIKOW, W. W., Bemerkungen zu den Grundlagen der Relativitätstheorie. Mitt. staatl. Univ. Leningrad), Nr. 11, 95 (1953).

[5] Умов Н. А., Избранные сочинения.
(UMOW, N. A., Ausgewählte Werke), Гостехиздат, 1950.

[6] UMOW, N., Einheitliche Ableitung der Transformationen, die mit dem Relativitätsprinzip verträglich sind. Physikalische Zeitschrift, **11**, 905 (1910).

[7] Умов Н. А., Уравнения движения энергии в телах.
(UMOW, N. A., Gleichungen für die Bewegung der Energie in der Materie), Odessa1874.

[8] Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. V. Лекции по физическим основам теории относительности. Изд. АН СССР.
(MANDELSTAM, L. I., Gesammelte Werke, Bd. V. Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Relativitätstheorie. Ausg. Akad. Wiss. UdSSR), 1950.

[9] WEYL, H., Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923.

[10] SMIRNOW, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. IV. (Übersetzung aus dem Russischen). Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

[11] Каган В. Ф., Основания геометрии. (KAGAN, W. F., Grundlagen der Geometrie), Teil I, Moskau—Leningrad 1949.
[12] Крутков Ю. А., Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд. АН СССР.
(KRUTKOW, J. A., Der Tensor der Spannungsfunktion und allgemeine Lösungen in der Statik der Elastizitätstheorie. Ausg. Akad. Wiss. UdSSR), 1949.
[13] Шехтер В. М., Вестник ЛГУ
(SCHECHTER, W. M., Mitt. staatl. Univ. Leningrad), Nr. 11 (1954).
[14] PLANCK, M., Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1923.
[15] LEBEDEW, P. N., Experimentelle Untersuchungen über den Lichtdruck. Ann. Physik, **6**, 433 (1901).
[16] LEVI-CIVITA, T., The Absolute Differential Calculus. London 1927.
[17] WEYL, H., Raum-Zeit-Materie. Berlin 1923.
[18] DE DONDER, T., La gravifique einsteinienne. Paris 1921.
[19] LANCZOS, K., Phys. Z., **23**, 537 (1923).
[20] SCHWARZSCHILD, K., S. B. Preuß. Akad. Wiss., S. 189 (1916).
[21] Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях. Изд. АН СССР.
(KRYLOW, A. N., Vorlesungen über Näherungsrechnung. Ausg. Akad. Wiss. UdSSR), 1944.
[22] MØLLER, C., On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox. Dan. Mat. Fys. Medd., **20**, Nr. 19 (1943).
[23] LIAPOUNOFF, A., Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Leningrad 1925 und 1927.
[24] LIAPOUNOFF, A., Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes. Schriften der Kaiserlich Russischen Akad. Wiss., Reihe VIII, Bd. XIV, Nr. 7 (1903).
[25] Ландау Л. и Лифшиц Е., Теория поля.
(LANDAU, L. und LIFSCHITZ, E., Theorie der Felder), Гостехиздат 1948.
Engl. Übers. unter dem Titel: „The Classical Theory of Fields", Cambridge, Mass., 1951. (Anm. d. dt. Red.).
[26] FRIEDMANN, A., Über die Krümmung des Raumes. Z. Physik, **10**, 377 (1922).
[27] HUBBLE, E., Monthly Notices of the R. S., **133**, 658 (1953).
[28] EINSTEIN, A., Autobiographisches. Sammelband „Albert Einstein, Philosopher — Scientist". The Library of Living Philosophers, Illinois, USA, 1949.
[29] MAXWELL, J. C., Treatise on Electricity. 1873.
[30] EINSTEIN, A., GROMMER, J., S. B. Berl. Akad. Wiss., S. 2 (1927).
[31] EINSTEIN, A., S. B. Berl. Akad. Wiss., S. 235 (1927).
[32] EINSTEIN, A., INFELD, L., HOFFMANN, B., The gravitational equations and the problem of motion. Ann. Math., **39**, 65 (1938).
[33] EINSTEIN, A., INFELD, L., Ann. Math., **41**, 455 (1940).
[34] EINSTEIN, A., INFELD, L., On the motion of particles in general relativity theory. Canad. J. Math., **1**, 209 (1949).
[35] INFELD, L., On the motion of bodies in general relativity theory. Acta physica polon., **13**, 187 (1954).
[36] Фок В. А., О движении конечных масс в общей теории относительности. ЖЭТФ. (FOCK, V. A., Über die Bewegung endlicher Massen in der allgemeinen Relativitätstheorie. J. exp. theoret. Physik), **9**, 375 (1939).
[37] FOCK, V. A., Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de gravitation einsteinienne. J. Phys. USSR, **1**, 81 (1939).

[38] Фок В. А., Система Коперника и система Птоломея в свете общей теории относительности, в сборнике „Николай Коперник“. Изд. АН СССР.
(Fock, V. A., Das kopernikanische und das ptolemäische System im Lichte der allgemeinen Relativitätstheorie. Sammelband „Nikolaus Kopernikus“. Ausg. Akad. Wiss. UdSSR), 1947.

[39] Фок В.А., Некоторые применения идей неевклидовой геометрии Лобачевского к физике. В сборнике А. П. Котельников и В. А. Фок „Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике“.
(Fock, V. A., Einige Anwendungen der nichteuklidischen Geometrie von Lobatschewsky in der Physik. Sammelband von A. P. Kotelnikow und V. A. Fock, „Einige Anwendungen der Ideen Lobatschewskys in Mechanik und Physik“), Гостехиздат, 1950.

[40] Петрова Н., Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечных масс в общей теории относительности.
(Petrova, N., Über die Bewegungsgleichungen und den Materietensor eines Systems endlicher Massen in der allgemeinen Relativitätstheorie), Dissertation, Leningrad 1940. ЖЭТФ. (J. exp. theoret. Physik), 19, 989 (1949).

[41] Фок В. А., Об интегралах движения центра инерции двух конечных масс в общей теории относительности. ДАН СССР.
(Fock, V. A., Über die Integrale der Schwerpunktbewegung zweier endlicher Massen in der allgemeinen Relativitätstheorie. Doklady), 32, 28 (1941).

[42] Fock, V. A., Sur les intégrales du centre de gravité de deux masses etc. C. R. Acad. Sci. USSR (Doklady), 32, 25 (1941).

[43] Кашкаров В. П., Об уравнениях движения системы конечных масс в теории тяготения Эйнштейна. ЖЭТФ.
(Kaschkarow, W. P., Die Bewegungsgleichungen eines Systems endlicher Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. J. exp. theoret. Physik), 27, 563 (1954).

[44] Фихтенгольц И. Г., Лагранжева форма уравнений движения во втором приближении теории тяготения Эйнштейна. ЖЭТФ.
(Fichtenholz, I. G., Die Lagrangesche Form der Bewegungsgleichungen in der zweiten Näherung der Einsteinschen Gravitationstheorie. J. exp. theoret. Physik), 20, 233 (1950).

[45] Papapetrou, A., Equations of motion in general relativity. Proc. Phys. Soc., (A) 64, 57 (1951).

[46] Papapetrou, A., Equations of motion in general relativity: The coordinate condition. Proc. Phys. Soc., (A) 64, 302 (1951).

[47] Meister, H. J., Die Bewegungsgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Physik, 6. Folge, 19, 268 (1957).

[48] Fock, V. A., Three lectures on relativity theory. Rev. Mod. Phys., 29, 325 (1957).

[49] Тодоров И. Т., Об одной теореме единственности для волнового уравнения. Успехи Математических Наук.
(Todorov, I. T., Über einen Eindeutigkeitssatz für die Wellengleichung, Fortschritte der mathematischen Wissenschaften), 13, 211 (1958).

[50] Фок В. А., Сравнение различных координатных условий в теории тяготения Эйнштейна, ЖЭТФ.
(Fock, V. A., Vergleich verschiedener Koordinatenbedingungen in der Einsteinschen Gravitationstheorie, J. exp. theor. Physik), 38, 108 (1960).



NAMENVERZEICHNIS



SACHVERZEICHNIS